

Priečky lichobežníka v prostredí programu GeoGebra

Trapezoid's Transversals in GeoGebra Environment

Martin Billich^a

^a*Department of Mathematics, Faculty of Education, Catholic University in Ružomberok, Hrabovská cesta 1A, SK-034 01 Ružomberok*

Received March 29, 2021; received in revised form April 1, 2021; accepted April 3, 2021

Abstract

In this article we present a few possibilities how to use special GeoGebra commands and tools. We focus on certain relations among geometric objects in a planar construction, especially for the trapezoid and its transversals. Dynamic geometry environment of GeoGebra software for symbolic checks of any relations allowing derivation, proving and discovering of theorems related to constructed geometric figures. Approach of using a low-level GeoGebra automated reasoning tools (*LocusEquation*, *Relation*, *Prove*, *ProveDetails*) is presented on some geometric situations for trapezoid transversals. Moreover, in all cases verifications and proving of the constructive geometric facts based on the method of calculation of area are included, too.

Keywords: GeoGebra, trapezoid, transversals, area method.

Classification: H30, R20

Úvod

V poslednom období možno pozorovať takmer na všetkých stupňoch škôl tendencie istého deformovania matematického vzdelávania, ktoré sa zameriava predovšetkým na výkony, čo v konečnom dôsledku tlačí žiakov do získavania a memorovania množstva informácií bez pochopenia širších súvislostí, bez možnosti prezentovania, ozrejmenia ich zmysluplnosti či využiteľnosti v praktickom živote. Nemožno sa uspokojiť so stavom, keď sa mnohokrát iba naoko proklamuje využívanie informačných a komunikačných technológií na našich školách. Priestor určený k vizualizácii geometrických problémov v prostredí interaktívnych programov predstavuje pre učiteľa a žiakov prirodzené prostredie zvyšujúce efektívnosť vyučovacieho procesu. V tomto smere je dnes GeoGebra, ako voľne dostupný program dynamickej geometrie, čoraz populárnejší takmer na všetkých úrovniach matematického vzdelávania.

Program GeoGebra a niektoré jeho nástroje

Multiplatformový systém GeoGebra v sebe spája geometriu, algebru a matematickú analýzu. Dynamické prostredie tohto programu má jednoduché a intuitívne používanie a poskytuje primeraný priestor na žiacke aktivity nielen v škole, ale aj v domácom prostredí. V našom príspevku sa obmedzíme prevažne na nástroje tohto programu, ktoré súvisia s objavovaním matematických pojmov, vlastností objektov, tiež tvorbou hypotéz či formulovaním tvrdení

*Corresponding author: martin.billich@ku.sk
DOI: 10.17846/AMN.2021.7.1.10-20

a sú vhodné na ich geometrickú vizualizáciu či samotné overovanie. Niekoľko zaujímavých príkladov na využitie automatizovaných nástrojov na dokazovanie a overovanie v GeoGebre je možné nájsť aj v [1], [2] a [3]. V konečnom dôsledku budú tieto možnosti prezentované na niekoľkých geometrických tvrdeniach o pričkach lichobežníka. Za týmto účelom budeme v programe GeoGebra používať, okrem základných funkcií, aj nasledujúce nástroje (príkazy):

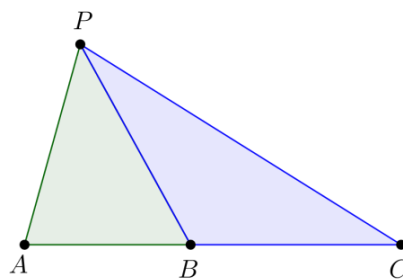
- *LocusEquation*[V, B] (*RovnicaMnožinyBodov*[V, B]), kde V je vlastnosť hľadanej množiny bodov (v tvare logického výrazu – čo predstavuje dodatočnú podmienku pre objekty príslušnej konštrukcie) a B je bod patriaci k voľným objektom konštrukcie, pre ktorý sa bude overovať vlastnosť V . Výsledkom príkazu *LocusEquation*[V, B] je množina bodov M (krivka daná rovnicou v implicitnom tvare – uvedená v algebraickom okne programu), ktorá je taktiež zobrazená v geometrickom okne, za predpokladu: ak platí V (logická hodnota je 1), tak $B \in M$. Treba pripomenúť, že pri skúmaní množiny bodov sú všetky skôr zostrojené body (okrem bodu B) považované za pevné, pretože ich súradnice sú súčasťou numerických výpočtov k overovaniu vlastnosti V .
- Nástroj *Relation* (*Vzťah*) resp. príkaz *Relation*[O_i], ktorým určujeme vzťah medzi dvomi alebo viacerými objektmi (geometrickými útvarmi) O_i . Tento príkaz umožňuje numericky, t.j. pre dané súradnice zostrojených bodov (a nimi určených objektov analytickými vyjadreniami), overiť napríklad rovnobežnosť (kolmost) dvojice priamok, kolineárnosť trojice bodov, ďalej či bod leží na danej úsečke (priamke, kužeľosečke), alebo či dva alebo viac útvarov sú totožné resp. majú rovnakú mieru (dĺžku, obsah).
- Príkaz *Prove* (*Verifikovať*), ktorým môžeme “zvýšiť úroveň” overovania niektorých geometrických tvrdení o vzťahoch medzi útvarmi. Na rozdiel od nástroja *Relation*, kde overovaný vzťah je vyhodnotený pre konkrétnu polohu daných útvarov (teda numericky), príkaz *Prove* rozhodne, či je dané tvrdenie platné vo všeobecnosti. Možnými výstupmi, ktoré sú dostupné v algebraickom okne programu ako logická hodnota, sú ‘true/pravda’, ‘false/nepravda’ resp. ‘nedefinované/undefined’. Posledná možnosť znamená, že nedostávame dôveryhodnú odpoveď príkazom *Prove*, t.j. GeoGebra nevie jednoznačne rozhodnúť o platnosti tvrdenia vo všeobecnosti.
- Príkaz *ProveDetails* (*VerifikovaťDetaily*), ktorý pracuje podobne ako príkaz *Prove*, avšak používa mierne rozšírený algoritmus. V dôsledku toho môžeme vo výsledku získať podrobnejšie informácie v tvare podmienok tzv. degenerácie, ktoré vyjadrujú, kedy je skúmaná vlastnosť splnená. Presnejšie, ak nie je splnená žiadna z podmienok uvedených vo vnútorných zátvorkách {true, {conditions...}}, ktoré nájdeme v zozname výsledkov algebraického okna programu, tak tvrdenie je pravdivé.

Základné pojmy

Rovinné geometrické útvary, vrátane skúmania ich základných charakteristických prvkov, sú neoddeliteľnou súčasťou školskej geometrie. Z priestoru venovaného mnohoúhelníkom sa zameriame na lichobežník, ktorý definujeme ako konvexný štvoruholník, ktorý má práve jednu dvojicu navzájom rovnobežných strán. Túto dvojicu rovnobežných strán nazývame základne, zvyšné strany ramená. Pod priečkou lichobežníka budeme rozumieť každú úsečku, ktorej krajné body ležia na obode lichobežníka a ktorá nie je incidentná so žiadnou z jeho strán. Úsečku, ktorej krajné body sú stredy ramien, nazývame stredná priečka lichobežníka.

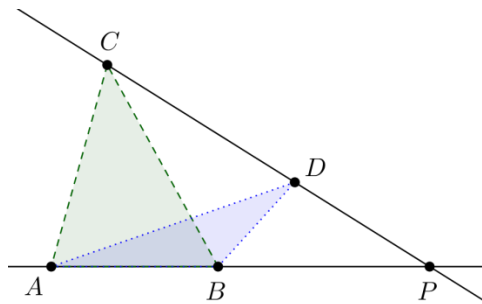
Z metód riešenia úloh, ktoré neskôr využijeme pri riešení niekoľkých problémov, uvedieme zopár poznámok k metóde dokazovania pomocou výpočtu obsahu, ktorú vieme jednoducho uplatniť pri overovaní tvrdení o množine geometrických útvarov zostrojených konečným počtom euklidovských konštrukcií. Základnými princípmi spôsobu dokazovania je určovanie pomerov proporcionálne si odpovedajúcich úsečiek resp. pomerov orientovaných úsečiek a obsahov vhodných trojuholníkov. Ak uvažujeme orientáciu vrcholov trojuholníka, tak možno zaviesť aj pojem orientovaného obsahu trojuholníka. Medzi základné pomocné tvrdenia metódy dokazovania pomocou výpočtu obsahu patria nasledujúce lemy, v ktorých zápis AB znamená orientovanú dĺžku úsečky s krajnými bodmi A, B a S_{ABC} je orientovaný obsah trojuholníka s vrcholmi A, B, C (podrobnejšie v [4], [5] a [6]):

Lema 1. *Nech A, B, C sú tri navzájom rôzne kolineárne body a P bod neležiaci na priamke AB . Potom $AB : BC = S_{ABP} : S_{BCP}$. V prípade, ak $BC = k \cdot AB$ ($k \in \mathbf{R}$), tak $S_{BCP} = k \cdot S_{ABP}$.*



Obrázok 1

Lema 2. *Nech P je priesečník dvojice rôznobežných priamok AB, CD , pričom $D \neq P$. Potom platí: $CP : DP = S_{ABC} : S_{ABD}$.*



Obrázok 2

Lema 3. *Nech A, B, C, D sú štyri navzájom rôzne body. Potom AB je rovnobežné s CD práve vtedy, keď $S_{ABC} = S_{ABD}$.*

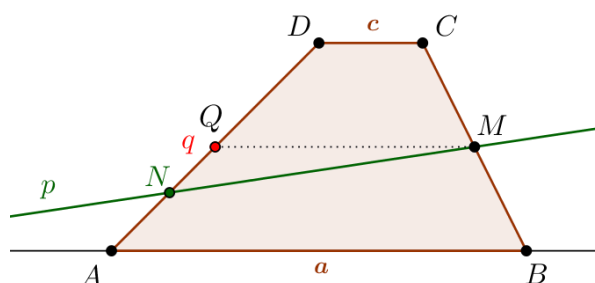
Východisková situácia

Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$) a stred M ramena BC . Nech N je ľubovoľný vnútorný bod ramena AD . Priemka MN daného lichobežníka je rovnobežná s jeho základňami práve vtedy, keď bod N je stredom AD , t.j. úsečka MN je jeho stredná priemka. V prostredí programu GeoGebra môžeme 'objaviť' toto tvrdenie v niekoľkých nasledujúcich krokoch:

1. Najskôr zostrojíme lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD (nástroj *Polygon*), pričom vychádzame z trojice nekolineárnych bodov A, B, C , pričom vrchol D je bodom priamky prechádzajúcej C a rovnobežnej s AB . GeoGebra automaticky vytvorí úsečky a, b, c, d

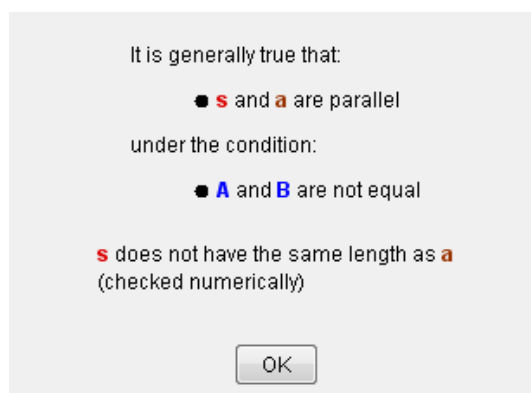
predstavujúce strany lichobežníka. Nech bod M je stred ramena BC (nástroj *Midpoint*) a bod N ľubovoľný bod ramena AD (nástroj *Point on Object*). Nakoniec zostrojíme priamku p prechádzajúcu bodmi M, N .

2. Skúmame, pre akú polohu bodu N je priamka p rovnobežná so základňami lichobežníka (napr. AB). Do vstupného poľa programu GeoGebra zadáme `LocusEquation[p||a,N]`. Výsledkom tohto príkazu je určenie implicitnej krivky q , ktorá je v geometrickom okne programu vykreslená 'ako' bod. Napríklad, pre konfiguráciu vrcholov lichobežníka so súradnicami $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (3, 2)$, $D = (2, 2)$, rovnica implicitnej krivky q má tvar $x^2 - 2x + y^2 - 2y = -2$, ktorá predstavuje bod so súradnicami $(1, 1)$.
3. V prípade, že budeme meniť polohu voľných bodov konštrukcie (vrcholov lichobežníka), tak pre polohu krivky q zodpovedajúcu umiestneniu bodu N na ramene AD lichobežníka s vlastnosťou $MN \parallel AB$, možno vysloviť domnienku (hypotézu), že bod N je stredom strany AD (obrázok 3).



Obrázok 3

4. Na overenie našej domnienky najskôr zostrojíme stred Q ramena AD (nástroj *Midpoint*) a sledujeme prekrytie tohto bodu s krivkou (bodom) q pre rôzne polohy voľných bodov. Následne zostrojíme priečku QM (úsečku s). Pomocou nástroja *Relation* resp. príkazom `Relation[s,a]` určíme vzťah medzi stranou AB a priečkou QM lichobežníka. Odpoveď programu je, že dané úsečky " s a a sú rovnobežné (numericky overené)". Kliknutím na tlačidlo "More. . ." vo vyskakovacom okne programu získame rozšírenú odpoveď, ktorá hovorí, že úsečky s a a sú rovnobežné vo všeobecnosti a za podmienky, keď vrcholy A, B sú navzájom rôzne (obrázok 4).



Obrázok 4

5. Na základe experimentovania v prostredí programu GeoGebra môžeme sformulovať nasledujúce tvrdenie:

Stredná priečka lichobežníka je rovnobežná s jeho základňami.

K jeho formálnemu dôkazu môžeme využiť vyššie uvedené pomocné lemy. Presnejšie, ak body Q a M sú postupne stredy strán AD a BC , tak

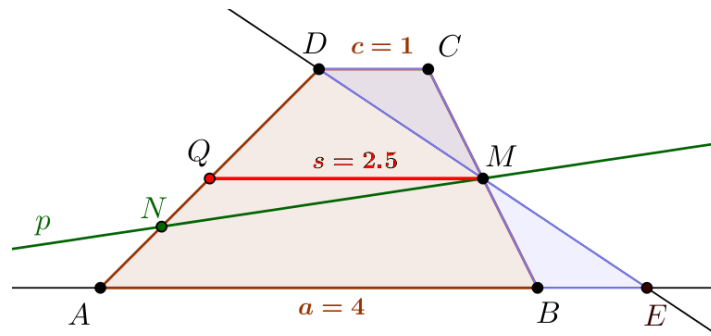
$$AQ : AD = BM : BC = 1 : 2$$

Z lemy 1 vyplýva, že

$$S_{ABQ} = \frac{1}{2}S_{ABD} = \frac{1}{2}S_{ABC} = S_{ABM}$$

Rovnobežnosť základne AB a strednej priečky QM je dôsledkom lemy 3.

6. Platnosť predchádzajúceho tvrdenia vyplýva aj z vlastnosti strednej priečky trojuholníka. Ak bod E je priesečníkom priamok AB a DM , tak trojuholníky EBM a DCM sú zhodné (podľa vety *usu*). Odtiaľ dostávame, že úsečky EM a DM sú zhodné, t.j. bod M je stredom úsečky ED . Potom úsečka QM je strednou priečkou trojuholníka AED , ktorá je rovnobežná s jeho stranou AE a teda aj so stranou AB lichobežníka (obrázok 5).



Obrázok 5

7. Navyše, pre dĺžku AE platí: $AE = AB + BE = AB + DC$. Potom dĺžka strednej priečky QM trojuholníka AED je polovicou dĺžky strany AE . Odtiaľ dostávame, že dĺžka strednej priečky lichobežníka je rovná aritmetickému priemeru dĺžok oboch jeho základní, t.j.

$$QM = (AB + CD)/2 \quad \text{resp.} \quad s = (a + c)/2$$

V programe GeoGebra overíme túto rovnosť tak, že do vstupného poľa napíšeme príkaz `ProveDetails((a + c)/2 == s)`, pričom rovnosť je nutné vyjadriť pomocou dvoch znakov "=" resp. použijeme špeciálny znak " $\hat{=}$ ", ktorý je dostupný v pravom dolnom rohu vstupného poľa cez ikonu " α ". V algebraickom okne dostaneme odpoveď v tvare:

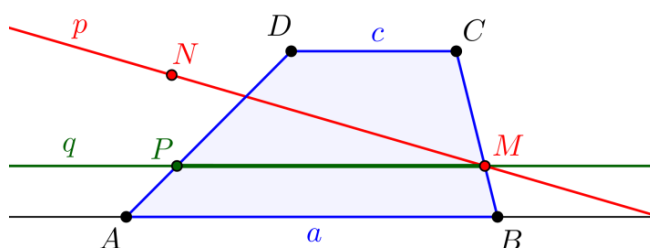
$$\{true, \{ "c = a + s * 2", "s * 2 + c = a " \} \}$$

Toto možno interpretovať tak, že dané tvrdenie o strednej priečke lichobežníka platí vo všeobecnosti, okrem prípadov degenerácie, kedy $A = B$ resp. $C = D$, čo geometricky znamená, že vrcholmi A, B, C, D nie je určený lichobežník. V prípade $A = B$ pre $C \neq D$ je úsečka QM strednou priečkou trojuholníka ACD . Ak $C = D$ pre $A \neq B$, tak úsečka QM je stredná priečka trojuholníka ABC .

Druhá situácia

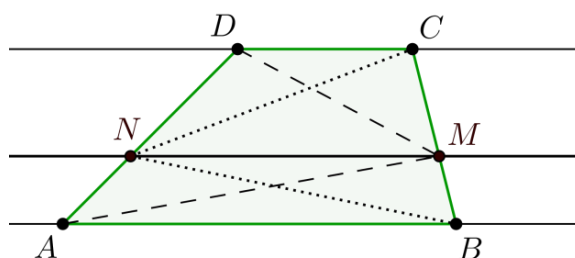
Nech M je vnútorný bod ramena BC lichobežníka $ABCD$. Predpokladajme, že bod N nie je nutne vnútorným bodom druhého ramena AD lichobežníka, ale ľubovoľný (voľný) bod roviny rôzny od M . Ak použijeme vyššie opísané postupy na hľadanie množiny všetkých bodov N , pre

ktoré je priamka p prechádzajúca bodmi M, N rovnobežná so základňami lichobežníka, budeme môcť vysloviť domnienku, že touto množinou je priamka (s výnimkou bodu M , keď $N = M$). Ak do vstupného poľa programu zadáme, podobne ako v kroku 2 predchádzajúcej situácie, príkaz $LocusEquation[p||a, N]$, tak výsledkom je implicitná krivka q , ktorá má v algebraickom okne programu tvar $ax + \beta y = \gamma$ a v geometrickom okne je vykreslená ako priamka rovnobežná so stranou AB lichobežníka, ktorá prechádza bodom M . Rovnobežnosť priamky q vzhľadom na základne sa nemení pri akejkoľvek manipulácii s polohou voľných bodov konštrukcie, ktorými sú vrcholy lichobežníka a body M, N určujúce priamku p . Situácia je znázornená na obrázku 6, kde bodom P sme označili priesečník priamky q a ramena AD lichobežníka.



Obrázok 6

Vo všeobecnosti, v programe GeoGebra nie je možné overiť rovnobežnosť priamky q a strany AB lichobežníka. Program nedokáže vyhodnotiť vzťah medzi úsečkou (priamkou) a krivkou danou implicitne. Výsledkom príkazu $Relation[q, a]$ je: “ q a a sa nedá porovnať (numericky overené)”. V prípade použitia príkazov $Prove[q||a]$ resp. $ProveDetails[q||a]$ program hlási vo vyskakovacom okne chybu “nepripustné porovnanie” alebo “nepripustná logická operácia”. Z tohto dôvodu a aj z doterajších pozorovaní či experimentovania vzniká otázka, v akej forme možno zovšeobecniť tvrdenie o strednej priečke lichobežníka pre takú skupinu priečok, ktorých krajné body ležia na ramenách lichobežníka. Jedna z možností je v nasledujúcej vete: Ak $ABCD$ ($AB||CD$) je lichobežník a MN jeho priečka, pričom $M \in BC$, $N \in AD$, tak priečka MN je rovnobežná so základňami lichobežníka práve vtedy, keď platí: $AN : DN = BM : CM$ (obrázok 7).



Obrázok 7

Toto tvrdenie patrí v geometrii medzi základné tvrdenia o rovnobežných priamkach a ich priečkach. Podobne ako v dôkaze rovnobežnosti strednej priečky lichobežníka s jeho základňami (krok 5), možno v dôkaze tohto tvrdenia využiť skôr uvedené pomocné lemy. Pritom si stačí uvedomiť, že v prípade, ak $MN || AB$, tak podľa lemy 2 platí:

$$AN : DN = S_{ANM} : S_{DNM} = S_{BNM} : S_{CNM} = BM : CM.$$

Poznámka: Pre overenie rovnosti predchádzajúcich pomerov úsečiek v programe GeoGebra, stačí do vstupného poľa napísať príkaz: $ProveDetails(AN/DN == BM/CM)$. V algebraickom okne dostaneme odpoveď v tvare:

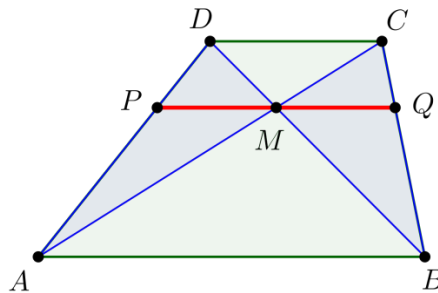
$$\{true, \{ "AreCollinear[A, B, C]" \} \}$$

Znamená to, že $AN : DN = BM : CM$ platí všeobecne, okrem degenerovaného prípadu, keď body A, B, C sú kolineárne. V tomto prípade by vrcholy A, B, C, D neurčovali lichobežník.

Tretia situácia

Nech základne AB a CD daného lichobežníka majú dĺžky a a c . Určte dĺžku jeho priečky, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok rovnobežne so základňami a dokažte, že priesečník uhlopriečok túto priečku rozpoluje.

Riešenie: Situáciu zadania úlohy si zobrazíme v prostredí programu GeoGebra. Nech bod M je priesečníkom uhlopriečok lichobežníka a PQ ($P \in AD$, $Q \in BC$) priečka požadovaných vlastností, t.j. $M \in PQ$, $PQ \parallel AB$ (obrázok 8).



Obrázok 8

- Najskôr dokážeme, že bod M je stred priečky PQ . V programe GeoGebra do vstupného poľa zadáme príkaz $ProveDetails(Distance(P,M)==Distance(Q,M))$. V algebraickom okne dostaneme odpoveď v tvare:

$$\{true, \{ "AreCollinear[A, B, C]", "AreEqual[A, B]" \} \}$$

Znamená to, že úsečky PM a QM majú rovnakú dĺžku za predpokladu, ak body A, B, C neležia na jednej priamke a body P, Q sú navzájom rôzne. Ak namiesto príkazu $ProveDetails$ použijeme príkaz $Prove$, tak výstupom bude logická hodnota 'true' pre overovanú vlastnosť, ktorou je zhodnosť úsečiek PM a QM . Táto vlastnosť zostáva v platnosti pre rôzne polohy voľných bodov (vrcholov lichobežníka). Formálne dokážeme túto vlastnosť metódou s využitím výpočtu obsahu. Z rovnosti obsahov trojuholníkov ABC a ABD dostávame, že $S_{ADM} = S_{BMC}$. Taktiež, z predchádzajúcej situácie vieme, že pre priečku PQ lichobežníka rovnobežnú so základňami platí:

$$AP : DP = BQ : CQ \text{ resp. } AP : AD = BQ : BC$$

Potom, ak uplatníme skôr uvedené pomocné lemy, tak máme:

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{S_{APM}}{S_{AMQ}} = \frac{S_{APM}}{S_{BMQ}} = \frac{S_{APM}}{S_{ADM}} \cdot \frac{S_{ADM}}{S_{BMQ}} = \frac{S_{APM}}{S_{ADM}} \cdot \frac{S_{BMC}}{S_{BMQ}} = \frac{AP}{AD} \cdot \frac{BC}{BQ} = \frac{AP}{AD} : \frac{BQ}{BC} = 1.$$

Znamená to, že úsečky PM a MQ sú zhodné, a teda bod M je stred priečky PQ .

- Vzhľadom na výsledok predchádzajúcej časti ($PM \cong MQ$), na vyjadrenie dĺžky priečky PQ daného lichobežníka pomocou dĺžok jeho základní, stačí určiť dĺžku jedného z jej úsekov, napr. PM . Z dvojíc podobných trojuholníkov PMA , DCA a PMD , ABD vyplýva

$$PM : CD = AP : AD \text{ a } PM : AB = PD : AD.$$

Po sčítaní týchto rovností (ich príslušných pravých a ľavých strán) a úprave dostaneme:

$$PM \left(\frac{1}{CD} + \frac{1}{AB} \right) = \frac{(AP + PD)}{AD} \Leftrightarrow PM = \frac{AB \cdot CD}{AB + CD}$$

Potom pre dĺžku priečky PQ máme

$$PQ = \frac{2 \cdot AB \cdot CD}{AB + CD} = \frac{2ac}{a + c},$$

čo je harmonický priemer dĺžok základní lichobežníka. V prostredí programu GeoGebra overíme túto rovnosť tak, že do vstupného poľa napíšeme príkaz

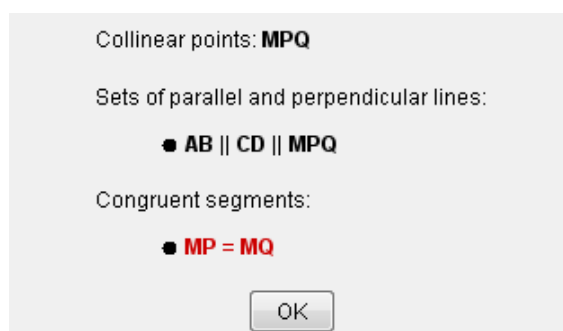
$$\text{ProveDetails}(s == (2ac)/(a + c)),$$

kde s je dĺžka priečky PQ . Následne v algebraickom okne dostaneme odpoveď v tvare:

$$\{true, \{ "2ac + as = cs", "as = 2ac + cs", "AreCollinear[A, B, C] " \} \}$$

Znamená to, že za predpokladu nekolineárnosti bodov A, B, C (vrcholov lichobežníka), ako aj $A \neq B$ a $C \neq D$, dĺžka priečky PQ lichobežníka prechádzajúcej priesečníkom jeho uhlopriečok je rovná harmonickému priemeru dĺžok jeho základní.

Poznámka: V poslednom období sú do programu GeoGebra implementované nové funkcie. Jednou z nich je aj nástroj *Discover*, dostupný v samostatnom inštalačnom balíku *GeoGebra Discovery* [7]. Ide o nástroj na analýzu geometrických konštrukcií a hľadanie vzťahov medzi útvarmi. V súčasnosti je takáto forma automatizovaného objavovania pomocou nástroja *Discover* obmedzená na hľadanie 'zaujímavých' vlastností iba pre body. Pre našu úlohu by to znamenalo, že po zostrojení lichobežníka $ABCD$, priesečníka M uhlopriečok a jeho priečky PQ požadovaných vlastností, nás zaujíma, aké vlastnosti má napr. krajný bod P priečky. Do vstupného poľa napíšeme *Discover(P)*. V novom okne (označenom „*Discovered theorems on point P*“) dostaneme odpoveď, v ktorej sú všetky programom získané vzťahy pre bod P , vrátane platnosti nami požadovaného tvrdenia $MP \cong MQ$ (obrázok 9).

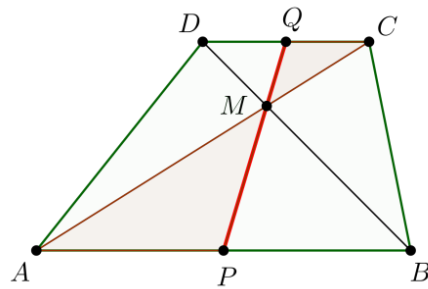


Obrázok 9

Záverečná situácia

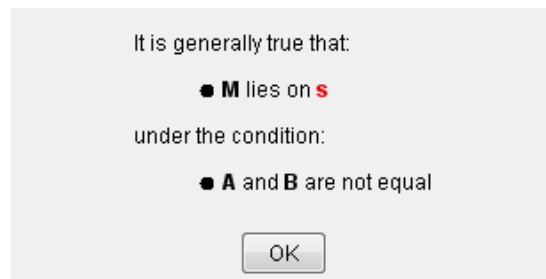
Nech body P, Q sú stredmi základní AB, CD daného lichobežníka. Dokážte, že priesečník M jeho uhlopriečok leží na priečke PQ daného lichobežníka.

Riešenie: Požadovanú situáciu môžeme zobraziť v prostredí programu GeoGebra nasledovne. Nech bod M je priesečník uhlopriečok lichobežníka a PQ priečka požadovaných vlastností, t.j. P je stred AB a Q stred CD (obrázok 10).



Obrázok 10

Kolineárnosť bodov P, Q, M overíme nástrojom *Relation*, resp. do vstupného poľa programu napíšeme jeden z príkazov *AreCollinear(P, Q, M)* alebo *Relation(M, s)*, kde písmenom s je označená priečka PQ (úsečka s krajnými bodmi P, Q). V prvom prípade je výsledkom logická hodnota 'true/pravda' v zozname algebraického okna. V druhom prípade je v novom okne zobrazený výsledok, že bod M leží na s (numericky overené). Po kliknutí na podrobnosti (tlačidlom "More. . .") získame podrobnejšiu odpoveď, že overovaný vzťah incidencie platí vo všeobecnosti a za podmienky, keď vrcholy A, B sú navzájom rôzne (obrázok 11).



Obrázok 11

Po overení kolineárnosti trojice bodov P, Q, M v programe GeoGebra môžeme prejsť ku formálnemu dôkazu tejto vlastnosti.

Dôkaz 1: Ak P, Q sú stredmi základní AB a CD lichobežníka, tak z podobnosti trojuholníkov ABM a CDM , v ktorých sú zhodné všetky zodpovedajúce dvojice vnútorných uhlov, máme:

$$AM : CM = AB : CD = (2AP) : (2CQ) = AP : CQ.$$

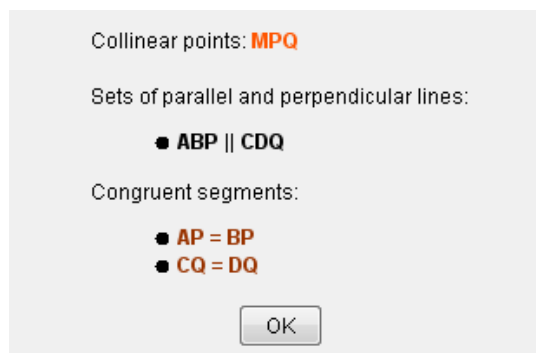
Z predchádzajúceho, ako aj zo zhodnosti uhlov $\angle PAM$ a $\angle QCM$ vyplýva, že trojuholníky PAM a QCM sú podobné, teda ich vnútorné uhly pri vrchole M sú zhodné, t.j. $\angle PAM \cong \angle QCM$. Tieto uhly sú vrcholové a vzhľadom na kolineárnosť bodov A, M, C dostávame, že body P, Q, M sú kolineárne, t.j. bod M leží na priečke PQ daného lichobežníka.

Dôkaz 2: Podobne ako v predchádzajúcich situáciách, možno k dôkazu požadovaného vzťahu použiť metódu s využitím výpočtu obsahu. Predpokladajme, že bod P je stred základne AB lichobežníka a bod M priesečník jeho uhlopriečok. Označme Q priesečník priamky PM s druhou základňou CD lichobežníka. Ak využijeme už skôr uvedené pomocné lemy, tak $S_{ABD} = S_{ABC}$, $S_{APQ} = S_{APC}$, odkiaľ $S_{AMD} = S_{CMB}$, $S_{AMQ} = S_{CMP}$. Nakoniec dostávame:

$$\frac{DC}{QC} = \frac{S_{AMD}}{S_{AMQ}} = \frac{S_{CMB}}{S_{CMP}} = \frac{AB}{AP} = 2,$$

čo znamená, že bod Q je stredom základne CD a priečka PQ lichobežníka má požadované vlastnosti.

Poznámka: Ak sa rozhodneme, podobne ako v predchádzajúcej úlohe, siahnuť v programe GeoGebra po nástroji *Discover*, tak nás zaujíma, aké vlastnosti má krajný bod Q priečky. Do vstupného poľa napíšeme *Discover(Q)*. V novom okne (označenom „*Discovered theorems on point Q*“) dostaneme odpoveď, v ktorej sú programom získané vzťahy pre bod Q , vrátane kolineárnosti bodov P, Q, M (obrázok 12).



Obrázok 12

Záver

Nemalá miera formalizmu vo vyučovaní na našich školách znižuje rozvoj žiackej schopnosti abstrahovať, logicky myslieť a tiež neprispieva k prirodzenému osvojeniu nových poznatkov, pojmov a zákonitostí v celistvosti a úplnosti. Je zrejmé, že čím názornejšia je výučba, tým je osvojenie nových poznatkov jednoduchšie, rýchlejšie a efektívnejšie. V tomto článku sme upriamili našu pozornosť na možnosti použitia programu GeoGebra nielen pri vizualizácii geometrických situácií, ale aj na jej uplatnenie v procese objavovania niektorých vzťahov medzi rovinnými geometrickými útvarmi, konkrétne pre prípad lichobežníka a jeho priechok. Čiastočne sme načrtli aj základné možnosti využitia novšieho nástroja *Discover*, ktorý je implementovaný do programu GeoGebra. Avšak, vzhľadom aj na dnes prítomné niektoré technické obmedzenia tohto nástroja, si svoje miesto nájde prevažne iba medzi učiteľmi. Súvisí to pravdepodobne s tým, že nástrojom *Discover* vieme v obmedzenej miere buď overiť niektorú z vlastností geometrických útvarov v nami vopred uskutočnenej konštrukcii, alebo sa nám podarí objaviť vlastnosť novú, pre nás v danom momente nepoznanú.

Literatúra

- [1] Kovács, Z. (2018). Automated reasoning tools in GeoGebra: A new approach for experiments in planar geometry. *South Bohemia Mathematical Letters* 25, 48-65
- [2] Kovács, Z. (2015). *Computer Based Conjectures and Proofs in Teaching Euclidean Geometry*. PhD thesis, Johannes Kepler University, Linz, Austria
- [3] Kovács, Z. (2015). The Relation Tool in GeoGebra 5. In: Botana F., Quaresma P. (eds) *Automated Deduction in Geometry. ADG 2014. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 9201. Springer

- [4] Billich, M. (2015). The Area Method and Proving Plane Geometry Theorems. In: Mityushev V., Ruzhansky M. (eds) *Current Trends in Analysis and Its Applications*. Trends in Mathematics. Birkhäuser
- [5] Janičić, P., Narboux, J., Quaresma, P. (2012). The Area Method. *Journal of Automated Reasoning* 48, 489–532
- [6] Quaresma, P., Janičić, P. (2009). *The Area Method. Rigorous Proofs of Lemmas in Hilbert's Style Axioms Systems*. Technical Report TR2006/001, Center for Informatics and Systems of the University of Coimbra
- [7] Kovács, Z. (2020). *GeoGebra Discovery. A GitHub project* Dostupné na internete: <https://github.com/kovzol/geogebra-discovery>. Citované online: 26.3.2021.