Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 7, No. 2, p. 27 – 33
ISSN 2453-6083

Využitie rovnováhy na páke pri odvodení niektorých súčtov

Utilization of Law of the Lever in Deriving Some Sums

Michaela Vargová[a]

[a*]*Department of Didactics in Mathematics, Physics and Informatics, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University Bratislava, Slovakia*

Received November 14, 2021; received in revised form November 16, 2021; accepted November 17, 2021

Abstract

The aim of the contribution is to point out, that the utilization the law of the lever represents visual approach to deriving some formulae. The presented approach could be useful in the teaching process, for example by using the guided discovery method.

Keywords: sum of squares formula, law of the lever, visualisation

Classification: 97D50 , 11L03

Úvod

V matematike je rigorózne zdôvodňovanie jednotlivých tvrdení založené na dedukcii. Formulácia jednotlivých hypotetických tvrdení je však veľmi často výsledkom induktívneho uvažovania, súvisiaceho s pozorovaním, experimentovaním, veľmi často doplneným vhodnou grafickou reprezentáciou. Podobne ako vhodná vizualizácia problému, tak aj jeho fyzikálna interpretácia môže niekedy poskytnúť intuitívny vhľad do situácie a viesť k objavu, resp. formulácii hypotézy.

Túto skutočnosť dokumentujú viaceré prípady, známe z histórie matematiky. Archimedes na základe princípu rovnoramenných váh odvodil napríklad vzťahy pre objem valca, kužeľa a gule (ktoré následne využitím exhaustačnej metódy a reductia ad absurdum aj rigorózne dokázal). Podobne, k významným matematickým objavom na základe fyzikálnych úvah dospeli napríklad aj Riemann, Hamilton, Lagrange, Jacobi, Poincaré (pozri napr. [1], [2], [3]) a mnohí ďalší.

V príspevku ukážeme, ako využitím princípu rovnováhy na páke možno jednoducho nájsť niektoré (konečné) súčty, napríklad

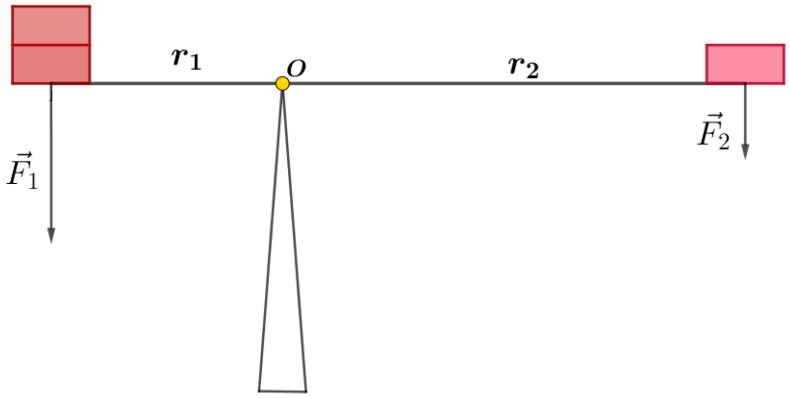
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2.$$

Súčty tvaru $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$, $k\in\mathbb{N}$ je možné odvodiť viacerými spôsobmi, pre $k=2$ je možné napríklad využiť rovnosť $\sum_{i=1}^{n}\left(i^3-(i-1)^3\right)=3\sum_{i=1}^{n}i^2-3\sum_{i=1}^{n}i+n$, prípadne pri odvodení môžu byť nápomocné rôzne grafické reprezentácie (napr. [4]) či kombinatorický prístup [5].

*Corresponding author: michaela.vargova@fmph.uniba.sk
DOI: 10.17846/AMN.2021.7.2.27-33

Princíp rovnováhy na páke

Princíp rovnováhy na páke hovorí, že jednotlivé momenty síl sa musia rovnať. To znamená, že (vektorovo) platí $\vec{M}_1 = \vec{M}_2$, resp. (pre náš prípad postačí aj skalárna rovnosť) $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$. Navyše, ak ide o tiažové sily (pozri obr. 1), predchádzajúcu rovnosť môžeme vyjadriť v tvare $m_1 g \cdot r_1 = m_2 g \cdot r_2$, odkiaľ máme $m_1 r_1 = m_2 r_2$.

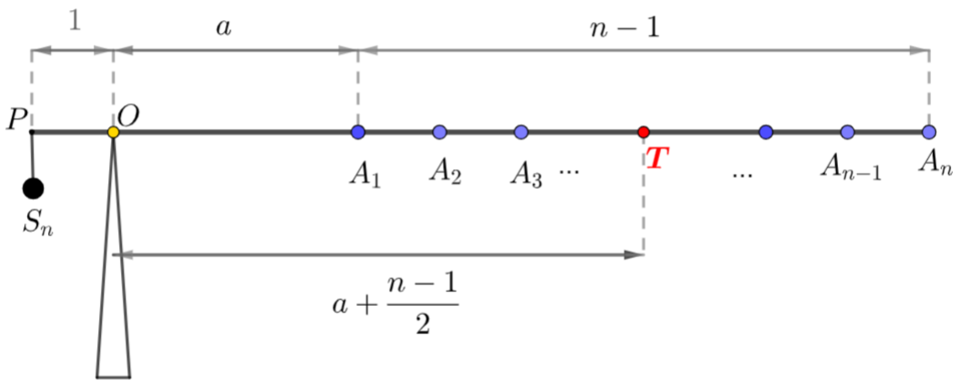


***Obr. 1**: Princíp rovnnováhy na páke*

Súčet prvých *n* členov aritmetickej postupnosti

Pomocou princípu rovnováhy na páke možno veľmi jednoducho dospieť k odvodeniu súčtu prvých *n* členov aritmetickej postupnosti.

Uvažujme aritmetickú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{a+(n-1)d\}_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom *a*, diferenciou *d*.



***Obr. 2**: Využitie princípu rovnnováhy na páke pri odvodení súčtu prvých n členov aritmetickej postupnosti*

Na pravú stranu páky (obr. 2) umiestnime *n* závaží A_1, A_2, ..., A_n s jednotkovými hmotnosťami tak, že vzdialenosť závažia A_1 od osi otáčania (bod *O*) je *a* a pre vzdialenosti medzi jednotlivými závažiami platí $|A_{i-1}A_i| = d$, $i = 2, 3, ..., n$.

Na ľavú stranu páky do bodu *P* umiestnime hmotnosť S_n, pričom $|OP| = 1$. Pre rovnováhu na páke musí platiť

$$|OP| \cdot S_n = |OA_1| \cdot 1 + |OA_2| \cdot 1 + ... + |OA_n| \cdot 1,$$

resp.,

$$1 \cdot S_n = a \cdot 1 + (a+d) \cdot 1 + (a+2d) \cdot 1 + \ldots + (a+(n-1)d) \cdot 1,$$

odkiaľ je zrejmé, že

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+(n-1)d).$$

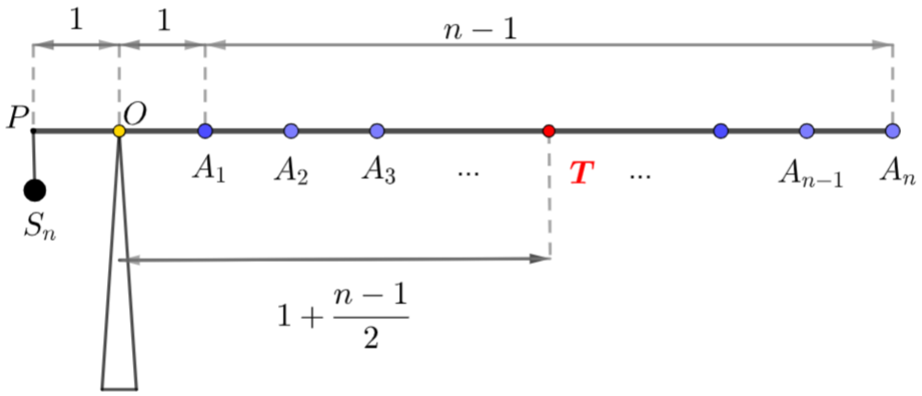
Páka zostane v rovnováhe aj v tom prípade, ak hmotnosť celej sústavy umiestnime do ťažiska *T*. Pretože závažia A_1, A_2, ..., A_n sú rozmiestnené rovnomerne, ťažisko *T* tejto sústavy predstavuje stred úsečky A_1A_n. Z uvedeného vyplýva, že platí rovnosť $|OP| \cdot S_n = |OT| \cdot n$, čiže

$$1 \cdot S_n = n \cdot \left(a + \frac{n-1}{2} \cdot d \right), \qquad \text{resp.} \qquad 1 \cdot S_n = \frac{n}{2}\big(a + (a+(n-1)d)\big).$$

Z predchádzajúcich úvah získavame

$$a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+(n-1)d) = \frac{n}{2}\big(a + (a+(n-1)d)\big), \text{ resp. } \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Poznámka. V prípade využitia tohto prístupu k odvedeniu niektorých identít na strednej škole by bolo zrejme vhodnejšie postupovať tak, že by sme na základe princípu rovnováhy na páke najskôr našli súčet prvých n prirodzených čísel (obr. 2) a až následne tento postup zovšeobecnili pre prípad aritmetickej postupnosti s kladnými členmi.



***Obr. 2**: Využitie princípu rovnnováhy na páke pri odvodený súčtu prvých n prirodzených čísel*

Súčet druhých mocnín prvých *n* prirodzených čísel

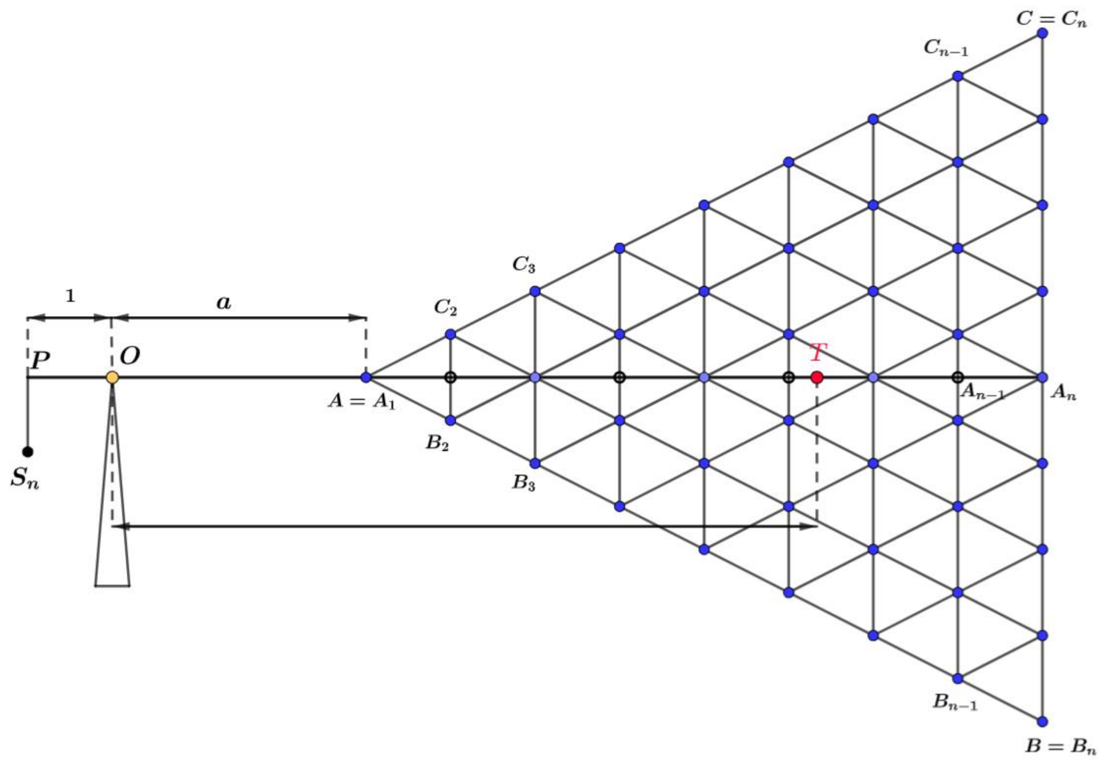
Použitím princípu rovnováhy na páke možno odvodiť aj rovnosť

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Do bodu *P* na ľavej strane páky (obr. 3) umiestnime znovu závažie s hmotnosťou S_n, na pravú stranu páky umiestnime závažia s jednotkovými hmotnosťami tak, ako je naznačené na obr. 3 (závažia predstavujú body, vyznačené modrou farbou).

Závažia uvažovanej sústavy sú mrežovými bodmi siete, kde

- bodmi B_i, $i = 2, \ldots, n-1$ (obr. 3) sú vedené rovnobežky so stranou *AC* trojuholníka *ABC,*
- bodmi C_i, $i = 2, \ldots, n-1$ zase rovnobežky so stranou *AB* trojuholníka *ABC*.



***Obr. 3**: Využitie princípu rovnnováhy na páke pri odvodení súčtu druhých mocnín prvých n prirodzených čísel*

Rozmiestnenie závaží zabezpečí, že hmotnosť sústavy je rozmiestnená rovnomerne vzhľadom ku každej ťažnici trojuholníka *ABC*, preto ťažisko *T* tejto sústavy splýva s ťažiskom uvažovaného trojuholníka. Podobne ako v predchádzajúcom prípade, využijeme informáciu o polohe ťažiska uvažovanej sústavy hmotných bodov v nasledujúcich úvahách.

Opäť predpokladajme, že $|OP| = 1$, $|OA_1| = a$ a $|A_{i-1}A_i| = 1$, $i = 2, 3, \dots, n$. Keďže závažia na pravej strane páky sú rovnaké, v každom bode A_i, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ je umiestnená hmotnosť *i* (obr. 3). Páka bude v rovnováhe, ak sa „momenty“, pôsobiace na oboch jej stranách budú rovnať, t.j.

$$|OP| \cdot S_n = |OA_1| \cdot 1 + |OA_2| \cdot 2 + \dots + |OA_n| \cdot n \text{, resp.,}$$

$$1 \cdot S_n = a \cdot 1 + (a+1) \cdot 2 + (a+2) \cdot 3 + \dots + (a + (n-1)) \cdot n .$$

Analogicky, páka zostane v rovnováhe aj vtedy, ak hmotnosť

$$m = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

celej sústavy uvažovaných závaží umiestnime do ťažiska *T*, čiže

$$|OP| \cdot S_n = |OT| \cdot m \text{, resp.,}$$

$$1 \cdot S_n = \left(a + \frac{2}{3}(n-1) \right) \cdot (1 + 2 + \dots + n) = \left(a + \frac{2}{3}(n-1) \right) \cdot \frac{n(n+1)}{2} .$$

Z toho vyplýva, že

$$a\cdot 1+(a+1)\cdot 2+(a+2)\cdot 3+\ldots+\big(a+(n-1)\big)\cdot n=\left(a+\frac{2}{3}(n-1)\right)\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ak položíme $a=1$, potom dostávame

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\left(1+\frac{2}{3}(n-1)\right)\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ak položíme $a=0$, tak na základe odvodenej rovnosti platí

$$1+1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n=\frac{2}{3}(n-1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Odvodenie vybranej goniometrickej identity

Použitím zmieneného princípu je možné odvodiť aj rovnosť

$$\sin\frac{\pi}{n}+2\sin\frac{2\pi}{n}+3\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n+1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}.$$

Predpokladajme (obr.2), že $|OP|=1$, $|OA_1|=1$ a $|A_{i-1}A_i|=1$, $i=2,3,\ldots,n$ a v bode *P* je aj v tomto prípade umiestnené závažie s hmotnosťou S_n.

Do bodov A_i, $i=1,2,3,\ldots,n$ umiestnime v danom poradí závažia s hmotnosťami

$$\sin\frac{i\pi}{n},\ i=1,2,\ldots,n-1.$$

Keďže pre $i=1,2,..,n-1$ platí

$$\sin\frac{i\pi}{n}=\sin\left(\pi-\frac{i\pi}{n}\right)=\sin\frac{(n-i)\pi}{n},$$

je hmotnosť závaží na pravej strane páky (obr.2) rozmiestnená rovnomerne a ťažisko *T* tejto sústavy splýva so stredom úsečky A_1A_n.

Z rovnovážnej polohy páky vyplýva platnosť rovnosti

$$1\cdot S_n=\sin\frac{\pi}{n}+2\sin\frac{2\pi}{n}+3\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Aj tentokrát využime skutočnosť, že páka zostane v rovnováhe aj vtedy, ak hmotnosť

$$m=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

celej sústavy uvažovaných závaží umiestnime do ťažiska *T*, čiže

$$|OP|\cdot S_n=|OT|\cdot m, \text{ resp.,}$$

$$1\cdot S_n=\left(1+\frac{n-1}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Na získanie hľadanej identity nám zostáva určiť hmotnosť *m*, kde

$$m=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(\frac{\pi}{n}+(n-2)\cdot\frac{\pi}{n}\right).$$

Z predchádzajúceho zápisu je zrejmé, že argumenty funkcie sínus predstavujú prvých $(n-1)$ členov aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\equiv\{a+(n-1)d\}_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom $a=\frac{\pi}{n}$ a diferenciou $d=\frac{\pi}{n}$.

Poznámka. Hodnotu m môžeme nájsť postupom, ktorý pre lepšiu prehľadnosť uvedieme všeobecnejšie. Predpokladajme, že

$$H=\sin a+\sin(a+d)+\sin(a+2\cdot d)+\ldots+\sin(a+(n-1)d).$$

Vynásobením uvedenej rovnosti výrazom $2\sin\frac{d}{2}$ a využitím identity $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ môžeme túto rovnosť napísať v tvare

$$2H\sin\frac{d}{2}=\left(\cos\left(a-\frac{d}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{d}{2}\right)\right)+\left(\cos\left(a+\frac{d}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{3}{2}d\right)\right)+\ldots+\left(\cos\left(a+nd-\frac{3}{2}d\right)-\cos\left(a+nd-\frac{d}{2}\right)\right),$$

odkiaľ

$$2H\sin\frac{d}{2}=\cos\left(a-\frac{d}{2}\right)-\cos\left(a+nd-\frac{d}{2}\right),\text{ resp. }\quad 2H\sin\frac{d}{2}=2\sin\left(a+(n-1)\frac{d}{2}\right)\sin\frac{nd}{2}.$$

Následne pre *H* dostávame

$$H=\frac{2\sin\left(a+(n-1)\frac{d}{2}\right)\sin\frac{nd}{2}}{2\sin\frac{d}{2}}.$$

Využitím tohto vzťahu pre hmotnosť *m* uvažovanej sústavy $(n-1)$ bodov dostávame

$$m=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{n}+(n-2)\frac{\frac{\pi}{n}}{2}\right)\sin\frac{(n-1)\frac{\pi}{n}}{2}}{2\sin\frac{\frac{\pi}{n}}{2}}=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}.$$

Využitím princípu rovnováhy na páke sme tak dospeli k rovnosti

$$\sin\frac{\pi}{n}+2\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\left(1+\frac{n-1}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

ktorú môžeme vyjadriť v tvare

$$1\cdot S_n=\sin\frac{\pi}{n}+2\sin\frac{2\pi}{n}+3\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n+1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}.$$

Záver

V príspevku sme ukázali jeden z možných názorných prístupov umožňujúcich formuláciu hypotéz o platnosti niektorých identít, s ktorými sa žiaci stredných škôl, či univerzitní študenti stretávajú často už v „hotovej“, odvodenej forme (neraz ako súčasť zadania dôkazových úloh, využívajúcich matematickú indukciu a so súčtami tvaru $1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$, $k \in \mathbb{N}$ pri výpočte Riemannovho integrálu pomocou definície).

Prezentovaný prístup k odvodeniu niektorých identít by mohol byť využiteľný vo vyučovacom procese, napríklad použitím metódy riadeného objavovania. Žiakov je však potrebné upozorniť, že pri uvedenom prístupe sme využívali úsudky induktívneho charakteru ako i fyzikálnu argumentáciu, takže formulované závery je treba deduktívne dokázať.

Poďakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou projektu KEGA 014UK-4/2020.

Literatúra

1. Levi, M. 2009. The Mathematical Mechanics. Princeton: Princeton University Press, 2009. 197 p. ISBN 978 – 0-691-14020-9.
2. Edwards, C. H. 1979. The Historical Development of the Calculus. New York: Springer-Verlag, 1979. 346 p. ISBN 3 – 540 – 94313 – 7
3. Kline, M.: Mathematical thought from ancient to modern times (Volume 1). Oxford University Press, 1972. 412 s. ISBN 0-19-50135-7
4. Vargová, M. 2020. Ako súvisí súčet $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ s multiplikatívnou tabuľkou? In. Dva dni s didaktikou matematiky 2020. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, 2020. ISBN 978-80-8147-095-0. 149 -154.
5. Shirali S. 2015. Counting Your Way to the Sum of Squares Formula. In Resonance – Journal of Science Education. 2015, Vol. 20, No. 10, ISSN 0973-712X [13.11. 2021]. dostupné: https://www.ias.ac.in/describe/article/reso/020/10/0893-0902