Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 8, No. 1, p. 11-15
ISSN 2453-6083

Konštrukcia obdĺžnika daného obsahu vpísaného do pravouhlého trojuholníka v prostredí GeoGebra

Problem of Rectangle of Given Area Inscribed in Right-Angled Triangle in GeoGebra Environment

Dušan Vallo 1[a]

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences and Informatics, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, 949 01 Nitra, Slovakia*

Received March 28, 2022; received in revised form April 5, 2022; accepted April 10, 2022

Abstract

In this article, we focus on the solution to the geometric construction task of how to inscribe a rectangle of a given area into a right-angled triangle. We present three different solutions based on the algebraic-geometric method a graphical approach, too. The dynamical geometry software GeoGebra will be used to demonstrate the solutions.

Keywords: geometric construction task, GeoGebra, right-angled triangle, rectangle.

Classification: G10, G45, R20

Úvod

V tomto príspevku sa zameriame na riešenie jednej zaujímavej geometrickej úlohy. V prezentovanom riešení použijeme okrem dvoch štandardných metód – metódy zobrazení a algebraicko-geometrickej metódy, aj dynamicko-grafickú metódu. Práve v použití grafickej metódy aplikujeme znalosti o kužeľosečkách a samotnú konštrukciu zrealizujeme pomocou dynamického geometrického programu GeoGebra.

Konštrukčné úlohy riešené viacerými metódami

Riešenie konštrukčných geometrických úloh je tvorivá činnosť, ktorá napomáha rozvoju geometrickej predstavivosti, ponúka žiakovi spätnú väzbu a prispieva k jeho neformálnemu budovaniu a upevňovaniu vedomostí. Previazanosť rôznych častí geometrického učiva a rôznych prístupov k riešeniu úloh je dôvodom, že mnohokrát existujú viaceré riešenia jednej geometrickej úlohy. To umožňuje riešiteľovi (žiakovi, či jeho učiteľovi) analyzovať problém z viacerých strán.

Vhodný výber úlohy, ktorú možno úspešne vyriešiť viacerými postupmi, či metódami je dôležitý. Ako sme už naznačili, rôzne prístupy a metódy riešenia predstavujú obohatenie poznatkovej štruktúry žiaka/študenta.

V nadchádzajúcej časti článku predstavíme tri riešenia jednej takej úlohy.

[*]Corresponding author; email: dvallo@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2022.8.1.11-15

Problém

V publikácii (Šervatov, 1954) sa na str. 10 uvádza táto úloha:

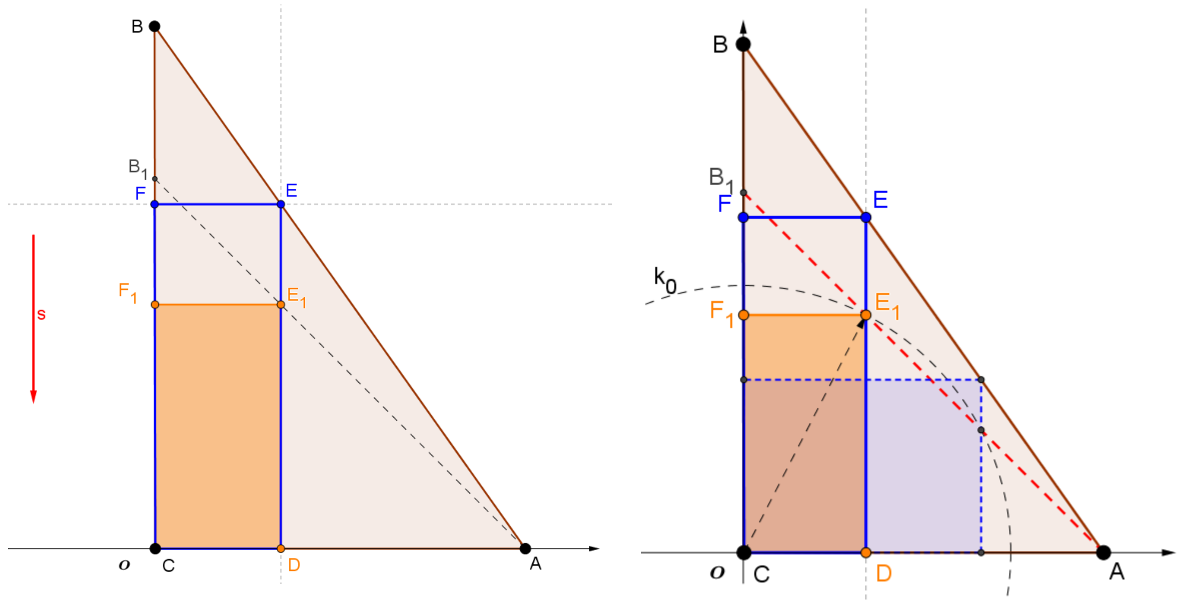
> *Do pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole C vpíšte obdĺžnik $CDEF$ s daným súčinom dĺžok strán $|CD| \cdot |DE| = S_0$.*

Riešenie 1 (algebraicko- geometrická metóda))

V uvedenej knižke autor ponúka elegantné riešenie s použitím osovej afinity $\mathcal{A}$. Uvedieme myšlienku riešenia a naznačíme konštrukciu pomocou softvéru.

Predpokladajme, že $b < a$. Os o osovej afinity $\mathcal{A}$ stotožníme s priamkou AC, smer afinity $\vec{s}$ bude kolmý na os o a koeficient $k = \frac{b}{a}$.

V afinite $\mathcal{A}$ sa bod B zobrazí do bodu B_1 tak, že trojuholník CAB_1 je rovnoramenný (body C, A sú samodružné body).



Obr. 1

Ak $CDEF$ je hľadaný obdĺžnik obsahu S_0, potom jeho obraz CDE_1F_1 v afinite $\mathcal{A}$ má obsah rovný kS_0. Trojuholníky $DAE_1, F_1E_1B_1$ sú rovnoramenné a pre obsahy útvarov na obr. 1 platí:

$$S_{CAB_1} = S_{CDE_1F_1} + S_{DAE_1} + S_{F_1E_1B_1} \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}b^2 = \frac{b}{a}S_0 + \frac{1}{2}|DE_1|^2 + \frac{1}{2}|E_1F_1|^2$$

$$\frac{1}{2}b^2 = \frac{b}{a}S_0 + \frac{1}{2}|CE_1|^2.$$

Odtiaľ odvodíme, že

$$|CE_1| = \sqrt{2\frac{b}{a}(S - S_0)}, \tag{2}$$

kde $S = \frac{ab}{2}$.

Bod E_1 zostrojíme ako prienik úsečky AB_1 sa kružnicou $k_0(C, |CE_1|)$.

Technická aplikácia – v programe GeoGebra určíme polomer kružnice k_0 výpočtom a zostrojíme pomocou nástroja *Kružnica s daným polomerom* (Kaenders, Schmidt, 2011).

Úloha má najviac dve riešenia a to v závislosti od prieniku kružnice k_0 a úsečky AB_1.

Riešenie 2

Umiestnime trojuholník do súradnicovej sústavy tak, aby $C[0,0]$, $A[b,0]$ a $B[0,a]$.

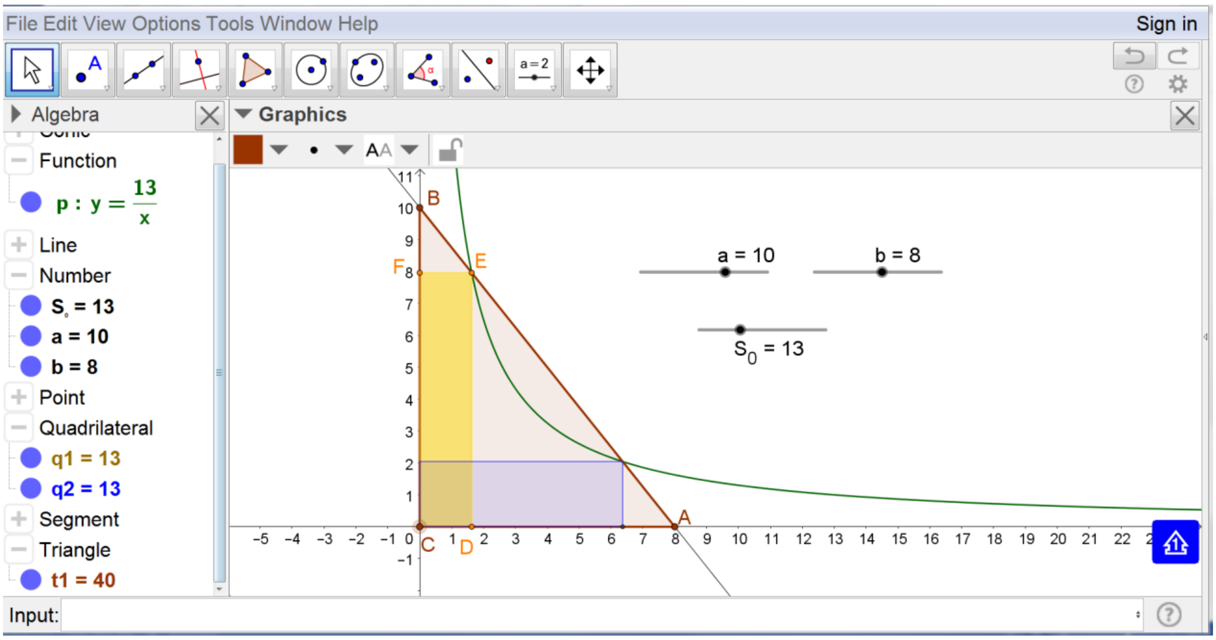
Ak hľadaný obdĺžnik $CDEF$ má daný obsah S_0, potom platí

$$S_0 = x_E \cdot y_E, \tag{3}$$

kde $E[x_E, y_E]$. Odtiaľ vyplýva, že bod E leží na hyperbole s rovnicou

$$y = \frac{S_0}{x} \tag{4}$$

a súčasne na priamke AB. Prienik vetvy hyperboly v 1. kvadrante s priamkou AB určuje teda polohu bodu E. Príslušnú vetvu hyperboly zostrojíme v programe GeoGebra. Z obr. 2 je zrejmé, že úloha má najviac dve riešenia v závislosti na prieniku vetvy hyperboly a priamky AB.



Obr. 2

Riešenie 3

Opäť umiestnime trojuholník do súradnicovej sústavy tak, aby $C[0,0]$, $A[b,0]$, $B[0,a]$. Ak bod $E[x_E, y_E]$ patrí priamke AB s rovnicou $ax + by - ab = 0$, potom platí

$$ax_E + by_E - ab = 0. \tag{5}$$

Z podmienky (3) zase vyplýva

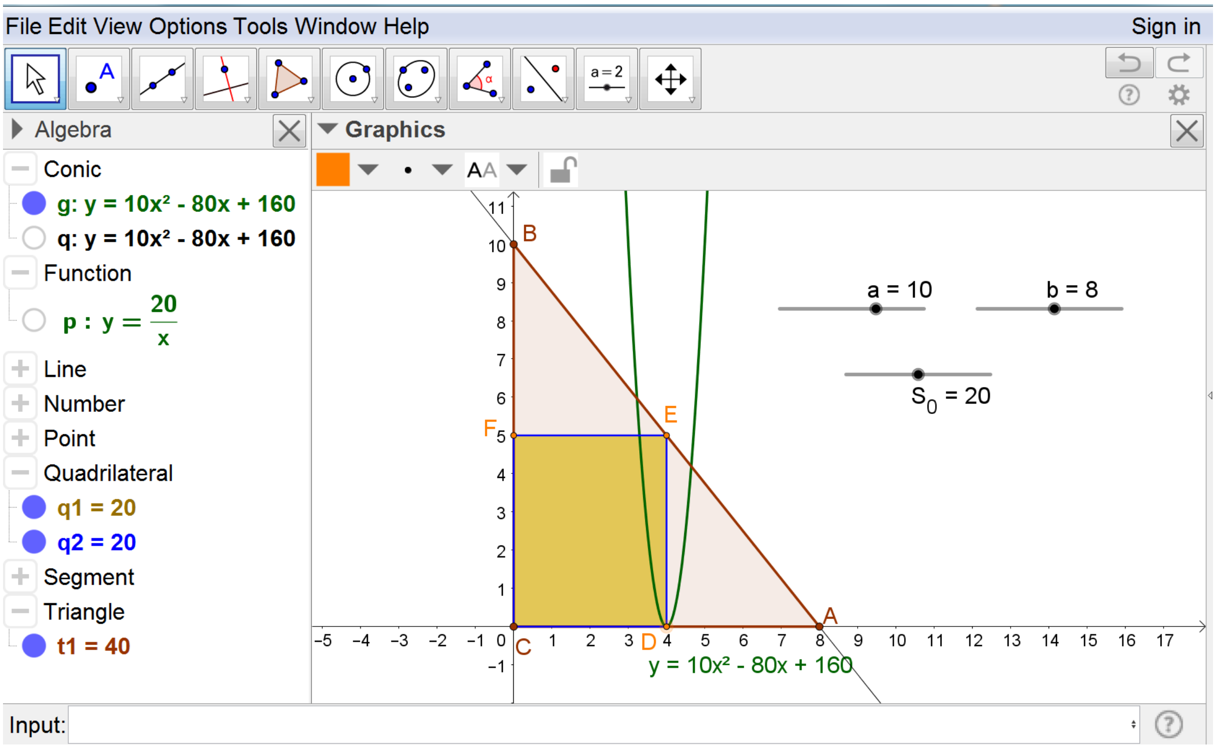
$$ax_E + b\frac{S_0}{x_E} - ab = 0,$$

$$ax_E^2 - abx_E + bS_0 = 0, \tag{6}$$

pre $x_E \neq 0$. Korene x_E kvadratickej rovnice (6) sú

$$x_{E_{1,2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\sqrt{ab} \pm \sqrt{ab - 4S_0}\right) \tag{7}$$

Korene $x_{E_{1,2}}$, ak existujú, sú priesečníky osi o_x s parabolou $ax^2 - abx + bS_0 = y$.



Obr. 3

Konštrukciu kužeľosečky môžeme zrealizovať v dynamickom prostredí GeoGebry. Krivku - parabolu so všeobecnou rovnicou $ax^2 - abx + bS_0 = 0$ vymodelujeme pomocou parametrov, kde konkrétne hodnoty pre a, b, S_0 si nastaví užívateľ podľa vlastného uváženia. Na obr. 3 je znázornený špeciálny prípad pre $a = 10, b = 8, S_0 = 20$, pre ktorý vypočítame dvojnásobný koreň $x_{E_{1,2}} = 4$.

Záver

Implementácia dynamických geometrických softvérov do výučby geometrie prináša pre žiaka, či študenta mnohé zjednodušenia týkajúce sa prevedenia konštrukcií, požiadaviek na kvalitu vedomostí, ako aj úrovne schopností tvorivo a interdisciplinárne aplikovať nadobudnuté vedomosti. Je zrejmé, že takáto implementácia otvára priestor pre riešenia neštandardných úloh. Súčasne sa naznačuje posun v tradičnom vnímaní konštrukcií a požiadaviek na obsahové a výkonové štandardy vyučovania matematiky a geometrie. Miera nasadenia dynamických geometrických programov a ich využitie záleží na viacerých faktoroch. Domnievame sa, že rozhodujúce sú tri:

a) schopnosti učiteľa pracovať so softvérom,

b) výber vhodných úloh na demonštráciu a precvičovanie,

c) dostupnosť prostriedkov IKT pre žiakov.

V článku je ukážka využitia konštrukcií kužeľosečiek, ktoré v minulosti patrili do obsahového štandardu učiva stredných škôl. Krivky sa znázorňovali len ako bodové konštrukcie (zostrojené pomocou pravítka a kružidla) a nebolo možné ich použiť spôsobom uvedeným v článku. Nakresliť „spojitú“ krivku a využiť ju ku riešeniu úlohy dokáže užívateľ len cez počítačovú grafiku. Prepojenosť na poznatky o kvadratickej funkcii, grafu nepriamej úmernosti, či kružnice sú na jednotlivých riešeniach evidentné. Veríme, že prezentované riešenia danej úlohy budú pre čitateľa inšpiratívne a povedú k vlastnej tvorbe a riešeniu nových, zaujímavých úloh.

Literatúra

Šervatov, V. G. (1954). Hyperbolické funkcie. Populárne prednášky z matematiky. Zväzok 16. Gostechizdat. (rusky)

Kaenders, R., & Schmidt, R. (2011). *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen*. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses aus dem GeoGebra Institut Köln/Bonn. Wiesbaden: Vieweg + Teubner (nemecky)