

Námety k vyučovaniu geometrie v sekundárnom matematickom vzdelávaní s akcentom na riadené bádanie

Suggestions for Teaching Geometry at Secondary Mathematics Education with an Emphasis for Guided Inquiry

Lucia Rumanová^{a*} – Júlia Záhorská^a

^{a*}*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received October 21, 2021; received in revised form October 28, 2021; accepted October 28, 2021

Abstract

In this paper, we focused on teaching geometry, as this part of mathematics causes basic and secondary school students difficulties and is also one of the less popular ones. We have designed specific didactic problems, including innovative methodologies from the perspective of the teacher which uses inquiry-based learning, while we have chosen guided inquiry. In this paper, we present the possibility of how to innovate teaching using an inquiry approach at secondary mathematics education. We implemented the mentioned problems into the teaching process at primary and secondary school and subsequently, we presented pedagogical reflection as an important part of the educational work of mathematics teachers.

Keywords: guided inquiry, educational process, problems for pupils, reflections of teachers, GeoGebra.

Classification: 97C80

Úvod

Vyučovanie matematiky, obzvlášť geometrie, je významné z pohľadu implementovania vzdelávania s bádateľským charakterom, ktoré žiakom umožňuje lepšie si uvedomiť užitočnosť nadobudnutých prírodovedných poznatkov, ako aj možnosti ich následnej aplikácie do bežného života.

Bádateľsky orientované vyučovanie má množstvo výhod, spomenieme niektoré z pohľadu užitočnosti pre žiaka. Jednou z výhod je napríklad vytváranie vhodných podmienok pre aktivitu žiakov, najmä tých, ktorí nemajú istotu v riešení problematiky. Zároveň podnecuje žiakov k tvoreniu otázok, formulovaniu hypotéz, plánovaniu postupov, hľadaniu a triedeniu informácií, vyhodnocovaniu výsledkov a formulovaniu vlastných záverov. Žiaci si ľahšie zapamätajú bádanim získané poznatky a skôr porozumejú problematike. Prínosom je tiež, že žiaci získavajú skúsenosti samostatnou prácou, alebo spoločnou prácou v skupine so spolužiakmi, takže prínos jedného žiaka je prínosom pre celú skupinu a zároveň všetci žiaci majú svoj podiel na tejto práci. Význam vidíme aj v nadobudnutých skúsenostiach žiakov s riešením otvorených problémov a často aj v podpore medzipredmetových vzťahov (viď Slepáková, Kimáková, 2015).

*Corresponding author: lrumanova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2021.7.2.1-7

V článku uvidíme ukážky konkrétnych úloh z geometrie, v ktorých je možné použiť riadené bádanie pripravené učiteľom. Úlohy boli implementované do vyučovania matematiky na základnej a strednej škole v rámci nami vytvorených inovatívnych metodík v rámci projektu IT Akadémia. Učitelia ich využívali vo svojom vyučovacom procese dva roky, čo nám umožňuje uviesť aj reflexiu učiteľov matematiky z rôznych škôl na Slovenku na uvedené úlohy.

Riadené bádanie vo vyučovacom procese

Kireš a kol. (2016) vnímajú bádanie ako pedagogický prístup k vzdelávaniu, ktorý realizuje učiteľ. Z pohľadu žiaka ide o to, aby sa jeho aktívne poznávanie stalo spôsobom jeho učenia, premýšľania, získavania vedomostí a zručností. Znamená to, že učiteľ neodovzdáva žiakom učivo priamo. K poznatkom žiaci prichádzajú postupným a hlavne vlastným bádáním, ktoré je sledované učiteľom.

Cieľom takto zadaných úloh a iných aktivít je vyvolať u žiaka snahu osvojiť si kritické myslenie, rovnako aj prístupy alebo metódy, ktoré sú zamerané na riešenie problémových úloh. Učiteľ týmto prístupom u žiakov podnieti aktívne skúmanie a získavanie poznatkov.

Pod pojmom riadené bádanie Banchi a Bell (2008) rozumejú bádanie v závislosti od podielu zapojenia učiteľa a žiakov do tohto procesu na vyučovacej hodine, kde postup a jeho výsledok je bez prítomnosti učiteľa. To znamená, že učiteľ zadá žiakom problémovú úlohu, resp. otázku, pričom žiaci pripravujú postup riešenia daného problému, ktorý sami navrhnu, vrátane samotnej realizácie uvedeného postupu.

Bádateľské aktivity môžu byť rôzneho charakteru, napríklad vo forme experimentovania alebo modelovania problému. Z pohľadu učiteľa má bádateľsky orientované vyučovanie vysoké nároky vzhľadom na jeho efektívne uplatnenie vo vyučovacom procese, ktoré sa týkajú aj jeho prípravy a priebehu. Pre učiteľa je táto príprava neľahká a časovo náročná, mal by sa však v procese bádania dobre orientovať.

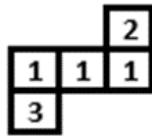
Aktivita „Stavby z kociek“ pre žiakov základnej školy

Stavby z kociek sú učivom 1. stupňa ZŠ podľa inovovaného ŠVP (2014) na nasledovnej úrovni: „Žiak na konci 4. ročníka základnej školy dokáže vytvoriť z kociek rôzne stavby podľa plánu, vie vytvoriť a slovné opísať vlastnú stavbu z kociek a nakresliť plán stavby z kociek.“

V nadväznosti na 1. stupeň ZŠ pri opakovaní a prehľbovaní učiva o stavbách z kociek v 5. ročníku považujeme za vhodné využitie bádateľského prístupu pri tvorbe plánu telesa z kociek. Pozorovaním stavieb a telies z kociek, ako aj kreslením náčrtov postavených stavieb z rôznych pohľadov predpokladáme, že žiaci objavia najvhodnejší zápis telesa z kociek pomocou úplného plánu.

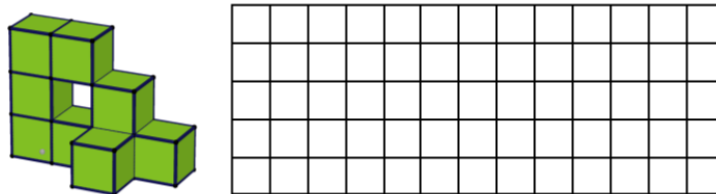
Uvidíme k danej problematike ukážky úloh, pričom učiteľ formuluje problém, v ktorom žiaci majú zistiť rozdiel medzi stavbou a telesom z kociek a následne nakresliť plán telesa z kociek. Riadené bádanie spočíva v tom, že žiaci navrhnu postup na nakreslenie plánu telesa z kociek. Využijú kreslenie telies z rôznych pohľadov s očakávaním výsledkom, t. j. žiaci navrhnu tvorbu plánu kockového telesa.

Úloha 1. Nakreslite do pripravenej štvorcovej siete všetky pohľady na stavbu z kociek (Obr. 1).



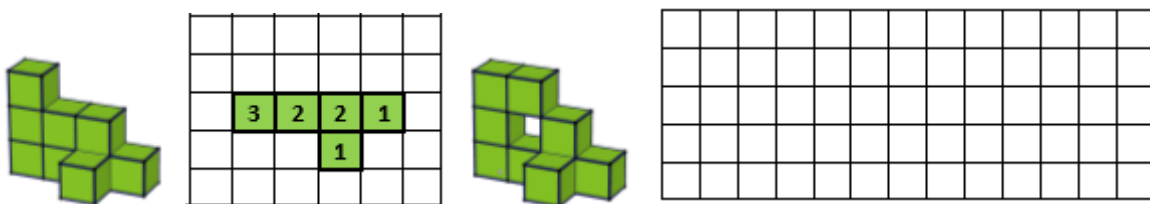
Obr. 1: Plán stavby z kociek

Úloha 2. Postavte stavbu podľa Obr.2 (žadana kocka vzadu nechýba ani nevyčnieva). Ak máte problém, poraďte sa so spolužiakmi. Môžete použiť pripravené pomôcky. Koľko kociek tvorí túto stavbu? Nakreslite plán stavby na obrázku.



Obr. 2: Stavba z kociek k Úlohe 2.

Úloha 3. Porovnajzte plán stavby z kociek (Obr. 3) s plánom, ktorý ste vytvorili v úlohe 2. Navrhните do pripravenej štvorcovej siete plán, ktorý odliši tieto dve stavby.



Obr. 3: Stavby z kociek a ich plány

Postrehy a reflexia učiteľov matematiky ZŠ k navrhnutým úlohám

Nami navrhnuté úlohy, ktoré boli spracované a použité vo forme inovatívnej metodiky, riešilo 46 učiteľov so svojimi žiakmi a to na rôznych základných školách na Slovensku. V dotazníku projektu IT Akadémie uviedli svoje skúsenosti a postrehy. Vyberáme niektoré z nich:

- „ ... v prvej úlohe mali viacerí žiaci problém s pohľadom zdola ... “,
- „ ... žiaci skúmali rozdiel medzi stavbou a telesom a potrebovali dlhšie diskutovať o probléme, ako zapísať do plánu chýbajúcu kocku. Nakoniec bolo nutné spoločne prediskutovať rozdiel medzi stavbou z kociek a kockovým telesom a zhrnúť, čo sme sa naučili. ... “,
- „ ... pri úlohe číslo 3 žiaci premýšľali nad zakódovaním telesa z kociek – po tom, ako zistili, že to musí byť iné ako pri stavbe mali nápad, aby každé poschodie dostalo číslo 0 alebo 1 podľa toho, či sa na danom poschodí kocka nachádza, alebo nie. Riešenie to bolo síce správne, ale ukázali sme si, že by to bolo príliš komplikované pri 10 a viacposchodových úlohách. ... “,
- „ ... mnohí žiaci nerozlišovali pojmy plán a pohľad ... “,
- „ ... my sme sa trochu zdržali, nakoľko žiakov táto metodika veľmi bavila. ... “,

- „ ... dominantne som využívala riadené bádanie. Pri skupinovej práci boli žiaci otvorenejší, skôr povedali svoj názor, keďže mali možnosť sa poradiť. “,
- „ ... bádateľský prístup bol asi najviac rozvíjaný v úlohe č. 3 – tu žiaci navrhovali viac riešení, pri diskusii si uvedomovali, prečo dané riešenie nie je možné použiť vždy, príp. vôbec. ... “.

Aktivita „Rezy telies“ pre žiakov strednej školy

Žiaci menej obľubujú riešenie stereometrických úloh, pretože majú väčšinou problém s priestorovou predstavivosťou. Priestorovú predstavivosť možno rozvíjať cielenou výučbou, kam patrí aj riešenie úloh na zostrojovanie rezov telies danou rovinou (Šedivý a kol., 2007). Pri takýchto úlohách je nutné nechať žiakov vykonať aspoň niekoľko krokov samostatne a korigovať prípadné chyby v algoritmickej postupnosti, či v rýsovaní.

Žiaduce je, ak sa dané riešenie úlohy vhodne vizualizuje, čím sa aspoň čiastočne eliminuje nedostatok priestorovej predstavivosti žiakov.

Odporúčame dynamický program GeoGebra 3D modul, ktorý umožňuje učiteľovi jednoducho, a pritom názorne zostrojovať rezy telies rovinou. Program taktiež ponúka možnosť rotovať zobrazené telesá a vidieť rez z rôznych pohľadov (Vallo, Rumanová, Ďuriš, 2015).

Predstavíme návrh, ako môže učiteľ využiť riadené bádanie na skúmanie vzťahov medzi rôznymi lineárnymi útvarmi v priestore a následne ho aplikovať pri zostrojení rezu hranatých telies rovinou.

Žiaci často pristupujú k riešeniu tohto typu úloh algoritmicke. Význam zostrojovania rezov telies rovinou sa žiakom priblíži prostredníctvom úloh, ktoré budú realizovať samotní žiaci, čím získajú na vlastné otázky a nejasnosti aj odpovede.

Najskôr učiteľ so žiakmi analyzuje možnosti riešenia konkrétnych úloh a následne aplikuje uvedené modelové postupy v riešení ďalších problémových úloh. Učiteľ môže poskytnúť každému žiakovi uvedené úlohy vo forme pracovného listu, ktorý si vopred pripraví. Žiak môže riešiť úlohy samostatne alebo spoločne so spolužiakmi, pričom je pracovný postup žiakom simultánne prezentovaný.

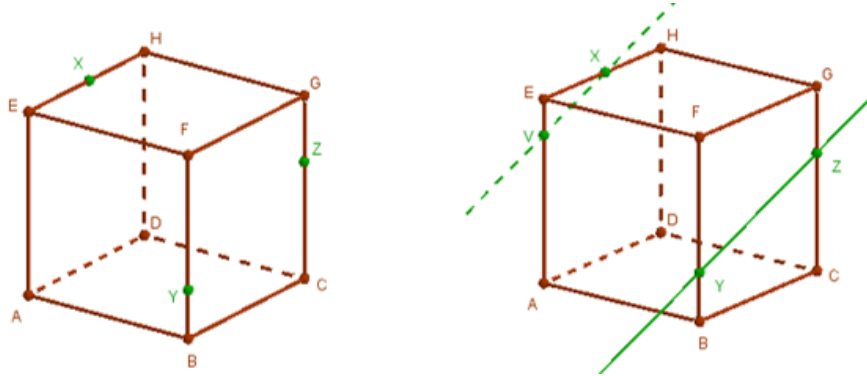
Po prečítaní zadania každej úlohy nechá učiteľ žiakom priestor, aby si samostatne premysleli jej riešenie. Ďalej vedie diskusiu k daným otázkam v rámci jednotlivých úloh. Žiaci si vytvárajú na papieri potrebné náčrty telies aj s riešením. Práca s uvedeným pracovným listom, vrátane spoločnej diskusie, by mala trvať cca. 10 min. Na záver riadeného bádania učiteľ spolu so žiakmi zhrnie objavené zistenia a terminologicky upresní, čo je rez hranatého telesa rovinou.

Pripravili sme pre učiteľov taktiež interaktívne konštrukcie v programe GeoGebra 3D modul. Výhodou je, že učiteľ môže pracovať s programom a žiaci si na papieri črtajú dané riešenia. Učiteľ prečíta žiakom zadanie každej úlohy. Predstaví model telesa v programe GeoGebra, naznačí riešenie úlohy a spoločne so žiakmi o riešení úlohy diskutujú.

K jednotlivým stratégiám riešenia sme zaviedli aj ich výstižnejšie pomenovanie (princíp 1 až princíp 4), ktoré je neodborné, avšak je pre žiakov blízke a súvisí s konkrétnym princípom najčastejšie používaným pri zostrojení rezu telesa rovinou v školskej praxi. Náprava správneho vyjadrovania u žiakov závisí od učiteľa a odborného jazyka, ktorý používa sám učiteľ. V úvodných úlohách je cieľom sprostredkovať učivo, preto odporúčame sa viac

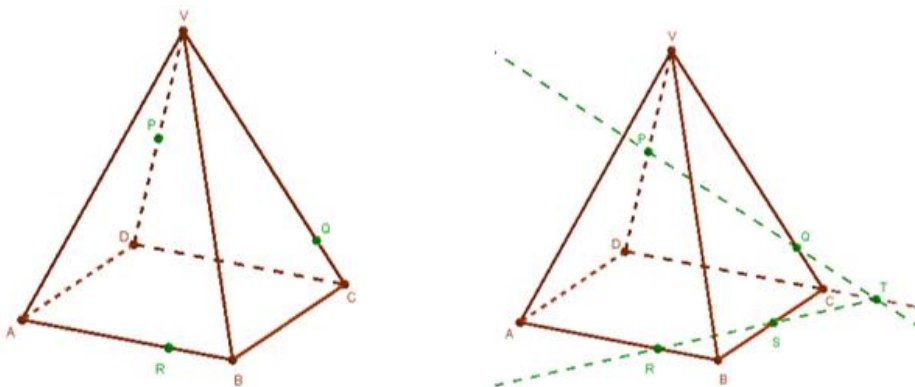
sústrediť na riešenie daných úloh, než sklízuť k formalizmu. Nami uvádzané aktivity sú súčasťou publikácie Lukáč a kol. (2020).

Úloha 1. Daná je kocka $ABCDEFGH$ a rovina XYZ (konštrukcia v programe GeoGebra s označením princíp 1 a 2). Využijeme v danom riešení princíp 1 „spájanie bodov“ a princíp 2 „rovnobežnosť“ (teleso je uvedené na obr. 4).



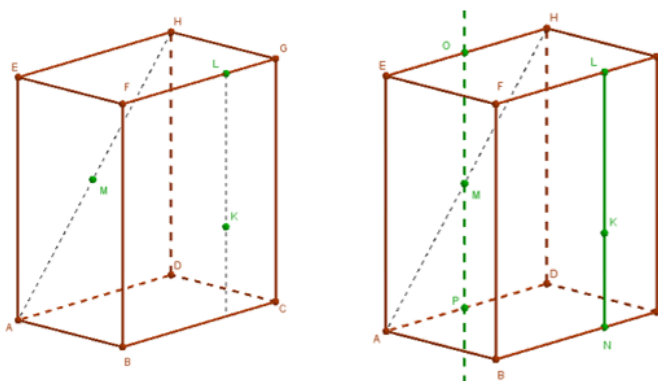
Obr. 4: Využitie princípu 1 a princípu 2 v kocke

Úloha 2. Daný je ihlan $ABCDV$ a rovina PQR (konštrukcia v programe GeoGebra s označením princíp 3). Využijeme v danom riešení princíp 3 „predlžovanie hrán“ (teleso je uvedené na obr. 5).



Obr. 5: Využitie princípu 3 v pravidelnom štvorbokom ihlane

Úloha 3. Daný je kváder $ABCDEFGH$ a rovina KLM (konštrukcia v programe GeoGebra s označením princíp 4). Využijeme v danom riešení princíp 4 „spájanie bodov v nekonečne“ (teleso je uvedené na obr. 6).



Obr. 6: Využitie princípu 4 v kvádri

Postrehy a reflexia učiteľov matematiky ZŠ k navrhnutým úlohám

Vo vyučovacom procese využilo uvedené úlohy 11 učiteľov matematiky z rôznych stredných škôl na Slovensku, ktorí v dotazníku projektu IT Akadémie k daným úlohám uviedli:

- „ ... táto metodika veľmi dobre objasňuje stereometrické vzťahy a vzájomnú polohu útvarov. Obsahuje pracovný list, dynamické konštrukcie pre bádateľskú aktivitu. Priložené súbory v GeoGebre žiakom veľmi pomáhajú lepšie a názornejšie pochopiť danú problematiku. Tento prístup sa ukázal ako pomerne efektívny, takže žiaci nemali problém riešiť aj problémovú úlohu ... “,
- „ ... metodiku by som odporúčala prepojiť so životom, uviesť nejaký konkrétny praktický príklad vo forme animácie či videa – zadanie a následne prehrať riešenie ... “,
- „ ... metodiku som realizovala ako opakovanie rezov telies v 4. ročníku pre tých, ktorí pôjdu maturovať. Možno aj preto sa mi podarilo metodiku zrealizovať za jednu hodinu. Inak by to asi bol problém pre žiakov v klasickej triede ... “,
- „ ... po pripomenutí viet potrebných pri rezoch telies im to celok išlo. Bolo potrebné zdôrazniť, že v ihlane a trojbokom hranole nemôžu využiť rovnobežnosť, tam musia predlžovať hrany. Úplne nové pre nich bolo kockové teleso, ale celkom dobre si s tým poradili, po mojej rade, že môžu priamku KL predĺžiť a premyslieť, kde to bude rezať tú kocku položenú na vrchu. Potrebovali si uvedomiť, že tie zadné steny kociek sú v jednej rovine. U viacerých sa opakoval problém, že si neuvedomili, že rez musia dorobiť na vrchnej podstave kocky vľavo dole a na bočnej stene kocky vpravo hore ... “,
- „ ... pomocné materiály sú vhodne pripravené, žiakov zaujali (aj učiteľa). Z mojej strany kladne hodnotím pripravené telesá na pracovných listoch aj s bodmi rezu, žiaci sa nezdržiajú rysovaním, roviny rezov majú rovnaké tvary – ľahká kontrola pre učiteľa ... “,
- „ ... metodika je výborne spracovaná, pre priemerné triedy je nutné niektoré úlohy vynechať alebo zjednodušiť, aby sa zvládla na jednej vyučovacej hodine“

Záver

Realizácia bádateľsky orientovaného vyučovania v praxi je časovo veľmi náročná. Okrem konkrétnej prípravy učiteľa na vyučovanie si vyžaduje výbornú znalosť teoretických východísk. Pri uplatnení bádateľsky orientovaného vyučovania je potrebné oboznámiť sa so zásadami realizácie jednotlivých úrovní bádania a zároveň vedieť analyzovať bádateľské vzdelávacie aktivity.

Rovnako dôležité je nadobúdanie skúseností z jeho uvedenia do školskej praxe (Kireš a kol., 2016). S bádateľsky orientovaným vyučovaním a riadeným bádáním sa úzko spája aj častejšie uplatňovanie formatívneho hodnotenia práce žiakov učiteľom, ako aj sebahodnotenia žiaka. Napriek náročnosti bádateľsky orientovaného vyučovania na pracovnú záťaž učiteľa, z dôvodov a skúseností, ktoré sne uviedli v článku, považujeme takto realizované vyučovanie v súčasných školských podmienkach za veľmi významný prínos do praxe.

PodĎakovanie

Článok vznikol v rámci projektu KEGA 019UKF-4/2020 s názvom „Podnetné didaktické postupy vo vyučovaní zobrazovacích metód v sekundárnom matematickom vzdelávaní s ohľadom na požiadavky spoločnosti a praxe“.

Literatúra

Banchi, H., Bell, R. (2008). The many levels of inquiry. In *Science and children*. 46, 2, 26-29.

Kireš, M., Ješková, Z., Ganajová, M., Kimáková, K. (2016). *Bádateľské aktivity v prírodovednom vzdelávaní*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. 128 s.

Lukáč, S. a kol. (2020). *Zbierka inovatívnych metodík z matematiky pre stredné školy*. 1. vydanie. Bratislava: CVTI SR. 510 s.

Slepáková, I., Kimáková, K. (2015). Hodnotenie zručností v bádateľsky orientovanej výučbe biológie. In *Scientia in educatione*. 6, 1, 133 – 143.

Šedivý, O., Pavlovičová, G., Rumanová, L., Vallo, D. (2007). *Stereometria: umenie vidieť a predstavovať si priestor*. Nitra: FPV UKF. 106 s.

ŠPÚ. (2014). *Inovovaný ŠVP pre 1. stupeň základnej školy – Matematika práca s informáciami*. Dostupné na https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf

Vallo, D., Rumanová, L., Ďuriš, V. (2015). Spatial Imagination Development through Planar Section of Cube Buildings in Educational Process. In *Procedia-Social and Behavioral Sciences*. 191, 2146 – 2151.