Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 7, No. 1, p. 21-33
ISSN 2453-6083

Analýza riešení geometrických úloh a geometrického myslenia žiakov pri ukončení základnej školy

Analysis of Geometric Tasks Solutions and Geometric Thinking of Pupils at the End of Elementary School

Veronika Bočková [a*] – Gabriela Pavlovičová [a]

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received March 30, 2021; received in revised form March 31, 2021; accepted April 6, 2021

Abstract

Geometry is one of the most important topics in the school mathematics. According to our experiences, elementary school pupils have difficulties dealing with various geometric tasks. That is the reason, why is very important to pay attention to the development of mathematics competencies in geometry and geometric thinking. In this article we focused on three geometric tasks, which solutions require a level of reflection of mathematics competencies. The research sample consists of 75 ninth graders. The data was collected in June 2020. The aim of the research was to analyze the pupils´ solutions of geometric tasks and to find the connections between these solutions and the level of geometric thinking according to van Hiele´s theory. Qualitative analysis was done in the research evaluation. The statistical implicative analysis methods were used for deeper analysis of dependencies and relationships between stated didactical variables.

Keywords: geometric tasks, geometric thinking, mathematics competencies in geometry, solution analysis, statistical implicative analysis

Classification: B10, D70, G40

Úvod

Geometria je dôležitou súčasťou matematického vzdelávania. Podporuje rozvoj priestorovej predstavivosti, deduktívneho a logického myslenia, je základom rôznych matematických oblastí a jej poznatky môžu žiaci využiť v každodennom živote. Mnohé domáce i zahraničné výskumy potvrdzujú, že žiaci majú problémy s porozumením učivu geometrie a disponujú len formálnymi vedomosťami. S týmto problémom sa stretávajú aj žiaci na Slovensku, čo vyplýva aj z výsledkov národných testovaní v deviatom ročníku základnej školy (Testovanie 9). Problémy s úspešnosťou v riešení geometrických úloh môžu byť spôsobené nízkou úrovňou geometrického myslenia a matematických kompetencií. Z daného dôvodu je nevyhnutné také vzdelávanie žiakov, ktoré je založené na teórii geometrického myslenia a rozvoja matematických kompetencií.

[*] Corresponding author: veronika.bockova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2021.7.1.21-33

Teoretické východiská

Geometrické myslenie zohráva dôležitú úlohu v rozvoji matematického myslenia. Ako uvádza NCTM (2000), geometria poskytuje aspekt matematického myslenia, ktoré je odlišné, avšak stále spojené so svetom čísiel. Pod geometrickým myslením rozumieme najmä schopnosť žiakov používať geometrické pojmy vo vyučovaní matematiky, ale i v rôznych oblastiach každodenného života (Hardianti, Priatna, 2017). Jednou z najdôležitejších štúdií zaoberajúcich sa geometrickým myslením je už niekoľko desaťročí van Hieleho teória, ktorej tvorcami sú manželia Pierre van Hiele a Dina van Hiele – Geldof. Teória určuje päť úrovní geometrického myslenia (vizualizácia, analýza, abstrakcia, dedukcia, axiomatizácia), vzdelávací model podporujúci učenie geometrie a pomoc pri postupe cez jednotlivé úrovne myslenia v geometrii. Jednotlivé úrovne geometrického myslenia môžeme charakterizovať nasledovne:

1. **úroveň – vizualizácia**: Žiaci dokážu pomenovať a rozoznať geometrické útvary na základe ich celostného vzhľadu, vlastnosti útvarov si ešte neuvedomujú.
2. **úroveň – analýza**: Žiaci poznajú vlastnosti geometrických útvarov, avšak vzťahy medzi jednotlivými vlastnosťami nevnímajú.
3. **úroveň – abstrakcia**: Žiaci si uvedomujú vzťahy medzi vlastnosťami geometrických útvarov a vedia formulovať abstraktné definície, geometrickým dôkazom ešte nerozumejú.
4. **úroveň – dedukcia**: Žiaci si uvedomujú potrebu logického systému geometrie, rozumejú postaveniu axióm a definícií. Žiaci dokážu realizovať jednoduché dôkazy na stredoškolskej úrovni.
5. **úroveň – axiomatizácia**: Žiaci dokážu porovnať axiomatické systémy a rozumejú formálnym aspektom dedukcie (Usinskin, 1982; van Hiele, 1986).

S rozvojom geometrického myslenia súvisí aj rozvoj matematických kompetencií v oblasti geometrie. Rozvíjanie kompetencií žiakov a študentov je v súčasnej dobe aktuálnou témou na všetkých predmetoch, stupňoch a typoch škôl, pretože cieľom vzdelávania nie je len získať požadované vedomosti a zručnosti, ale taktiež rozvíjať kompetencie žiakov. Všeobecne pod pojmom kompetencia rozumieme prienik osvojených vedomostí, schopností a zručností, postojov človeka, jeho hodnotovej orientácie a motívov k činnosti. Podľa Tureka (2005) kompetencie predstavujú súbor vedomostí, zručností, schopností, spôsobov správania človeka, ktoré preukazuje v praktických činnostiach.

Predmet matematika sa zameriava na rozvoj matematických kompetencií žiakov podľa ustanovenia Európskeho parlamentu, ktorý definoval matematickú kompetenciu ako *„schopnosť rozvíjať a používať matematické myslenie na riešenie rôznych problémov v každodenných situáciách."* Matematické kompetencie v tomto zmysle zohľadňuje Štátny pedagogický ústav v Inovovanom štátnom vzdelávacom programe ISCED 2 – Matematika (2015). Podľa Šedivého a kol. (2013) matematické kompetencie, hlavné aspekty matematickej gramotnosti, *„sú všeobecné matematické vedomosti, schopnosti a zručnosti, ktoré zodpovedajú príslušným úrovniam vzdelania."* Niss a Højdaard (2019) uvádzajú, že matematická kompetencia je schopnosť porozumieť, posúdiť a vykonať rôzne matematické i nematematické situácie s použitím matematiky. Podľa Sekeráka (2008) sú matematické kompetencie *„nehierarchickým zoznamom všeobecných matematických vedomostí, zručností,* *schopností a postojov"*, ktoré žiaci a študenti využívajú na riešenie úloh, matematické modelovanie, ako i na riešenie každodenných problémov.

V literatúre sa stretávame s rôznymi definíciami matematických kompetencií a taktiež s ich rozdelením. V slovenskej literatúre je známy kompetenčný model (Sekerák, 2008) s dvanástimi kategóriami matematických kompetencií. Model bol vytvorený na základe diskusií s učiteľmi, ako i zo skúseností z domácich a zahraničných výskumov. OECD PISA (2009) používa na zhodnotenie schopnosti používať matematiku v rôznych situáciách osem matematických kompetencií. Matematické kompetencie rozdelené podľa Sekeráka (2008), OECD PISA (2003) a iných autorov je náročné skúmať jednotlivo, nakoľko v rôznych úlohách sa často súčasne používajú viaceré kompetencie. OECD PISA opisuje matematické kompetencie na základe troch úrovní:

1. **Reprodukčná úroveň** – najnižšia trieda kompetencií, zakladajúca sa na elementárnych vedomostiach, zručnostiach a schopnostiach. Žiaci na reprodukčnej úrovni dokážu zopakovať naučený materiál, uskutočniť rutinné výpočty a vyriešiť nenáročné problémy.
2. **Úroveň prepojenia** – trieda kompetencií zakladajúca sa na prepojení vzájomne rôznych predstáv riešeného problému alebo oblastí matematiky. Žiaci na úrovni prepojenia dokážu riešiť problémy, ktoré nie sú rutinné s využitím integrácie, spojenia známych metód, jednoduchého doplnenia osvojených poznatkov a modelovaním.
3. **Úroveň reflexie** – najvyššia trieda kompetencií vzhľadom na vedomosti, schopnosti, zručnosti a postoje. Žiaci na úrovni reflexie prenikajú do podstaty matematiky, plánujú stratégie riešenia úloh, ktoré sú komplexnejšie a vyžadujú si originálny matematický prístup ako i spojenie rôznych metód. Žiaci na tejto úrovni využívajú rozvinuté uvažovanie, argumentáciu, abstrakciu ako i modelovanie v rôznych nepoznaných situáciách.

V matematike je taktiež dôležité venovať pozornosť rozvoju geometrických kompetencií. Pod kompetenciami v geometrii rozumieme súbor tých schopností, vedomostí, postojov, ktoré zabezpečujú úspech v riešení teoretických a praktických geometrických problémov (Kmeťová, 2009). Podľa autorky sa do geometrických kompetencií zahrňujú tieto schopnosti a zručnosti:

- schopnosť zovšeobecňovať a abstrahovať,
- vedieť konštruovať,
- umenie vidieť, odhaliť súvislosti,
- schopnosť argumentovať a dokazovať.

Vhodným prostriedkom na posúdenie úrovne vedomostí žiaka a hodnotenie prejavených matematických kompetencií je tzv. rubrika, ktorá má formu hodnotiacej tabuľky. Bulková (2016) uvádza rubriku (Tabuľka 1) úrovní matematických kompetencií priradených k príslušnej úrovni geometrického myslenia podľa van Hieleho teórie.

Tabuľka 1: Rubrika úrovní matematických kompetencií zodpovedajúcich úrovni geometrického myslenia

Úroveň geometrického myslenia	**kompetencie**	st.
vizualizácia	používanie pomôcok, práca s informáciami	1
analýza	matematické pojmy, fakty, tvrdenia a postupy, použitie symbolického, formálneho a technického vyjadrovania a operácií	2
abstrakcia	znázorňovanie a popisovanie matematických objektov a situácií, prezentácia, matematické myslenie a usudzovanie	3
dedukcia	matematická argumentácia, dôkaz, položenie otázky, vymedzenie problému a jeho riešenia	4
axiomatizácia	matematické modelovanie	5

Neľahkou úlohou učiteľov je diagnostikovať, posúdiť a následne aj rozvíjať kompetencie žiakov. V článku venujeme pozornosť analýze úloh na najvyššej kompetenčnej úrovni s prepojením na úroveň geometrického myslenia podľa van Hieleho teórie.

Metodológia

V článku sa zameriame na analýzu riešení vybraných úloh nami navrhnutého testu matematických kompetencií v oblasti geometrie a na prepojenie úrovne geometrického myslenia s riešením daných úloh. V rámci danej problematiky sme si stanovili tieto výskumné ciele:

1. Analyzovať žiacke riešenia geometrických úloh na úrovni reflexie z testu matematických kompetencií z pohľadu ich správnosti a najčastejšie vyskytujúcich sa chýb.
2. Porovnať a odhaliť súvislosti medzi správnym, čiastočne správnym a nesprávnym riešením vybraných geometrických úloh s dosiahnutou úrovňou geometrického myslenia podľa van Hieleho teórie.

Popis výskumnej vzorky

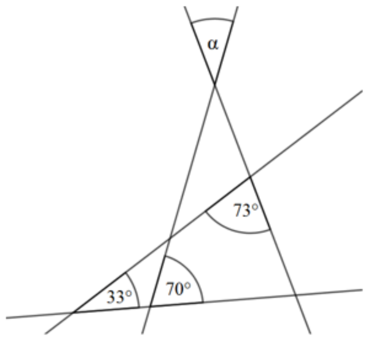
Výskum sme realizovali v júni 2020 na výskumnej vzorke žiakov deviateho ročníka, ktorí majú osvojené všetky poznatky jednotlivých tematických celkov z tematického okruhu Geometria a meranie. K výskumu sme oslovili dve základné školy v Nových Zámkoch – ZŠ Nábrežná a ZŠ Gábora Bethlena. Výskumu sa zúčastnilo 75 žiakov, konkrétne 43 dievčat a 32 chlapcov (33 žiakov zo ZŠ Nábrežnej a 42 žiakov zo ZŠ Gábora Bethlena), zo šiestich tried.

Výskumné nástroje k zberu a spracovaniu dát

Na realizáciu výskumu bol použitý nami navrhnutý test matematických kompetencií, ktorého validitu a reliabilitu sme štatisticky overili . Žiaci deviateho ročníka riešili deväť úloh na rôznych kompetenčných úrovniach. V rámci výskumu prezentovaného v tomto článku sme vybrali nasledovnú trojicu úloh, ktoré sú na najvyššej úrovni matematických kompetencií, teda na úrovni reflexie.

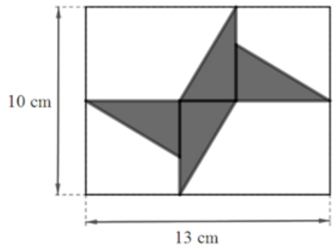
Úloha Uhly

Vypočítajte veľkosť uhla α v stupňoch.



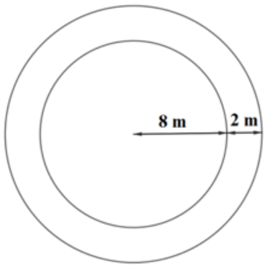
Úloha Mozaika

V mozaike obdĺžnikovej obkladačky je umiestený vzor zložený zo štyroch zhodných pravouhlých trojuholníkov. Určte, koľko percent tvorí obsah tohto vzoru z obsahu celej obkladačky.



Úloha Kamienky

V parku je kruhový záhon s polomerom 8 metrov vysadený kvetmi. Po jeho obvode je chodník široký 2 metre. Koľko kilogramov kamienkov potrebujeme na vyloženie chodníka, ak 1 *kg* kamienkov vystačí na pokrytie plochy 5 m^2?



Na určenie úrovne geometrického myslenia sme použili štandardizovaný van Hieleho geometrický test, ktorý vytvoril profesor Zelman Usisnkin. Test používame s jeho súhlasom a na každú kópiu testu uvádzame “Copyright ©1980 by the University of Chicago. Reprinted with permission of the University of Chicago.” Test sme preložili do slovenského jazyka a štatisticky overili.

Výskumné metódy

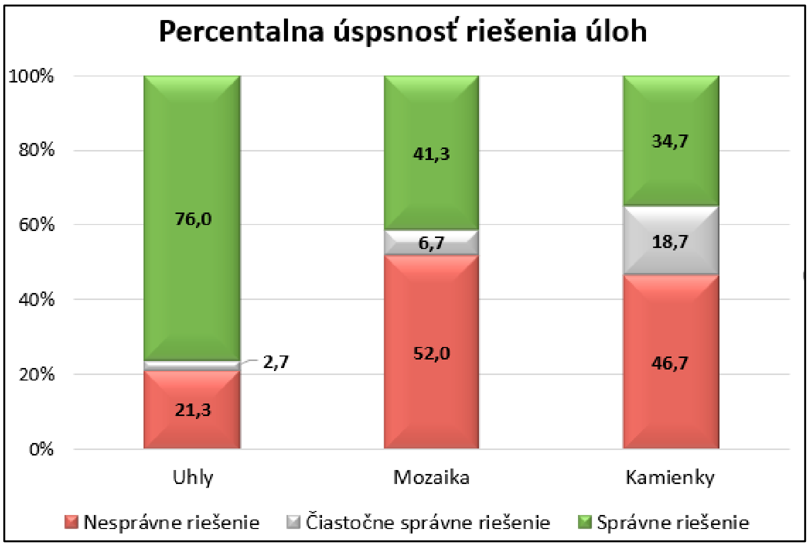
Na splnenie 1. cieľa sme použili obsahovú analýzu žiackych riešení vybraných geometrických úloh. Na splnenie 2. výskumného cieľa sme použili štatistickú implikačnú analýzu na skúmanie závislostí a vzťahov medzi didaktickými premennými stanovenými v a-priori analýze. Štatistickú implikačnú analýzu sme realizovali použitím štatistického program C.H.I.C. (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive). Program umožňuje vizualizáciu vzťahov podobností a implikácií medzi danými didaktickými premennými. Zameriava sa na hľadanie implikácií medzi skupinami rôznych premenných, pravdepodobnosť uskutočnených implikácií vyjadruje percentom pravdepodobnosti. Výstupom programu sú tri typy grafov: orientovaný hierarchický strom (oriented hierarchical tree), implikačný graf (implication graph) a neorientovaný strom podobností ((non oriented) similarity tree) (Gras. 2008).

Na základe a-priori analýzy úloh boli identifikované nasledovné didaktické premenné:

1. **Typ VH** – správne riešenie úloh van Hieleho geometrického testu:
   - VH1 – VH20 – žiak správne vyriešil 1.–20. úlohu van Hieleho geometrického testu.
2. **Typ CS** – správne riešenie geometrických úloh:
   - UCS, MCS, KCS – žiak správne vyriešil geometrické úlohy Uhly (UCS), Mozaika (MCS) a Kamienky (KCS)
3. **Typ PS** – čiastočne správne riešenie geometrických úloh:
   - UPS, MPS, KPS – žiak čiastočne správne vyriešil geometrické úlohy Uhly (UPS), Mozaika (MPS) a Kamienky (KPS)
4. **Typ IS** – nesprávne riešenie geometrických úloh:
   - UIS, MIS, KIS – žiak nesprávne vyriešil geometrické úlohy Uhly (UIS), Mozaika (MIS) a Kamienky (KIS)
5. **Typ L** – úroveň geometrického myslenia podľa van Hieleho:
   - L0 – žiak je na predúrovni geometrického myslenia,
   - L1 – žiak je na úrovni vizualizácie,
   - L2 – žiak je na úrovni analýzy,
   - L3 – žiak je na úrovni abstrakcie,
   - L4 – žiak je na úrovni dedukcie.

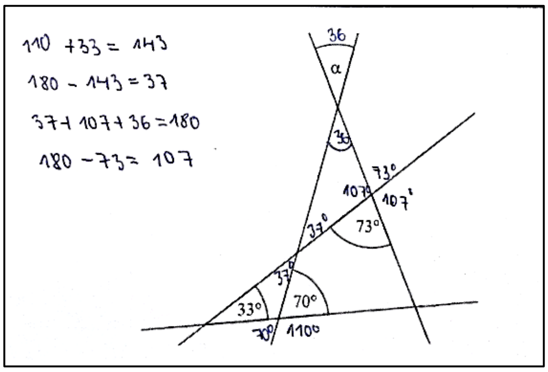
Kvalitatívna analýza riešení geometrických úloh

V nasledujúcej časti uvedieme analýzu vybraných správnych, čiastočne správnych a nesprávnych žiackych riešení. Ako môžeme v Grafe 1 vidieť, úlohu Uhly správne vyriešilo 76 % žiakov, úlohu Mozaika 41,3 % žiakov a úlohu Kamienky 34,7 % žiakov. Z realizovaného van Hieleho geometrického testu vyplýva, že 5,3 % žiakov nedosiahlo ani úroveň vizualizácie a nachádza sa len na predúrovni geometrického myslenia. Úroveň vizualizácie dosiahlo 28 % žiakov, taktiež 28 % žiakov úroveň analýzy, 24 % žiakov úroveň abstrakcie. Priaznivým zistením je, že 5,3 % žiakov sa nachádza na úrovni dedukcie, ktorú zväčša dosahujú až študenti stredných škôl.



Graf 1: Percentuálna úspešnosť riešenia geometrických úloh

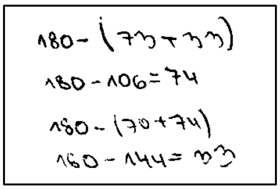
Úloha Uhly



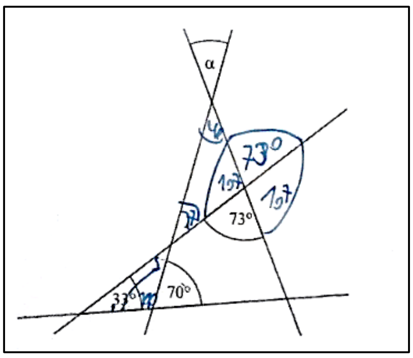
Obr. 1: Správne riešenie úlohy Uhly

Správne riešenie

V správnom riešení úlohy žiaci prepojili poznatky o veľkosti susedných a vrcholových uhlov spolu so súčtom veľkostí uhlov v trojuholníku. Ako môžeme v Obr. 1 vidieť, žiaci pri správnom riešení úlohy postupne spočítali jednotlivé uhly v obrázku tak, aby vypočítali veľkosť uhla α. Taktiež si pomáhali pomocnými výpočtami.



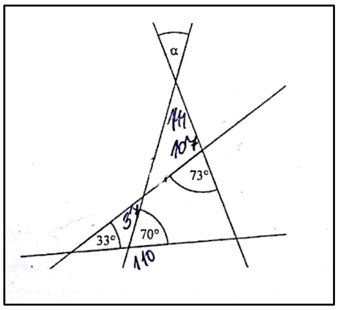
Obr. 2: Nemurická chyba 1 v riešení úlohy Uhly



Obr. 3: Numerická chyba 2 v riešení úlohy Uhly

Čiastočne správne riešenie

V riešeniach sme taktiež pozorovali niekoľko numerických chýb (Obr. 2 a Obr. 3). Žiaci mali poznatky o vrcholových a susedných uhloch aj o súčte veľkostí uhlov v trojuholníku, avšak pri sčítaní veľkostí uhlov sa pomýlili. Ako môžeme v oboch obrázkoch vidieť, žiaci sa pomýlil pri výpočte posledného rozdielu. V riešení na Obr. 2 (180 - 144 = 33), v riešení na Obr. 3 (180 – 37 – 107 = 46). Správny rozdiel mal byť v oboch riešeniach 36.

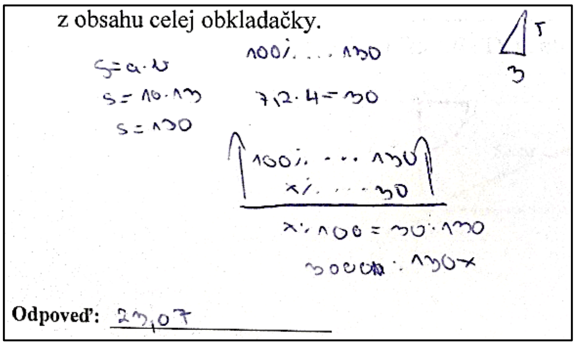


Obr. 4: Nesprávne riešenie úlohy Uhly

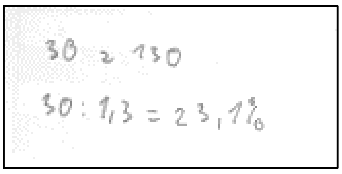
Nesprávne riešenie

Medzi nesprávnymi riešeniami úlohy Uhly sme pozorovali nevedomosti žiakov o súčte veľkostí susedných uhlov a súčte veľkostí uhlov v trojuholníku (Obr. 4). Ako môžeme v obrázku vidieť, žiaci si v riešení taktiež neuvedomili, že uhol α je ostrý.

Úloha Mozaika



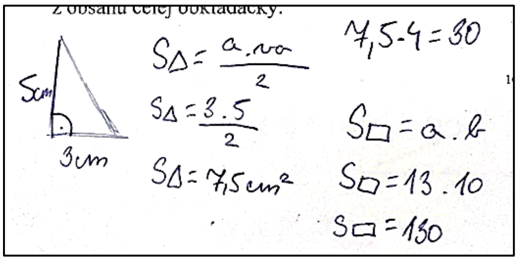
Obr. 5: Správne riešenie úlohy Mozaika využitím trojčlenky



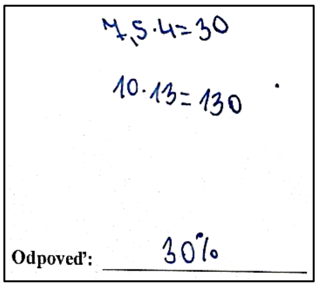
Obr. 6: Správne riešenie úlohy Mozaika cez jedno percento

Správne riešenie

Správne riešenie žiakov pozostávalo z niekoľkých krokov, v ktorých bolo nevyhnutné vypočítať obsah vzoru obkladačky, obsah celej obkladačky a následne počet percent vzoru. Ako môžeme vidieť na Obr. 5, žiaci z rozmerov obkladačky určili dĺžku strán trojuholníkov, z ktorých sa mozaika skladala a následne vypočítali jej obsah. Obsah celej obkladačky dokázali vypočítať na základe uvedených rozmerov v obrázku. Počet percent určovali cez jedno percento (Obr. 6), alebo ako môžeme vidieť využitím trojčlenky (Obr. 5).



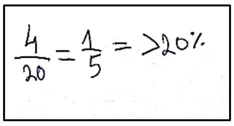
Obr. 7: Neúplné riešenie úlohy Mozaika



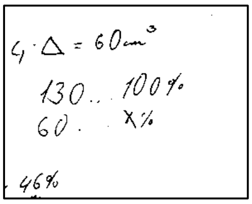
Obr. 8: Nesprávny výpočet percent v úlohe Mozaika

Čiastočne správne riešenie

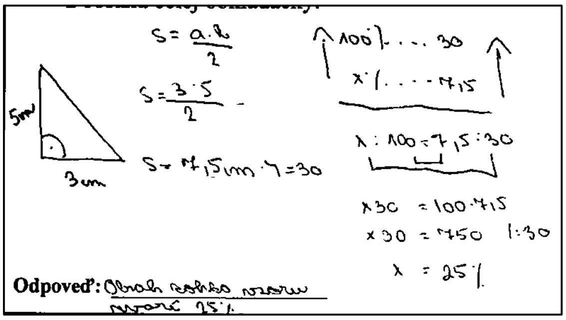
Za čiastočne správne riešenia sme považovali tie, v ktorých žiaci správne vypočítali obsah vzoru aj obsah obkladačky ale nevypočítali, koľko percent obkladačky tvorí vzor. V riešení na Obr. 7 môžeme vidieť, že žiaci vedeli, že k určeniu percent potrebujú poznať obsah celku aj jeho časti, avšak percentá nevypočítali. V riešeniach, v ktorých bol nesprávne určený počet percent, žiaci nemali problém s geometrickými poznatkami ale s prácou s percentami (Obr. 8).



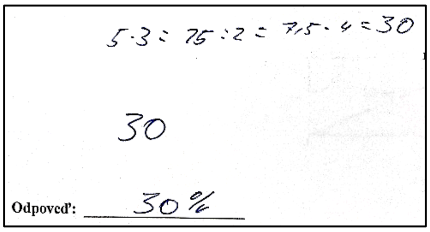
Obr. 9: Obkladačka rozdelená na 20 zhodných častí



Obr. 10: Nesprávny vzorec pre výpočet obsahu trojuholníka



Obr. 11: Výpočet počtu percent jedného trojuholníka zo vzoru obkladačky

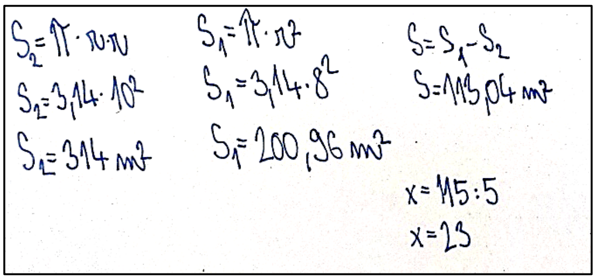


Obr. 12: Obsah vzoru obkladačky totožný s počtom percent

Nesprávne riešenie

Pri analýze úloh sme pozorovali niekoľko nesprávnych riešení úlohy. Žiaci napríklad určili, že obkladačka sa skladá z dvadsiatich zhodných pravouhlých trojuholníkov a vzor tvoria štyri pravouhlé trojuholníky (Obr. 9). Za geometrický problém taktiež považujeme riešenie na Obr. 10, v ktorom žiaci neovládali základný vzorec pre výpočet obsahu pravouhlého trojuholníka, aj keď následný výpočet počtu percent bol správny. Medzi nesprávne riešenie úlohy Mozaika taktiež zaraďujeme riešenie na Obr. 11. Žiaci v riešení vypočítali, koľko percent z mozaiky tvorí jeden pravouhlý trojuholník. Za nepochopenie zadania úlohy považujeme riešenie, v ktorom žiaci uviedli ako správnu odpoveď obsah vzoru obkladačky v percentách (Obr. 12).

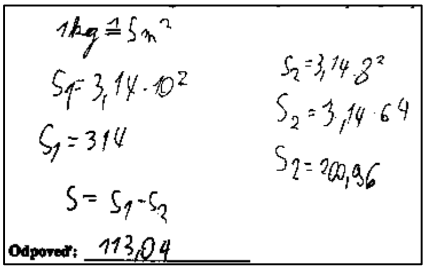
Úloha Kamienky



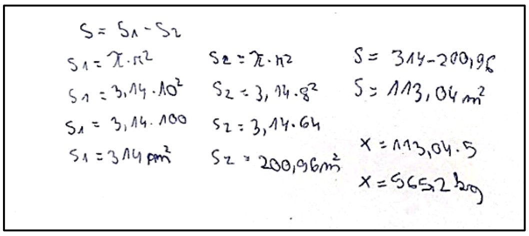
Obr. 13: Správne riešenie úlohy Kamienky

Správne riešenie

Správne riešenie úlohy si taktiež ako v úlohe Mozaika vyžiadalo komplexnejší prístup k riešeniu. Žiaci museli vypočítať obsah medzikružia a následne určiť hmotnosť kamienkov potrebných na jeho pokrytie. Ako môžeme na Obr. 9 vidieť, žiaci odčítaním obsahu kruhu s polomerom 8 m od obsahu kruhu s polomerom 10 m vypočítali obsah medzikružia. Následne určili hmotnosť kamienkov potrebných na pokrytie tým, že obsah medzikružia vydelili piatimi.



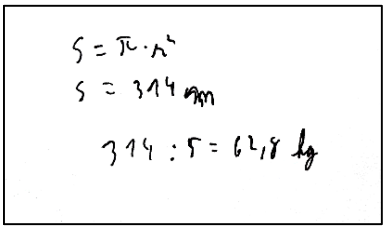
Obr. 14: Obsah medzikružia sa rovná hmotnosti kamienkov



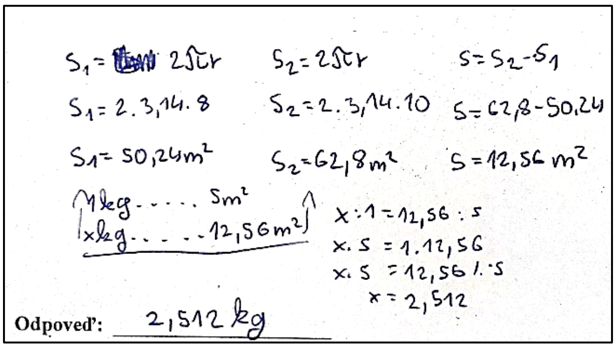
Obr. 15: Nesprávny výpočet hmotnosti kamienkov

Čiastočne správne riešenie

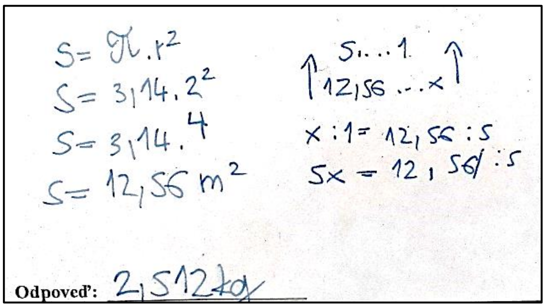
Čiastočne správne vyriešili úlohu tí žiaci, ktorí správne určili obsah medzikružia, avšak neurčili hmotnosť kamienkov potrebných na vyloženie chodníka. Žiaci napríklad určili obsah medzikružia ako správnu odpoveď o hmotnosti kamienkov (Obr. 14). Na Obr. 15 môžeme vidieť, že žiak neporozumel druhej časti zadania úlohy, nakoľko obsah medzikružia násobil číslom päť. Žiaci, ktorí úlohu čiastočne správne vyriešili nemali problém s geometrickými poznatkami, ale následnou logickou úvahou o hmotnosti kamienkov.



Obr. 16: Kamienky potrebné na vyloženie celého kruhu



Obr. 17: Kamienky potrebné na vyloženie kruhu s polomerom 2 metre



Obr. 18: Nesprávny vzorec pre obsah kruhu

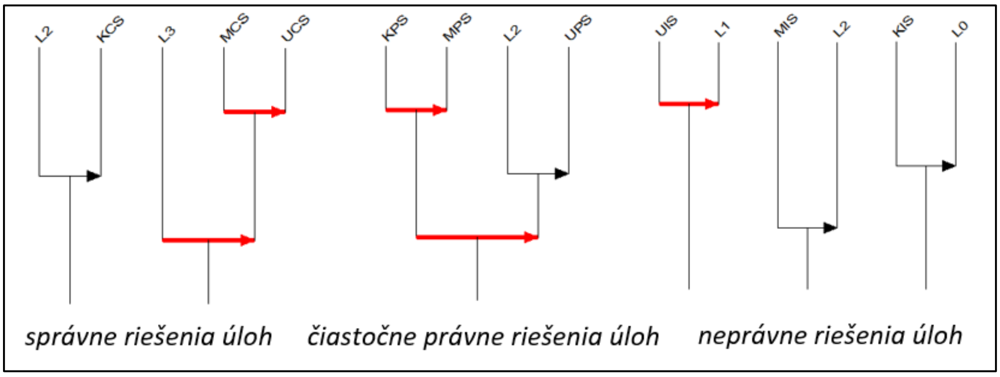
Nesprávne riešenie

V nesprávnych riešeniach úlohy žiaci neporozumeli geometrickej interpretácii medzikružia ako chodníka okolo záhona, alebo mali problém so základnými geometrickými poznatkami. Ako môžeme na Obr. 16 vidieť, niektorí žiaci počítali hmotnosť kamienkov potrebných na pokrytie kruhu s polomerom 10 metrov. Závažnejšiu geometrickú miskoncepciu vidíme v riešení na ďalšom obrázku (Obr. 17), kde žiak počítal obsah medzikružia ako obsah kruhu s polomerom 2 metre. Ďalší významný problém, ktorý bol pozorovaný v riešeniach úlohy je, že si žiaci pomýlili vzorec výpočtu obvodu a obsahu kruhu, aj keď ich postup riešenia úlohy bol v ďalších krokoch správny (Obr. 18).

Prepojenie medzi úrovňou geometrického myslenia a riešením geometrických úloh

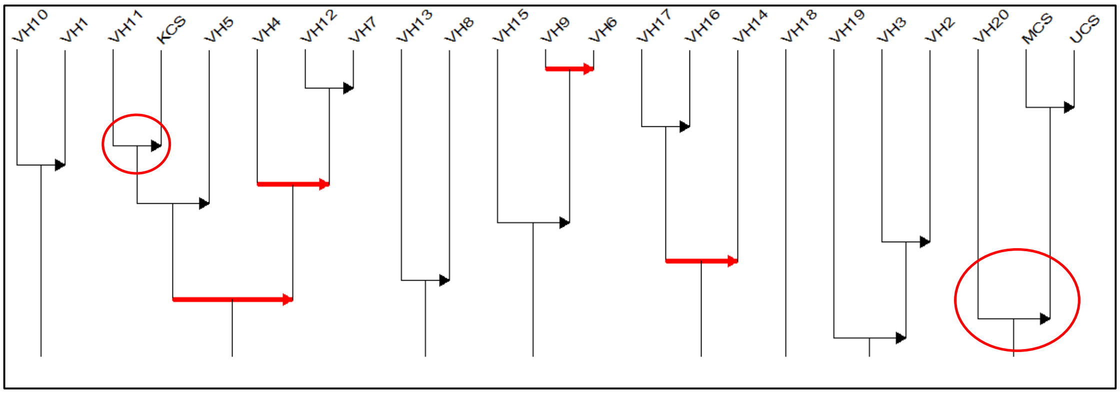
Na odhalenie súvislostí medzi riešeniami geometrických úloh a dosiahnutou úrovňou geometrického myslenia sme použili program C.H.I.C., konkrétne výstup hierarchické stromy. Významné implikácie sú zvýraznené červenou farbou.

Na Obr. 19 sú znázornené hierarchické stromy vyjadrujúce vzťah medzi úrovňou geometrického myslenia, správnymi, čiastočne správnymi a nesprávnymi riešeniami geometrických úloh. Ako môžeme z implikácie UIS → L1 vidieť, že žiak, ktorý nesprávne vyriešil úlohu Uhly, ktorá mala vysokú percentuálnu úspešnosť, sa nachádzal len na úrovni vizualizácie (kohézia = 0,62). Ak sa žiak nachádzal na úrovni analýzy, tak správne vyriešil najnáročnejšiu geometrickú úlohu Kamienky (L2 → KCS, kohézia 0,75) a čiastočne správne vyriešil úlohu Uhly (L2 → UPS, kohézia 0,703). Z hierarchického stromu môžeme vidieť, že ak žiak dosiahol úroveň abstrakcie, tak správne vyriešil úlohu Mozaika a Uhly (L3 →(MCS→UCS), kohézia = 0,99).



Obr. 19: Hierarchické stromy - úroveň geometrického myslenia a riešenie geometrických úloh

Obr. 20 znázorňuje hierarchický strom pre správne riešenie úloh van Hieleho geometrického testu a správne riešenia geometrických úloh. Hierarchický strom určuje, ktoré správne riešenie úlohy van Hieleho geometrického testu podmieňuje správne riešenie geometrických úloh na úrovni reflexie. Na základe implikácie VH11 → KCS (kohézia = 0,97) môžeme tvrdiť, že ak žiak vyriešil 11. úlohu z van Hiele geometrického testu na úrovni abstrakcie, potom správne vyriešil aj úlohu Kamienky na úrovni reflexie. Jedenásta úloha van Hieleho geometrického testu je zameraná na určenie vzťahu medzi obdĺžnikom a trojuholníkom, t.j. ak žiak vie, že medzi týmito geometrickými tvarmi neexistuje žiadny inkluzívny vzťah, tak dokáže vyriešiť aplikačnú úlohu na obsah medzikružia. V grafe môžeme taktiež vidieť implikáciu medzi premennou VH20 a didaktickými premennými MCS a UCS, t.j. ak žiak správne vyriešil poslednú zadanú úlohu van Hieleho geometrického testu, tak správne vyriešil úlohy Uhly a Mozaika (kohézia = 0,63). Dvadsiata úloha van Hieleho geometrického testu sa zaoberá tvrdením, ktoré dokazuje rovnobežnosť dvoch priamok, ktoré sú kolmé na tú istú priamku. Žiaci, ktorí správne vyriešili 20. úlohu na úrovni dedukcie a majú znalosť o uhloch rovnobežiek a priamok na ne kolmých, tak následne dokážu vyriešiť aj úlohu o susedných a vrcholových uhloch rôznobežiek. U všetkých troch geometrických úloh na úrovni reflexie môžeme pozorovať, že ich správne riešenie je podmienené správnym riešením úloh van Hieleho testu na úrovni abstrakcie alebo dedukcie.



Obr. 20: Hierarchický strom – správne riešenie úloh van Hiele geometrického testu a správne riešenie geometrických úloh

Záver

Rôzne geometrické problémy sú súčasťou každodenného života. Pri ich efektívnom riešení pomáhajú matematické kompetencie získané počas štúdia. Je úlohou učiteľov matematiky tieto kompetencie, ako i myslenie žiakov v geometrii rozvíjať. Keďže mnoho žiakov v našej výskumnej vzorke sa nachádzalo len na úrovni vizualizácie alebo analýzy geometrického myslenia, je nevyhnutné na hodinách matematiky prispôsobiť jazyk a terminológiu daným úrovniam.

V predstavenej analýze riešení geometrických úloh na úrovni reflexie matematických kompetencií sme sa zamerali na spôsob správnych riešení geometrických úloh a na diagnostiku najčastejších chýb. Prvým, častým problémom, ktorý sme pri riešení úloh mohli pozorovať, boli numerické chyby, t.j. len chyby z nepozornosti. Ďalším, závažnejším geometrickým problémom bolo, že žiakom chýbali základné geometrické poznatky - súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku, vzorec výpočtu obsahu pravouhlého trojuholníka, vzorec výpočtu obsahu kruhu alebo spôsob výpočtu obsahu medzikružia. Treťou pozorovanou skupinou chýb v riešeniach bolo nesprávne využitie iných oblastí matematiky v geometrických úlohách. Vplyv na riešenie úloh mala aj úroveň geometrického myslenia žiakov. Zo štatistickej implikačnej analýzy vyplýva, že žiaci na vyšších úrovniach geometrického myslenia dokázali správne vyriešiť geometrické úlohy.

Vzniknuté chyby v riešeniach úloh sa dajú eliminovať rôznymi spôsobmi. Znížením rušivých prvkov či kontrolou výpočtov sa dajú odstrániť numerické chyby. Je veľmi dôležité, aby sa žiaci naučili pracovať s komplexnými úlohami, vyžadujúcimi si prepojenie rôznych matematických kompetencií v geometrii. Žiaci by mali vedieť naplánovať riešenie zložených slovných úloh daného typu, čo dokážu iba vtedy, ak s takýmito úlohami budú mať dostatok skúseností.

Poďakovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu UGA: Diagnostika vzťahu matematických kompetencií a úrovne geometrického myslenia.

Literatúra

Bulková, K. (2016). Matematické kompetencie žiakov pri riešení otvoreného geometrického problému. *Acta Mathematica Nitriensia*. 2016, 2, 2. [12.3.2021]. dostupné online. ISSN: 2453-6083

Gras, R. et al. (2008). *Statistical Implicative Analysis. Theory and Applications*. Verlag Berlin Heidelberg: Springer

Hardianti, D., Priatna, N., Priatna, A. (2017). Analysis of Geometric Thinking Students' and Process Guided Inquiry Learning Model. In *Journal of Physics Conference Series.* 895, 1, str. 1 - 7.

Kmeťová, M. (2009). O zložkách geometrických kompetencií. In *Acta Mathematica 12*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

National Council of Teachers of Mathematics. (2000*). Principles and standards for school mathematics. Reston: National Council of Teachers of Mathematics*

Niss, M., Højgaard, T. 2019.Mathematical competencies in mathematics education: Past, presentand future. New York: Springer, 2019. ISBN 978-3-319-03608-3.

OECD PISA. (2003). The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. Paris: OECD, 2003.

Sekerák, J. (2008). *Diagnostikovanie a rozvíjanie kľúčových kompetencií v matematickom vzdelávaní*: dizertačná práca. Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,

Šedivý, O. a kol. (2013). *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky.* Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

Štátny pedagogický ústav. (2020). *Matematika a práca s informáciami*. Dostupné na: [https://www.statpedu.sk/sk/svp/statny-vzdelavaci-program/svp-druhy-stupen-zs/matematika-praca-informaciami/]

Turek, I. (2005). *Inovácie v didaktike*. Bratislava: MPC

Usiskin, Z. (1982)*. Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Chicago: The university of Chicago

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Orlando: Academic Press