

## Analýza a-priori problémovej úlohy z geometrie a príprava učiteľa na vyučovací proces

### A-priori Analysis of Geometry Problem and Teacher Preparation for Teaching Process

Lucia Rumanová <sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Department of Mathematics Faculty of Natural Sciences and Informatics  
Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, 949 01 Nitra, Slovakia*

Received November 6, 2022; received in revised form November 11, 2022; accepted November 23, 2022

---

#### Abstract

In this article, we focus on a-priori analysis as a part of teacher's lesson planning. Teacher should conduct the lesson in such a way as to appropriately stimulate the pupils' thought processes, so all didactic activities should be prepared and planned by the teacher. We chose problem from solid geometry, which was solved by secondary school pupils. The aim of this article is to show the importance of using a-priori analysis of a given problem in stereometry solved by high school students. The analysis can be part of the teacher's preparation for the teaching process.

**Keywords:** theory of didactic situation, a-priori analysis, geometric problem, pupils, teacher's lesson planning.

**Classification:** 97A00

---

#### Úvod

Teória didaktických situácií je vhodná pre vyučovací proces z viacerých aspektov. Je to teoretický nástroj, ktorý skúma podstatu pedagogického problému v podobe riešenia matematickej úlohy. A práve rozbor matematickej úlohy v jednotlivých hladinách didaktických situácií tvorí základ didaktického výskumu teórie didaktických situácií, ako aj praktickej činnosti učiteľa matematiky.

Analýzu matematickej úlohy je vhodné urobiť ešte predtým, ako učiteľ úlohu zadá žiakom. V tomto prípade sa snaží odpovedať na to, ako mu umožní zadaný problém sledovať vytýčený cieľ. Analýza môže ukázať, že aktuálna formulácia problému nie je vhodná na sledovanie vytýčeného cieľa, prípadne nie je veľmi vhodná na sledovanie iného cieľa. Tak isto môže analýza ukázať, akým spôsobom je potrebné problém žiakom zmeniť, ak chceme dosiahnuť vyučovací cieľ (Robert a kol., 1999).

Učiteľ matematiky sa v rámci svojho vysokoškolského štúdia naučil ako riešiť matematické a rôzne problémové úlohy, ako analyzovať ich riešenia z didaktického pohľadu, taktiež vie usúdiť vhodnosť výberu konkrétnych úloh pre vyučovací proces.

Okrem uvedeného by učiteľ mal viesť vyučovanie tak, aby vhodne stimuloval žiacke myšlienkové procesy. Všetky didaktické aktivity by si učiteľ mal vopred pripraviť a naplánovať.

---

\*Corresponding author: [lrumanova@ukf.sk](mailto:lrumanova@ukf.sk)

DOI: 10.17846/AMN.2022.8.2.1-7

Analýza a-priori je teda veľmi vhodným nástrojom pre učiteľa pri tvorbe svojej prípravy na vyučovací proces, ktorý má k dispozícii.

Teóriu didaktických situácií a súvisiacu terminológiu budeme používať v zmysle zavedenom Brousseauom (1986, 1990, 1997, 1998, 2012) a jeho školou didaktiky matematiky, ale aj v zmysle prác Chevallarda (1991, 1992), Sierpinskej (2000), Margolinas (1994) alebo Novotnej (2006, 2013).

Problematike zostrojovania rezov telies sa venujeme už niekoľko rokov, žiaci ju neoblubujú. Uvedenej problematike sme sa venovali aj v článku, ktorého autormi sú Rumanová, Vallo a Ďuriš (20115). V predloženom článku sa riešenej problematike venujeme z iného pohľadu.

Uvedieme analýzu a-priori jednej úlohy zo stereometrie, ktorá patrí k téme „*Vlastnosti lineárnych útvarov v priestore*“ a bola riešená žiakmi strednej školy. Analýza môže byť súčasťou prípravy učiteľa na vyučovací proces.

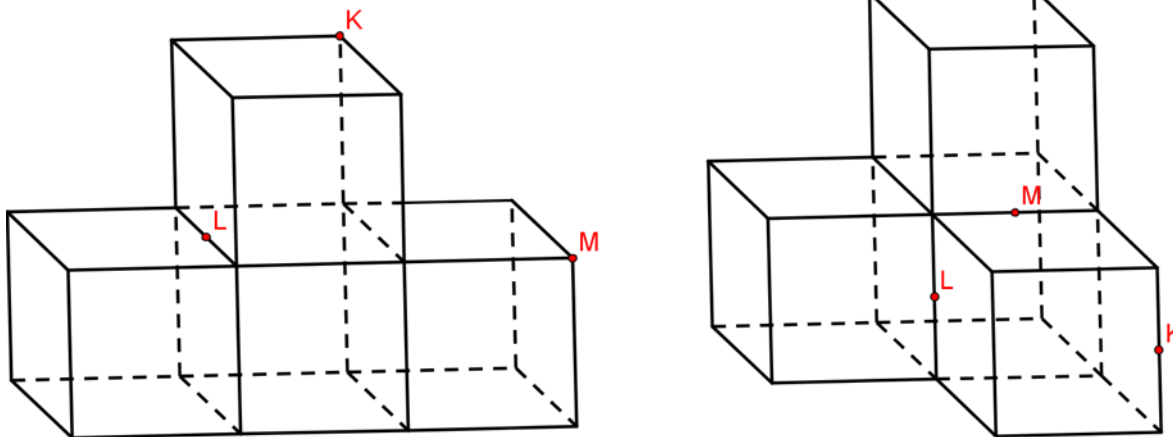
### Analýza a-priori problémovej úlohy a príprava učiteľa na vyučovací proces

V tematickom celku Geometria a meranie je jeden z cieľov vo vyučovaní matematiky rozvíjať priestorovú predstavivosť žiakov. Žiaci strednej školy zostrojujú rezy rôznych jednoduchých telies rovinou, pričom pracujú hlavne s kockou, kvádom, hranolom a ihlanom.

Žiak má vedieť zostrojiť rovinný rez kocky (kvádra) rovinou určenou tromi bodmi ležiacimi v stenových rovinách, z ktorých aspoň dva ležia v tej istej stene daného telesa. Taktiež majú vedieť vysvetliť základné princípy zostrojenia rovinného rezu telies.

Zadali sme žiakom strednej školy problémovú úlohu na zostrojenie rovinného rezu kockového telesa.

*Problémová úloha (dva varianty):* Zostrojte rez kockového telesa rovinou  $\overleftrightarrow{KLM}$  (Obr. 1).



Obr. 1: Kockové telesá

#### Charakter zadania problémovej úlohy

Učiteľ zadá žiakom úlohu len písomne, pričom zadanie úlohy je v súlade so vzdelávacím programom pre strednú školu – gymnázium. Každý žiak má zostrojiť rez kockového telesa rovinou  $\overleftrightarrow{KLM}$ .

Predpokladáme, že formulácia zadania úlohy je zrozumiteľná pre žiakov, pretože je toto zadanie žiakom zrejmé, lebo s ním bežne pracujú v rámci vyučovacieho procesu.

### *Tematický celok, kde možno úlohu zaradiť*

Odporúčame zaradiť úlohu do 2. ročníka gymnázia ako súčasť tematického celku Znáročovanie trojrozmerného priestoru (tematický okruh Geometria a meranie).

### *Cieľ problémovej úlohy.*

Na základe rôznych vlastností lineárnych útvarov v priestore, ktoré žiaci vedia aplikovať pri zostrojení rezu kocky rovinou, by mali vedieť zostrojiť rez kockového telesa rovinou.

### *Časový rozsah riešenia problémovej úlohy*

Učiteľ zopakuje vlastnosti lineárnych útvarov na niekoľkých rezoch jednoduchých telies rovinou a následne budú žiaci pracovať na problémovej úlohe počas jednej vyučovacej hodiny.

### *Priebeh práce*

Odporúčame žiakom pracovať samostatne. Žiaci by nemali mať s pochopením zadania úlohy problém, prípadne si môžu riešenu problematiku vydiskutovať s učiteľom individuálne. Prácu vo väčších skupinách neodporúčame vzhľadom na to, že sa do riešenia úlohy nemusia zapojiť slabší žiaci z triedy.

*Pomôcky:* pravítko, papier, ceruza

### *Didaktické premenné*

Formulačnou didaktickou premennou je pojem „zostrojte“. Kognitívnymi didaktickými premennými sú:

- *rez* – učiteľ môže zadať zostrojiť inú polohovú vlastnosť a zmení sa tak konštrukčné riešenie;
- *kockové teleso* – tým, že učiteľ zvolí zložené teleso, tak sa môže úloha stať netradičnou pre žiakov a zároveň aj obťažnejšou vzhľadom na naučený algoritmus konštrukcie;
- *rovina* – učiteľ ju môže zadať rôznymi spôsobmi, čo môže byť netypické pre žiakov.

### *Potrebné vstupné vedomosti a zručnosti žiakov*

Žiak rozlišuje a vie pomenovať rovinné aj priestorové geometrické útvary, vie načrtnúť aj ich obrazy. Vie načrtnúť aj obrazy hranatých telies vo voľnom rovnobežnom premietaní, hlavne kocku, kváder, kockové teleso, iné hranoly a ihlany. Žiak dokáže zostrojiť prieniky dvoch lineárnych útvarov v priestore.

### *Reakcie žiakov*

Očakávame žiacke otázky súvisiace s pokračovaním rezu na jednotlivých kockách, z ktorého je zložené dané kockové teleso.

*Reakcie učiteľov:* Učiteľ môže úlohu modifikovať vzhľadom na vek a schopnosti žiakov.

*Správne stratégie riešenia:* Predpokladáme, že žiaci budú vo svojich riešeniach vedieť:

- využiť vlastnosť len na niektorých kockách daného telesa: „Ak dve rovnobežné roviny pretína tretia rovina, potom ich pretína v rovnobežných priamkach.“,
- využiť vlastnosť len na niektorých kockách daného telesa: „Ak je priamka rovnobežná s dvoma rôznobežnými rovinami, tak je rovnobežná aj z ich priesečnicou.“,

- využiť vlastnosť len na niektorých kockách daného telesa: „Nech každé dve z troch rovín sú rôznobežné. Potom ak dve z priesečníc prechádzajú jedným bodom, tak ním prechádza aj tretia priesečnica, alebo ak dve z priesečníc nemajú spoločný bod, tak sú rovnobežné a je s nimi rovnobežná aj tretia priesečnica.“,
- využiť všetky vlastnosti na zostrojení rezu kockového telesa rovinou,
- využiť niektoré vlastnosti na zostrojení rezu kockového telesa rovinou,
- vyznačiť rovnobežnosť jednotlivých strán rezu,
- vyznačiť viditeľnosť častí rezu útvaru.

### *Nesprávne stratégie riešenia*

Očakávame, že žiaci nesprávne zostroja rez rovinou na danom kockovom telese. Bude zostrojený rez rovinou na jednej kocke z daného kockového telesa, pričom žiak nebude pokračovať v danom reze na ďalších kockách telesa.

Zostrojený bude rez rovinou na jednej kocke z daného kockového telesa, pričom žiak bude pokračovať v danom reze na ďalších jeho kockách, ale útvar nebude kompletný.

Nebude dodržaná v žiackych riešeniach rovnobežnosť potrebných častí rezu. Niektorú stenu telesa žiaci pretnú na obrázku reznou rovinou  $\overline{KLM}$  duplicitne. Pri zobrazení rezového útvaru na kockovom telese žiaci nevyznačia viditeľnosti jeho častí. Hranica rezového útvaru nebude v žiackych riešeniach súvislou uzatvorenou lomenou čiarou.

*Hodnotenie problémovej úlohy:* Hodnotenie bude formatívne (môže prebehnúť aj na nasledujúcej vyučovacej hodine).

### **Reflexia z riešenia problémovej úlohy a porovnanie s analýzou a-priori danej úlohy**

- *Problémová úloha patrí do tematického celku Znázorňovanie trojrozmerného priestoru (2. ročník gymnázia).*

Je možné ju zaradiť aj do vyšších ročníkov gymnázia a riešiť v rámci seminárov z matematiky so žiakmi, ktorí sa rozhodli maturovať z matematiky. Úloha môže overiť ako žiaci vedia aplikovať svoje nadobudnuté vedomosti o rezoch telies rovinou na netypicky zvolenom telese. Zadali sme žiakom riešiť úlohu 2. ročníka gymnázia, pretože žiaci mali potrebné znalosti a vedomosti z danej problematiky.

- *Cieľ bol formulovaný v analýze a-priori jasne a nebolo potrebné žiakom vysvetľovať podrobnejšie tento cieľ z matematického hľadiska.*

Z didaktického hľadiska niektorí žiaci nenašli vhodnú stratégiu riešenia problémovej úlohy. Časovo je postačujúca jedna vyučovacia hodina na zopakovanie si viet, potrebných pri zostrojovaní rezu jednoduchého telesa rovinou. Učiteľ môže zadať riešiť podobné úlohy žiakom aj v rámci ďalších vyučovacích hodín matematiky, prípadne ako domácu úlohu, ak to uzná za vhodné vzhľadom na utvrdenie si preberanej problematiky.

*Priebeh práce žiakov na vyučovacej hodine a aj pomôcky boli zvolené vhodné.*

Považujeme za účelové, ak učiteľ rozhodne, aby žiaci riešili úlohu samostatne. Alternatívna možnosť - zadať úlohu aj ako problémovú úlohu pre dvojicu žiakov. Didaktické premenné boli všetky obsiahnuté v našej analýze a-priori, nebolo potrebné učiteľom modifikovať zadanie

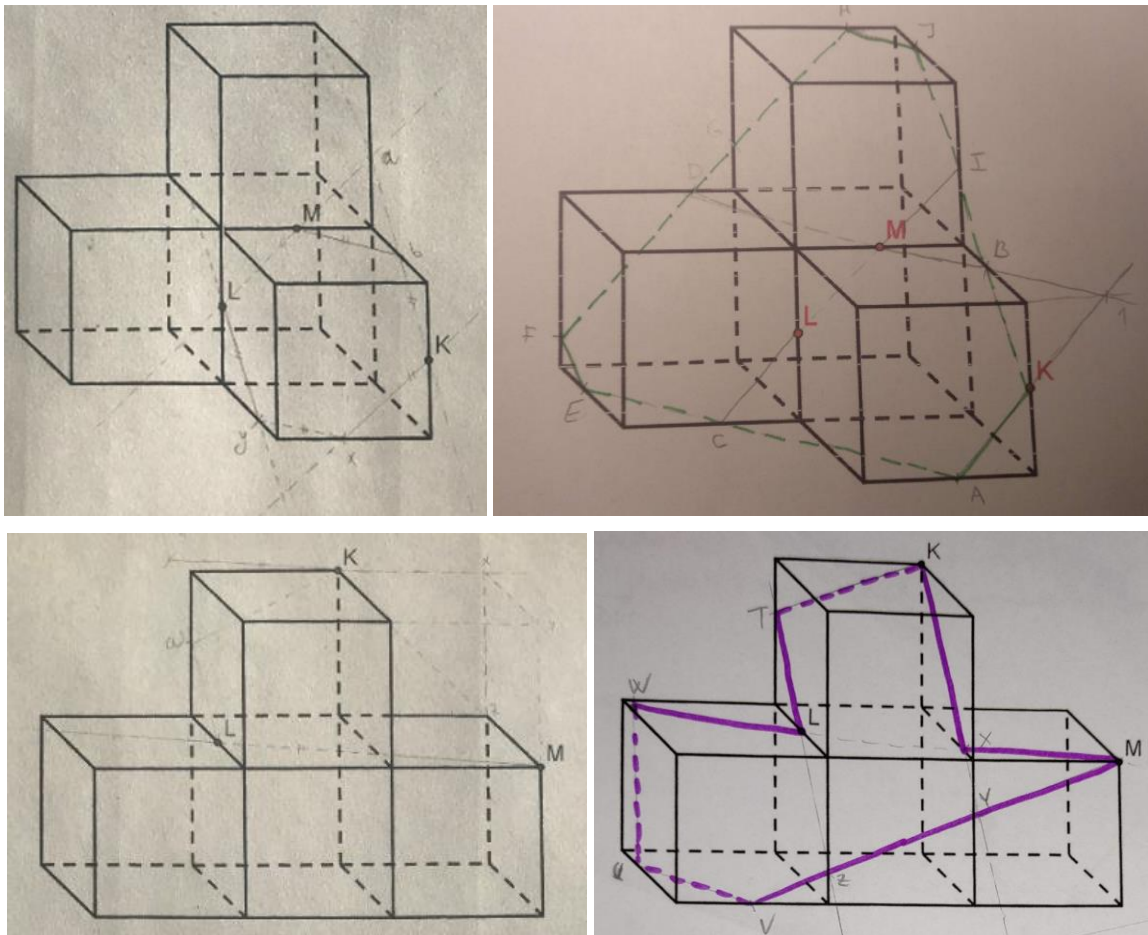
úlohy. Niektorí žiaci sa vyjadrili, že takú úlohu nikdy neriešili, ale považovali ju zaujímavú a s nadšením ju riešili.

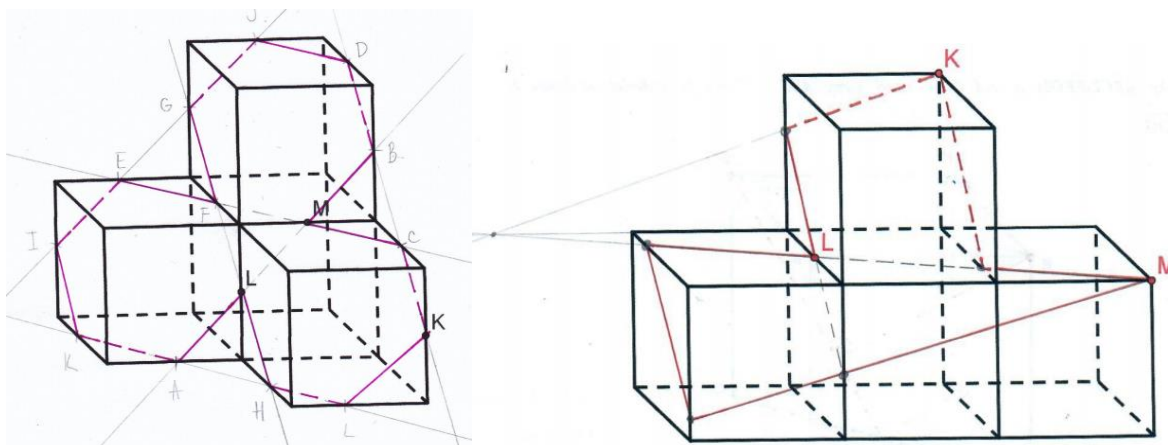
V analýze a-priori sme si tiež stanovili potrebné vstupné vedomosti a zručnosti žiakov vychádzajúce z tematických celkov, do ktorých by mohla byť problémová úloha zaradená. Nami vybratí žiaci disponovali potrebnými vedomosťami a znalosťami z tematického celku Znáročovanie trojrozmerného priestoru a myslíme si, že tieto uvedené vedomosti boli postačujúce vzhľadom na stanovený cieľ.

Očakávané reakcie žiakov sa nám potvrdili, ale nemuseli sme vzhľadom na tieto ich reakcie modifikovať zadanie problémovej úlohy.

V správnych, ale aj v nesprávnych stratégiách riešení, sa nevyskytlo iné ako nami predpokladané riešenie použité žiakmi v problémovej úlohe.

Vzhľadom na tieto stratégie sme náležite reagovali na všetky žiacke otázky, ktoré nám dávali počas riešenia úlohy. Pripravená analýza a-priori bola nápomocná a opodstatnená. Na obr. 2 uvádzame v súlade nami navrhnutými správными alebo nesprávnymi stratégiami riešenia žiacke riešenia problémovej úlohy.





Obr. 2: Riešenia problémovej úlohy

Vzhľadom na netradičné teleso, ktorému bolo potrebné zostrojiť rez rovinou, navrhli sme hodnotiť žiakov len formatívne, čo bolo, podľa nášho názoru, tiež vhodne zvolené. Žiaci sa v závere vyučovacej hodiny vyjadrili, že by privítali riešiť na vyučovacích hodinách viac podobných netypických úloh z geometrie.

### Záver

Naše zistenia naznačujú, že nami popísaná analýza je užitočným nástrojom. Učiteľ matematiky by mal vedieť riešiť nielen rôzne matematické úlohy, ale by tieto úlohy mal vhodne aj zaradiť do vyučovania a následne analyzovať v súlade s cieľmi vyučovacieho procesu. Zdieľame preto názor, že každý vybraný problém alebo úloha by mali byť dobre premyslené a naplánované práve učiteľom.

### Podakovanie

Tento článok bol vytvorený s podporou projektu KEGA č. 019-UKF – 4/2020 s názvom: *Podnetné didaktické postupy vo vyučovaní zobrazovacích metód v sekundárnom matematickom vzdelávaní s ohľadom na požiadavky spoločnosti a praxe.*

### Literatúra

Brousseau G. (1986). *Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée sauvage, Grenoble.

Brousseau G. (1990). *Le contrat didactique: le milieu*. Recherches en Didactique des Mathématiques, ed. La Pensée sauvage, Grenoble, 9(3), s. 309 – 336.

Brousseau G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, AH Dordrecht, The Netherlands.

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactique*. La Pensée sauvage édition, BP 141, Grenoble.

Brousseau, G. a Novotná, J. (2012). *Úvod do teorie didaktických situací v matematice*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée sauvage. Grenoble, deuxième édition augmentée.

Chevallard, Y. (1992). *Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 12(1), Grenoble, La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. a Steinbring, H. (1994). *Double analyse d'un épisode: cercle épistémologique et structuration du milieu*.

Novotná, J. a Hošpesová, A. (2013). Students and their teacher in a didactical situation. In *Student voice in mathematics classrooms around the world*, SensePublishers, Rotterdam. s. 133 – 142.

Novotná, J., Pelantová, A., Hrabáková, H. a Krátká, M. (2006). *Příprava a analýza didaktických situací*. Praha: Společnost učitelů matematiky.

Robert, A., Lattuati, M. a Penninckx, J. (1999). *L'enseignement des mathématiques au lycée: un point de vue didactique*. Ellipses.

Rumanová, L., Vallo, D. a Ďuriš, V. (2015). Some Spatial Competences and Formalism in Solutions of Stereometrical Tasks. In *Procedia Social and Behavioral Sciences*. Vol. 197, p. 2320-2324. ISSN 1877-0428.

Sierpinska, A. (2000). *The 'Theory of Didactic Situations': Lecture notes for a graduate course with samples of students' work*. Master in the Teaching of Mathematics, Concordia University.