Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 6, No. 2, p. 1 – 17
ISSN 2453-6083

Matematické bohatstvo Fibonacciho čísel
Mathematical Treasure of Fibonacci Numbers

Miroslav Chválny[a]

[a1]*Stredná priemyselná škola stavebná, Cabajská 4, 950 50 Nitra, Slovakia*

Received September 7, 2020; received in revised form October 9, 2020; accepted October 14, 2020

Abstract

In this article, we discuss relationships between Pascal's triangle and the Fibonacci sequence. We point out some attributes of Fibonacci numbers, a triangular number field similar to Pascal's triangle, which is composed form Fibonacci numbers. We derive relations for diagonal and row sums of the Hosoya's Triangle.

Keywords: Pascal's Triangle, Fibonacci Sequence, Hosoya's Triangle.

Classification: 97A20

Úvod

Zrejme najvýznamnejší európsky matematik stredoveku Leonardo Pisánsky, známy viac pod prezývkou Fibonacci, sa zapísal do dejín matematiky predovšetkým tým, že oboznámil Európu s indicko-arabskou pozičnou desiatkovou sústavou. Okrem toho jeho kniha Liber abaci obsahuje riešenia elementárnych problémov, vrátane tzv. úlohy o králikoch. Jedna z foriem motivácie žiakov, študentov i samotných učiteľov je historické bádanie, t. j. fenomén, ktorý obohacuje aj súčasný matematicko-pedagogický proces a zároveň podnecuje u žiakov záujem bádať a objavovať nové poznatky a nové súvislosti aj v 21. storočí.

Historické pozadie Fibonacciho postupnosti

Fibonacci, vlastným menom Leonardo Pisánsky (približne 1170 -1250). V roku 1202 napísal svoj najvýznamnejší spis „Liber abaci“ („Kniha o výpočtoch“), ktorý značne prepracoval v roku 1228. Knihu možno považovať za najpozoruhodnejšiu matematickú knihu celej stredovekej európskej histórie. V 12. kapitole o postupnostiach sa nachádzajú úlohy na výpočet súčtu prvých *n* členov aritmetickej postupnosti, geometrickej postupnosti, postupnosti druhých mocnín prirodzených čísel a špeciálnej postupnosti definovanej rekurentne.

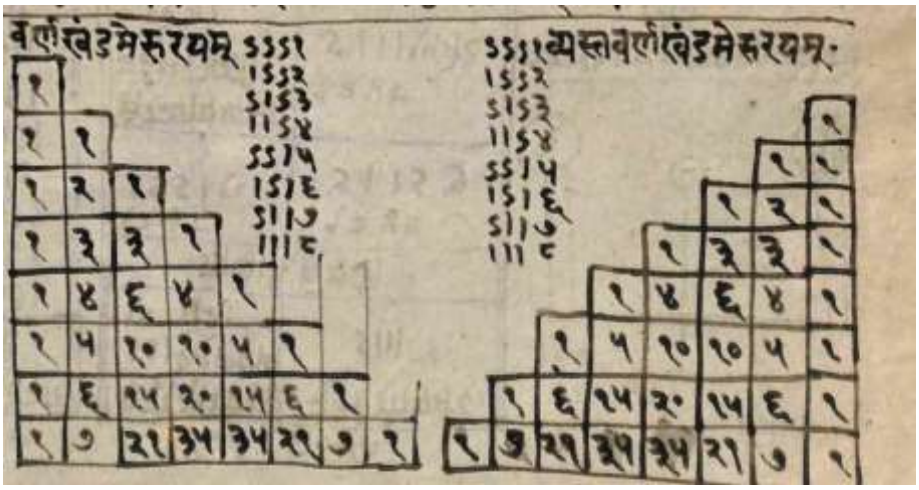
Táto posledná postupnosť sformulovaná ako úloha o rozmnožovaní králikov je zrejme najslávnejším matematickým objektom knihy. Úlohou je určiť počet králičích párov po jednom roku, keď na začiatku roka existuje jeden pár, po mesiaci sa mu narodí pár, ktorý je po mesiaci schopný rozmnožovania a ďalší mesiac má za potomkov ďalší pár, atď., pričom pôvodný pár má každý mesiac ako potomstvo ďalší pár a podobne to je aj s ďalšími pármi, pričom do roka žiaden pár neuhynie. Každý člen tejto postupnosti okrem prvých dvoch členov $F_1 = 1, F_2 = 1$ je daný rekurentným vzťahom

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \ \ n \in N.$$

[1]Corresponding author: m.chvalny@stonline.sk
DOI: 10.17846/AMN. 2020.6.2.1-17

Albert Girard (1595-1632), ako prvý uviedol rekurentnú definíciu tejto postupnosti v dnešnej podobe. V druhej polovici 19. storočia francúzsky matematik F. E. Lucas (1842-1891) skúmal niektoré vlastnosti členov tejto postupnosti. Bol to práve on, ktorý na počesť Leonarda zaviedol pomenovanie Fibonacciho postupnosť a jej členy nazval Fibonacciho čísla [1], [2] a [3].

Avšak v historických prameňoch nachádzame poznatky, ktoré nás zavedú do obdobia okolo roku 300 pred Kr., kedy žil staroveký indický matematik a básnik Acharya Pingala (पिङ्गल). O jeho živote vieme len veľmi málo. Bol autorom spisu Chandaḥśāstra (tiež nazývaný Pingala-sutras), v ktorom opísal prvé známe vysvetlenia binárnych čísel, Fibonacciho čísel (tzv. maatraameru) a Pascalovho trojuholníka (tzv. meru-prastaara, Obr. 1) [4] a [5].



Obr. 1: *Pingala Meru - Prastaara.* Zdroj:[6].

Fibonacciho postupnosť v Pascalovom trojuholníku

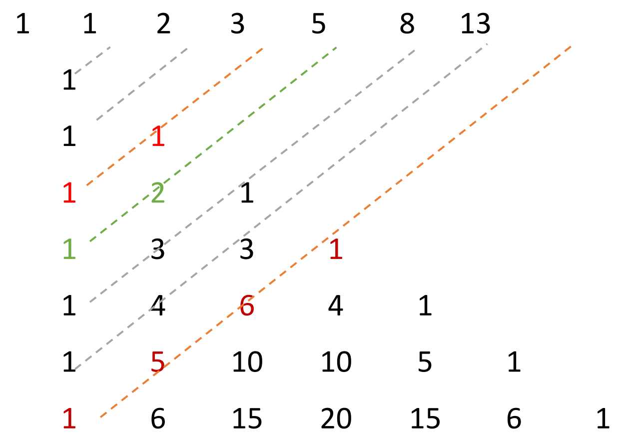
V tejto časti si ukážeme, kde sa v Pascalovom trojuholníku skrývajú Fibonacciho čísla. V roku 1654, v súvislosti so štúdiom pravdepodobnosti, B. Pascal napísal spis o tom , ktorý sa dnes nazýva Pascalov trojuholník [7].

Je to trojuholníkové číselné pole (Obr. 2) zostavené z kombinačných čísel $\binom{n}{k}$, kde $n \geq 0, 0 \leq k \leq n$; k, n sú celé čísla. Je zrejmé, že táto schéma je nekonečná. Nasledujúci obrázok zobrazuje Pascalov trojuholník pre $n = 6$.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

Obr. 2: *Pascalov trojuholník. Vlastný obrázok.*

Ak chceme zdôrazniť, kde sa v tejto schéme skrývajú Fibonacciho čísla, je výhodné prepísať Pascalov trojuholník do pravouhlého tvaru (Obr. 3). Určme súčet s_n všetkých kombinačných čísel, ktoré sa nachádzajú na priamke prechádzajúcej kombinačným číslom $\binom{n}{0}$ a zvierajú s príslušným riadkom tohto trojuholníka uhol 45°. Pre $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ dostaneme:



Obr. 3: *Pascalov trojuholník v pravouhlom tvare a Fibonacciho čísla. Vlastný obrázok.*

$$s_0 = \binom{0}{0} = 1 = F_1, \quad s_1 = \binom{1}{0} = 1 = F_2,$$

$$s_2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 2 = F_3, \quad s_3 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 3 = F_4,$$

$$s_4 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 5 = F_5, \quad s_5 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 8 = F_6,$$

$$s_6 = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 13 = F_7, \quad s_7 = \binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} = 21 = F_8 \,.$$

Na základe týchto súčtov môžeme vysloviť hypotézu, že postupnosť $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$. je totožná s postupnosťou $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \ \ldots$., t.j. pre všetky celé nezáporné čísla n platí $s_{n-1} = F_n$.

Konkrétne to znamená, že pre každé $n \in N$ platí

$$F_n = \begin{cases} \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}, & \text{ak } n \text{ je nepárne,} \\ \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n-2}{2}}, & \text{ak } n \text{ je párne.} \end{cases}$$

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Je jednoduché overiť, že identita platí pre $n = 1 \; a \; n = 2$; $F_1 = \binom{0}{0} = 1 \; a \; F_2 = \binom{1}{0} = 1$.

Predpokladajme, že identita platí pre hodnoty menšie ako n, dokážeme, že uvedená identita platí aj pre n.

a) Ak n je párne číslo, tak $n-2$ je párne číslo a $n-1$ je nepárne číslo, preto

$$F_{n-2} = \binom{(n-2)-1}{0} + \binom{(n-2)-2}{1} + .. + \binom{(n-2)-1-(i-1)}{i-1} + \cdots + \binom{\frac{(n-2)}{2}}{\frac{(n-2)-2}{2}},$$

$$F_{n-1} = \binom{(n-1)-1}{0} + \binom{(n-1)-2}{1} + \binom{(n-1)-3}{2} + \ldots + \binom{(n-1)-1-i}{i} + \ldots\ldots + \binom{\frac{(n-1)-1}{2}}{\frac{(n-1)-1}{2}}.$$

Využitím rekurentného vzťahu $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dostaneme, že

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots\ldots + \binom{n-1-i}{i} + \ldots. + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n-2}{2}}.$$

b) Ak n je nepárne číslo

c) $$F_{n-2} = \binom{(n-2)-1}{0} + \binom{(n-2)-2}{1} + \ldots + \binom{(n-2)-1-(i-1)}{i-1} + \cdots + \binom{\frac{(n-2)-1}{2}}{\frac{(n-2)-1}{2}},$$

$$F_{n-1} = \binom{(n-1)-1}{0} + \binom{(n-1)-2}{1} + \binom{(n-1)-3}{2} + \ldots + \binom{(n-1)-1-i}{i} + \ldots\ldots + \binom{\frac{(n-1)}{2}}{\frac{(n-1)-2}{2}},$$

dostaneme

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots\ldots + \binom{n-1-i}{i} + \ldots. + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}. \qquad [8].$$

Softvér *Mathematica* nám umožňuje vyčísliť Fibonacciho čísla aj s vysokými indexami.

Napríklad Fibonacciho čísla

$$F_{100} = \binom{99}{0} + \binom{98}{1} + \binom{97}{2} + \binom{96}{3} + \ldots + \binom{51}{48} + \binom{50}{49},$$

$$F_{200} = \binom{199}{0} + \binom{198}{1} + \binom{197}{2} + \binom{196}{3} + \ldots + \binom{101}{98} + \binom{100}{99},$$

$$F_{699} = \binom{698}{0} + \binom{697}{1} + \binom{696}{2} + \binom{695}{3} + \cdots + \binom{351}{347} + \binom{350}{348} + \binom{349}{349}$$

vyčíslime jednoduchým príkazom $Fibonacci[n]$, konkrétne

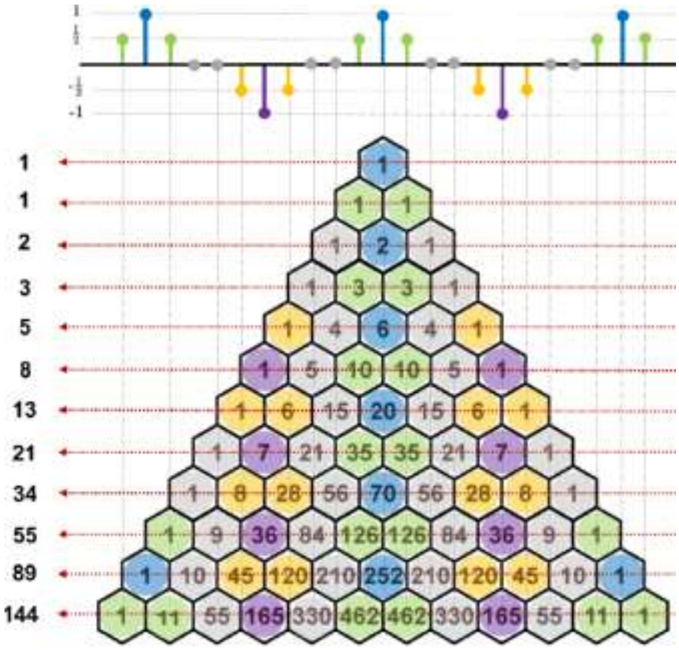
Fibonacci[100]= 354224848179261915075

Fibonacci[200] = 280571172992510140037611932413038677189525

Fibonacci[699] =
54059936666307888585371224524040479564193340847128274990827350 63
3697524067672844867129081639663420912107124987546834669159043581 5
3636317442639426.

Nová vizualizácia Fibonacciho čísel v Pascalovom trojuholníku

V roku 2018, Bernhard A. Moser uviedol nový spôsob výpočtu Fibonacciho čísel v Pascalovom trojuholníku [9].
Tento pôsobivý postup je založený na súčte čiastočných súčinov vytvorených jednotlivými prvkami Pascalovho trojuholníka a výberom prvkov z množiny $\left\{-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.



Obr. 4: *Nová vizualizácia Fibonacciho čísel v Pascalovom trojuholníku. Zdroj:* [9].

Napríklad,

$$144 = 1.\frac{1}{2} + 11.\frac{1}{2} + 55.0 + 165.(-1) + 330.0 + 462.\frac{1}{2} + 462.\frac{1}{2} + 330.0 + 165.(-1) + 55.0 + 11.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2} = F_{12}$$

Myšlienka novej identity sa opiera o vzťah $F_{k+1} = 1^T Q^k e_1$, kde e_k je k-rozmerný jednotkový vektor, $1^T = (1,1,1,1)$ a $Q = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$.

Po úpravách (pozri [10]), dostaneme nasledovné vzťahy, ak k je párne číslo, tak

$$F_{k+1} = \binom{k}{\frac{k}{2}} + 2\sum_{q=1}^{\left\lfloor \frac{k}{10} \right\rfloor} \binom{k}{\frac{k}{2} - 5q} - \sum_{\substack{q=1, \\ nepárne}}^{\left\lfloor \frac{k+1}{5} \right\rfloor} \binom{k+1}{\frac{k+1}{2} - 5q},$$

ak k je nepárne číslo, tak

$$F_{k+1} = \frac{1}{2}\binom{k+1}{\frac{k+1}{2}} - 2\sum_{\substack{q=1, \\ nepárne}}^{\left\lfloor \frac{k}{5} \right\rfloor} \binom{k}{\frac{k}{2} - \frac{5}{2}q} + \sum_{q=1}^{\left\lfloor \frac{k+1}{10} \right\rfloor} \binom{k+1}{\frac{k+1}{2} - 5q}.$$

Softvér *Mathematica* nám ponúka nástroje na overenie uvedených vzťahov aj aj pre pomerne vysoké indexy, napríklad pre $k = 166$, $k = 225$.

$$\mathrm{feven[k\_]:=Binomial}[k, \tfrac{k}{2}] + 2\sum_{q=1}^{\mathrm{Floor}[\frac{k}{10}]} \mathrm{Binomial}[k, (\tfrac{k}{2} - 5q)] - \mathrm{Sum}[\mathrm{Binomial}[(k+1), (\tfrac{k+1}{2} - \tfrac{5}{2}q)], \{q, 1, \mathrm{Floor}[\tfrac{k+1}{5}], 2\}]$$

$\mathrm{feven}[166]$
$356000755459584589632228765813167 53$

$$\mathrm{odd[k\_]:=}\tfrac{1}{2}\mathrm{Binomial}[(k+1), (\tfrac{k+1}{2})] - 2\mathrm{Sum}[\mathrm{Binomial}[k, (\tfrac{k}{2} - \tfrac{5}{2}q)], \{q, 1, \mathrm{Floor}[\tfrac{k}{5}], 2\}] + \sum_{q=1}^{\mathrm{Floor}[\frac{k+1}{10}]} \mathrm{Binomial}[k+1, (\tfrac{k+1}{2} - 5q)]$$

fodd[225]
76159080909572301618801306271765994056795952743

Záporné a kladné Fibonacciho čísla

Pomocou vzťahu $F_{-n} = (-1)^{n-1}F_n$ môžeme rozšíriť definíciu Fibonacciho postupnosti aj pre záporné celé čísla [11]. Tým dostaneme nasledovné členy

$$..,13,-8,5,-3,2,-1,1,0,1,1,2,3,5,8,13,...$$

Rekurentný vzťah $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre $n \in N$ je pritom zachovaný. Týmto môžeme vyjadriť Fibonacciho čísla pomocou číselných hodnôt príslušných riadkov Pascalovho trojuholníka pre každé $n \in N$.

Vyjadrenie $F_n, pre\ n \in [n, n+7]$ sú v Tab. 1 (pozri tiež [12]).

$F_n =$	**1** . F_n							
$F_{n+1} =$	**1** . F_n+	**1** . F_{n-1}						
$F_{n+2} =$	**1** . F_n +	**2** . F_{n-1}+	**1**. F_{n-2}					
$F_{n+3} =$	**1** . F_n +	**3** . F_{n-1}+	**3**. F_{n-2} +	**1**. F_{n-3}				
$F_{n+4} =$	**1** . F_n +	**4** . F_{n-1}+	**6**. F_{n-2} +	**4**. F_{n-3}+	**1**. F_{n-4}			
$F_{n+5} =$	**1** . F_n +	**5** . F_{n-1}+	**10**. F_{n-2} +	**10**. F_{n-3}+	**5**. F_{n-4}+	**1**. F_{n-5}		
$F_{n+6} =$	**1** . F_n +	**6** . F_{n-1}+	**15**. F_{n-2} +	**20**. F_{n-3}+	**15**. F_{n-4}+	**6**. F_{n-5}+	**1**. F_{n-6}	
$F_{n+7} =$	**1** . F_n +	**7** . F_{n-1}+	**21**. F_{n-2} +	**35**. F_{n-3}+	**35**. F_{n-4}+	**21**. F_{n-5}+	**7**. F_{n-6}+	**1**. F_{n-7}

Tab. 1: Vyjadrenie F_n pomocou Pascalovho trojuholníka.

Nech $n = 6$, potom máme nasledovné hodnoty:

$F_6 =$	**1** . F_6								= 8
$F_7 =$	**1** . F_6+	**1** . F_5							= 13
$F_8 =$	**1** . F_6 +	**2** . F_5+	**1**. F_4						= 21
$F_9 =$	**1** . F_6 +	**3** . F_5+	**3**. F_4 +	**1**. F_3					= 34
$F_{10} =$	**1** . F_6 +	**4** . F_5+	**6**. F_4 +	**4**. F_3+	**1**. F_2				= 55
$F_{11} =$	**1** . F_6 +	**5** . F_5+	**10**. F_4 +	**10**. F_3+	**5**. F_2+	**1**. F_1			= 89
$F_{12} =$	**1** . F_6 +	**6** . F_5+	**15**. F_4 +	**20**. F_3+	**15**. F_2+	**6**. F_1+	**1**. F_0		=144
$F_{13} =$	**1** . F_6 +	**7** . F_5+	**21**. F_4 +	**35**. F_3+	**35**. F_2+	**21**. F_1+	**7**. F_0+	**1**. F_{-1}	=233
$F_{14} =$	**1** . F_6 +	**8** . F_5+	**28**. F_4 +	**56**. F_3+	**70**. F_2+	**56**. F_1+	**18**. F_0+	**8**. F_{-1}+ **1**. F_{-2}	=377

Tab. 2: Vyjadrenie $F_6,..F_{14}$ pomocou Pascalovho trojuholníka.

Fibonacciho čísla vo vrstvách vekov

V nasledujúcej tabuľke je uvedený stručný historický prehľad najvýznamnejších výsledkov týkajúcich sa súvislostí Fibonacciho čísel a Pascalovho trojuholníka, ako aj ich súvislostí s mnohými inými matematickými objektmi a pojmami.

Tabuľka je zostavená chronologicky [pozri tiež 13].

Dátum	Udalosť (jav, objav, súvislosť)	Zdroj(e)
300 pr. n. l.	A.Pingala-Pingala sutras, maatrameru, meru-prastaara	[4], [5]
200 pr. n. l.	Indickí matematici používali *Pascalov trojuholník* iba v úlohách kombinatoriky.	[19, (s. 27]
1100	Ťia Sien sa v diele *Vysvetlenie tabuliek reťazovej metódy odmocňovania* zaoberá výpočtom štvrtých odmocnín použitím dnešných binomických čísel $\binom{n}{k}$ len do n=6.	[2, (s. 234] [19, (s. 27]
1202	Prvé vydanie knihy *Liber abaci*.	[13, (s.17)] [14, (s. 100)]
1228	Prepracované vydanie knihy *Liber abaci*-Úloha o králikoch, prvýkrát sa objavujú Fibonacciho čísla.	[13, (s.17, 31)]
1303	Ču Š-ťie (1260-1320) v *Jaspisovom zrkadle štyroch prvkov* uvádza trojuholníkovú tabuľku binomických čísel $\binom{n}{k}$ až po n=8.	[2, (s. 235] [19, (s. 27]
1427	Al-Káší (okolo 1370-1429)-dielo *Kľúč aritmetiky* obsahuje tabuľku binomických koeficientov až po deviatu mocninu.	[2, (s. 278] [19, (s. 287]
1527	Petrus Apianus (1495-1522) – prvý záznam Pascalovho trojuholníka v Európe.	[2, (s. 461] [19, (s. 28]
1544	Michael Stifel (1487-1567)-publikoval časť Pascalovho trojuholníka.	[2, (s. 461] [19, (s. 28]
1556	N. Fontana Tartaglia (1500-1577)-vydal šesť riadkov Pascalovho trojuholníka.	[2, (s. 461]
1665	B. Pascal (1623-1662)-rozvoj binomických koeficientov alebo Pascalov trojuholník publikované v diele *Pojednanie o aritmetickom trojuholníku* (Traité du triangle aritmétique).	[2, (s. 461)]
1680	Giovani D. Cassini-objavil identitu: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n,\ \ pre\ n \geq 1.$	[13, (s.171)]
1753	Škótsky matematik R. Simson (1687-4768) dokázal rovnosť: $\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$, a vzťah: $C_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}\ , pre\ n \geq 1.$	[13, (s.114, 149)]
1765	Leonhard Euler publikoval formulu: $F_n = \frac{\Phi^n - (\Phi')^n}{\sqrt{5}}.$	[13, (s.116)]
1843	Francúzsky matematik Jacques P. M. Binet znovu objavil formulu: $F_n = \frac{\Phi^n - (\Phi')^n}{\Phi - \Phi'} = \frac{\Phi^n - (\Phi')^n}{\sqrt{5}}$. Dnes označujeme Binetov vzorec.	[1, (s.201)] [13, (s.116)]
1876	Édouard Lucas prvýkrát uverejnil identitu: $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1,$ a $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$	[13, (s.168, 170)]
2. pol. 19. stor.	É. Lucas prvýkrát nazval postupnosť $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ ,\ pre\ n \in N, pričom\ F_1 = 1\ a\ F_2 = 1$, postupnosťou Fibonacciho čísel.	[13, (s.17, 92)]
zač. 20. stor.	Americký matematik Mark Barr (1871-1950) zaviedol označenie: $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \ (\doteq 1{,}6180339887498948482 \ldots).$	[13, (s.113)]
1964	John H. E. Cohn-dokázané, že jediná Fibonacciho čísla tvaru $F_n = x^2, (n \in N)\ sú\ \ F_1 = F_2 = 1, F_{12} = 144;$ a jediná Fibonacciho čísla tvaru $F_n = 2x^2, (n \in N)$ sú $F_3 = 2\ (x = 1)\ a\ F_6 = 8, (x = 2).$	[13, (s.126)]
1976	Haruo Hosoya-zostavil trojuholníkové číselné pole, tzv. Hosoyov trojuholník: $H(m,k) = F_{k+1}F_{m-k+1}$.	[15, (s. 187-195)]
2007	R. J. McIntosh a E. L. Roettiger-posledné výsledky týkajúce sa nájdenia Fibonacciho-Wieferichova prvočísla.	[13, (s.224)]

2018	Bernhard A. Moser-nová vizualizácia Fibonacciho čísel.	[9], [10]

***Tab. 3:** Chronologický prehľad vývoja poznatkov o Fibonacciho postupnosti.*

Hosoyov trojuholník

V roku 1976, Haruo Hosoya z Ochanomizuskej Univerzity v Tokiu zostavil trojuholníkové číselné pole (Obr. 5), podobné Pascalovmu trojuholníku. Nazývame ho *Hosoyov trojuholník*.

Usporiadanie čísel je súmerné podľa priamky **p** prechádzajúcej vrcholom. Dve okrajové diagonály, severovýchodná a juhovýchodná, pozostávajú z Fibonacciho čísel. Každé vnútorné číslo je súčtom dvoch predchádzajúcich čísel na jeho uhlopriečke, napr.: 6=2+4=3+3.

Ak $H(m,k)$ je Hosoyov koeficient pre riadok $m = 0,1,2,3,..$. a stĺpec $k = 0,1,2,...$, potom

m=0	k=0	$H(0,0)$						
		1						
m=1	k=0,1	$H(1,0)$	$H(1,1)$					
		1	1					
m=2	k=0,1,2	$H(2,0)$	$H(2,1)$	$H(2,2)$				
		2	1	2				
m=3	k=0,1,2,3	$H(3,0)$	$H(3,1)$	$H(3,2)$	$H(3,3)$			
		3	**2**	2	**3**			
m=4	k=0, ...,4	$H(4,0)$	$H(4,1)$	$H(4,2)$	$H(4,3)$	$H(4,4)$		
		5	3	**4**	**3**	5		
m=5	k=0,....,5	$H(5,0)$	$H(5,1)$	$H(5,2)$	$\boldsymbol{H(5,3}$	$H(5,4)$	$H(5,5)$	
		8	5	6	**6**	5	8	
m=6	k=0,....,6	$H(6,0)$	$H(6,1)$	$H(6,2)$	$H(6,3)$	$H(6,4)$	$H(6,5)$	$H(6,6)$
		13	8	10	9	10	8	13

***Obr. 5**: Hosoyov trojuholník.* Zdroj: [15].

Na začiatku generovania Hosoyovho trojuholníka sú definované štyri začiatočné podmienky: $H(0,0) = H(1,0) = H(1,1) = H(2,1) = 1$. Každý prvok $H(m,k)$ číselného poľa môžeme rekurzívne definovať nasledovne:

$$H(m,k) \ = H(m-1,\ k) + H(m-2,k)$$
$$= H(m-1\,, k-1) + H(m-2,\ k-2),\ \text{kde } m \geq k \geq 0, m \geq 2, m,k \ \in N.$$

Keďže platí: $H(m,0) = H(m-1,0) + H(m-2,0)$,

$$H(0,0) = 1 = F_1,\ H(1,0) = 1 = F_2\,,\ H(2,0) = 2 = F_3\,,\ H(3,0) = 3 = F_4\,, \ldots$$

z toho vyplýva vzťah medzi $H(m,k)$ a Fibonacciho číslami: $H(m,0) = \ F_{m+1}$.

Podobne dostaneme nasledujúce vzťahy: $H(m,m) = H(m,0) = F_{m+1}$,

$$H(m,m-1) = H(m,1) = F_m\,.$$

Uvažujme už uvedenú rovnosť: $H(m,k) \ = H(m-1,\ k) + H(m-2,k)$, ktorú rekurzívne upravíme:

$$H(m,k) \ = H(m-1, \qquad k) + H(m-2,k) \ =$$
$$= [H(m-2,k) + H(m-3,k)] + H(m-2,k) \ =$$
$$= 2\,H(m-2,k) + H(m-3,k) \ =$$

$$= 2\,[H(m-3,k\,) + H(m-4,k)] + H(m-3,k) =$$
$$= 3\,H(m-3,k) + 2H(m-4,k)$$

Pokračovaním získame nasledovný vzťah medzi $H(m,k)$ a Fibonacciho číslami:

$$\boldsymbol{H(m,k) = F_{j+1}H(m-j,k) + F_jH(m-j-1,k),\qquad kde\ 1 \le j \le m-k-1.}$$

Označme vzťahom $j = m-k-1$, ktorý dosadíme do posledného výrazu, potom dostaneme:

$$\boldsymbol{H(m,k)} = F_{m-k}\,H(k+1,k) + F_{m-k-1}\,H(k,k) =$$
$$= F_{m-k}\,F_{k+1} + F_{m-k-1}\,F_{k+1} =$$
$$= F_{k+1}\,(F_{m-k} + F_{m-k-1}) =$$
$$= \boldsymbol{F_{k+1}\,F_{m-k+1}}\,,$$

teda každé číslo $H(m,k)$ sa rovná súčinu dvoch Fibonacciho čísel, keďže platí aj $H(m,k) = H(m,m-k)$, čo je dôsledok súmernosti Hosoyovho trojuholník je

$$\boldsymbol{H(m,k) = H(m,m-k) = F_{k+1}\,F_{m-k+1}\,.}$$

Napríklad:

- $H(6,2) = 10 = 2\,.\,5\ = F_3\,F_5$
- $H(9,6) = 39 = 3.\,13 = F_4\,F_7$
- $H(15,4) = 720 = 5.\,144 = F_5\,F_{12}$

Softvér Mathematica nám umožňuje vypočítať hodnoty $H(m,k)$ s vyššími indexmi:

- $H(25,4) = 88\,555 = 5\,.\,17\,711 = F_5\,F_{22}$
- $H(30,12) = 974\,173 = 233\,.\,4\,181 = F_{13}\,F_{19}$.

Položme $m = 2r, k = r$, potom $H(2r,r) = F_{r+1}\,F_{2r-r+1} = F_{r+1}F_{r+1} = F_{r+1}^2$.

Čísla $H(2r,r)$ sa nachádzajú pozdĺž osi súmernosti a rovnajú sa druhým mocninám Fibonacciho čísel.

Napríklad:

- $H(2,1) = 1 = F_2^2$
- $H(4,2) = 4 = F_3^2$
- $H(6,3) = 9 = F_4^2$
- $H(8,4) = 25 = F_5^2$
- $H(10,5) = 64 = F_6^2$
- $H(30{,}15) = 974169 = F_{16}^2$

Výpis číselných hodnôt Hosoyovho trojuholníka pre riadok s indexom $m = 15$:

Column[Table[H[m, k],{m,30, 30},{k, 0, m}], Center]

{1346269, 832040, 1028458, 953433, 982090, 971144, 975325, 973728, 974338, 974105, 974194, 974160, 974173, 974168, 974170, 974169, 974170, 974168, 974173, 974160, 974194, 974105, 974338, 973728, 975325, 971144, 982090, 953433, 1028458, 832040, 1346269}

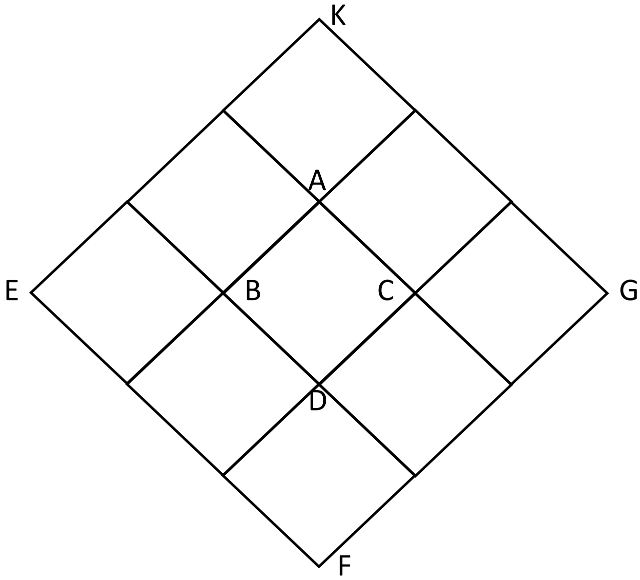
Magický kosoštvorec

Generovanie Hosoyovho trojuholníka začína štyrmi začiatočnými podmienkami, kde každé číslo môžeme považovať za vrchol kosoštvorca s jednotkovou stranou.

V skutočnosti je možné túto úvahu zovšeobecniť, teda použiť pre ktorýkoľvek kosoštvorec s najbližšími vrcholmi, napr.:

$$H(i,k), H(i-1,k-1), H(i-2,k-1), H(i-1,k).$$

Uvažujme (tzv. magický) kosoštvorec (Obr. 6) s vrcholmi *ABCD*.
Ak položíme $i=6, k=3$, potom $A=H(4,2)=4$, $B=H(5,2)=6$, $C=H(5,3)=6$, $D=H(6,3)=9$.



***Obr. 6**: Magický kosoštvorec 1. Zdroj:* [15].

Potom dostaneme:

- $F=A+B+C+D=25=H(8,4)=H(i+2,k+1)$
- $K=A+D-B-C=1=H(2,1)=H(i-4,k-2)$
- $E=C+D-A-B=5=H(5,1)=H(i-1,k-2)$
- $G=B+D-A-C=5=H(5,4)=H(i-1,k+1)$

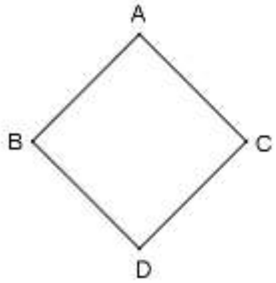
Vo všeobecnosti platia nasledovné vzorce:

$$\boldsymbol{H(m+2,k+1)=H(m,k)+H(m-1,k)+H(m-1,k-1)+H(m-2,k-1)}$$
$$\boldsymbol{H(m-4,k-2)=H(m-2,k-1)+H(m,k)-H(m-1,k-1)-H(m-1,k)}$$
$$\boldsymbol{H(m-1,k-2)=H(m,k)+H(m-1,k)-H(m-1,k-1)-H(m-2,k-1)}$$
$$\boldsymbol{H(m-1,k+1)=H(m-1,k-1)+H(m,k)-H(m-2,k-1)-H(m-1,k)}$$

Zaoberajme sa teraz súčinom hodnôt *A* a *D*, *B* a *C* vo vrcholoch (magického) kosoštvorca (Obr. 7) *ABCD*, kde $A=H(7,4)=15$, $D=H(9,5)=40, B=H(8,4)=25, C=H(8,5)=24$.

Výpis číselných hodnôt Hosoyovho trojuholníka pre riadok s indexom m= 7, 8, a 9.

```
Column[Table[H[m, k],{m, 7, 9},{k, 0, m}], Center]
{{{21,13,16,15,15,16,13,21}},
{{34,21,26,24,25,24,26,21,34}},
{{55,34,42,39,40,40,39,42,34,55}}}
```



***Obr. 7**: Magický kosoštvorec 2. Zdroj:* [15].

Je zrejmé, že

$$15\,.\,40 = 25\,.\,24,$$

teda súčiny hodnôt v protiľahlých vrcholoch kosoštvorca ABCD sa navzájom rovnajú. Tento poznatok môžeme vyjadriť všeobecným vzťahom,

$$H(m,k).\,H(m-2,k-1) = H(m-1,k-1).\,H(m-1,k)$$

alebo v tvare:

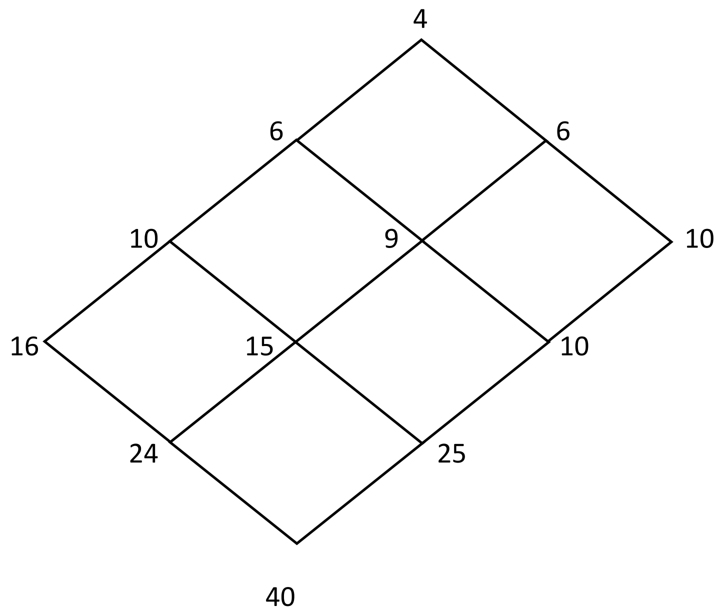
$$\frac{H(m,k)\;H(m-2,k-1)}{H(m-1,k-1)\;H(m-1,k)} = 1$$

Posledný vzťah je možné rozšíriť pre hodnoty vo vrcholoch ľubovoľného rovnobežníka.

Napríklad, nech skupina (pole) rovnobežníkov (Obr. 8) je ohraničená nasledovnými vrcholmi $A = H(4,2) = 4$, $D = H(9,4) = 40$, $B = H(7,2) = 16, C = H(6,4) = 10$.

Potom platí:
$40.4 = 16.10$
25. 6 = 15.10
24. 6 = 16. 9
15 .4 = 10. 6

....

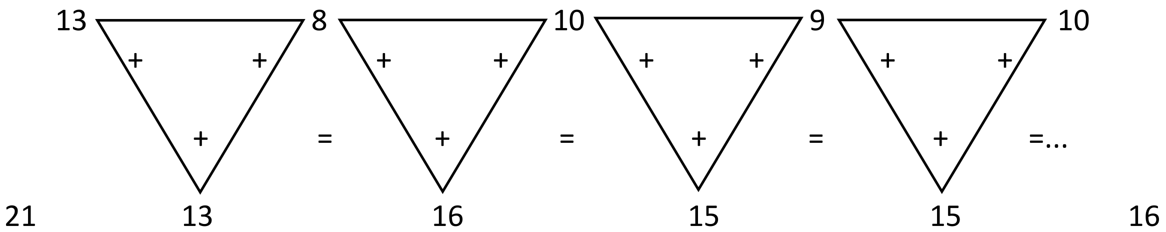


***Obr. 8**: Magický kosoštvorec 3. Zdroj:* [15].

Ostatné súčiny môžu byť overené podobne.

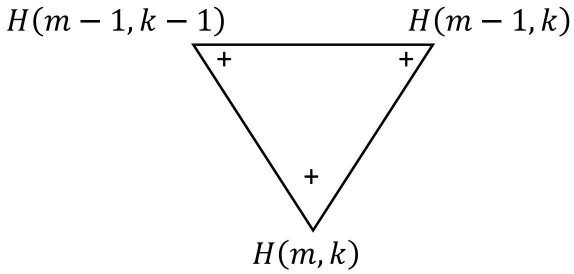
Skupiny trojuholníkov

V ďalšej časti sa sústredíme na skupinu (pole) trojuholníkov, usporiadaných s dvoma vrcholmi v jednom rade a tretím vrcholom smerujúcim nadol (Obr. 9).



Obr.: 9: *Skupina trojuholníkov 1. Zdroj:* [15].

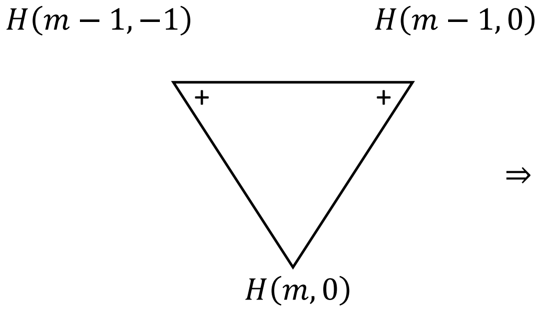
Súčet hodnôt vo vrcholoch v každom trojuholníku sa rovná *34*. Všeobecne označme (Obr. 10):



Obr.: 10. *Zdroj:* [15].

potom platí: $H(m,k)+H(m-1,k-1)+H(m-1,k)$ je konštanta pre každé m.

Hľadajme jej hodnotu, vyjadrenú ako Fibonacciho číslo (Obr. 11). Je zrejmé, že platí:



$$\Rightarrow H(m,0)+H(m-1,0)+H(m-1,-1)= F_{m+1}+F_m=F_{m+2}\,.$$

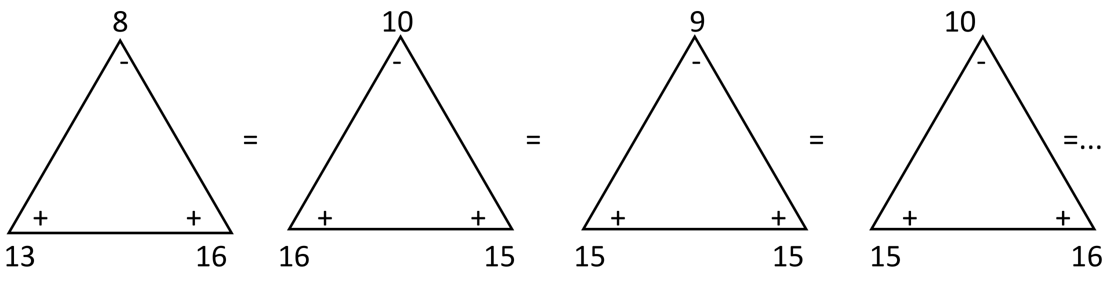
Obr.: 11. *Zdroj:* [15].

Konštanta pre danú skupinu trojuholníkov je teda daná vzťahom:

$$H(m,k)+H(m-1,k-1)+H(m-1,k)=F_{m+2}.$$

Overenie získaných výsledkov: $(13+8+13),(8+13+16),(10+9+15),\ldots=34$, kde $m=7, a\ F_9=34$, čo bolo konštatované.

Teraz zmeníme usporiadanie vrcholov v skupine (v poli) trojuholníkov a to s dvoma vrcholmi v jednom rade a tretím vrcholom smerujúcim nahor (Obr. 12).

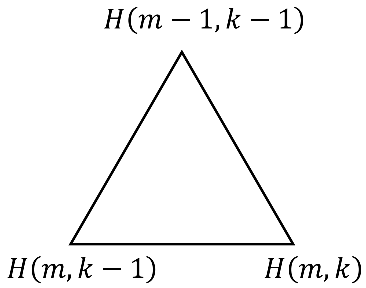


Obr.: 12: *Skupina trojuholníkov 2. Zdroj:* [15].

Nech: $A = H(7,2) = 16,\ B = H(7,3) = 15,\ C = H(6,2) = 10, potom\ A + B - C = 21,$

$$m = 7,\quad a \quad 21 = F_8 = F_{m+1}.$$

Všeobecne označme (Obr. 13):



Obr.: 13. *Zdroj:* [15].

potom konštantu pre danú skupinu trojuholníkov môžeme vyjadriť:

$$H(m,k) + H(m,k-1) - H(m-1,k-1) = F_{m+1}.$$

Hosoyov trojuholník nám ponúka skúmať ďalšie rôzne vzťahy medzi jeho prvkami. Pre ilustráciu uveďme aspoň niektoré [15].

Úloha. Dokážte, že platí:

$$H(m,k) + H(m-6,k-3) = 2\,F_{m-1},\quad H(m,k) - H(m-4,k-2) = F_m.$$

Diagonálne súčty Hosoyovho trojuholníka

Na základe vzťahu $\mathrm{H(m,k)} = \mathrm{F_{k+1}\,F_{m-k+1}}$ upravíme Hosoyov trojuholník do nasledovného tvaru:

F_1F_1 H1
1
H2
F_1F_2 F_2F_1 H3
1 1
H4
F_1F_3 F_2F_2 F_3F_1 H5
2 1 2
H6
F_1F_4 F_2F_3 F_3F_2 F_4F_1 H7
3 2 2 3
F_1F_5 F_2F_4 F_3F_3 F_4F_2 F_5F_1
5 3 4 3 5
F_1F_6 F_2F_5 F_3F_4 F_4F_3 F_5F_2 F_6F_1
8 5 6 6 5 8
F_1F_7 F_2F_6 F_3F_5 F_4F_4 F_5F_3 F_6F_2 F_7F_1
13 8 10 9 10 8 13

Obr. 14: *Hosoyov trojuholník-tvar súčinov $F_{k+1}\,F_{m-k+1}$. Vlastný obrázok.*

Uvažujme nasledovné diagonálne súčty:

- pre párny index: $H_2 = 1 = F_1F_2$
  $H_4 = 3 + 1 = F_1F_4 + F_2F_2 = 4$
  $H_6 = 8 + 3 + 2 = F_1F_6 + F_2F_4 + F_3F_2 = 13$

$$H_8 = 21 + 8 + 6 + 3 = F_1F_8 + F_2F_6 + F_3F_4 + F_4F_2 = 38$$

Vo všeobecnosti môžeme napísať: $H_n = F_1F_n + F_2F_{n-2} + F_3F_{n-4} + F_4F_{n-6} + \cdots + F_{\frac{n}{2}}F_2$

- pre nepárny index: $H_1 = 1 = F_1F_1$

$$H_3 = 2 + 1 = F_1F_3 + F_2F_1 = 3$$
$$H_5 = 5 + 2 + 2 = F_1F_5 + F_2F_3 + F_3F_1 = 9$$
$$H_7 = 13 + 5 + 4 + 3 = F_1F_7 + F_2F_5 + F_3F_3 + F_4F_1 = 25$$

Vo všeobecnosti môžeme napísať:

$$H_7 = F_1F_n + F_2F_{n-2} + F_3F_{n-4} + F_4F_{n-6} + \cdots + F_{\frac{n+1}{2}}F_1$$

Uvedené všeobecné vzťahy napíšeme podľa [16] v tvare:

$$H_n = F_1F_n + F_2F_{n-2} + F_3F_{n-4} + F_4F_{n-6} + \cdots + F_{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}F_{n-2\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil} = \sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor} F_pF_{n-2(p-1)}\,.$$

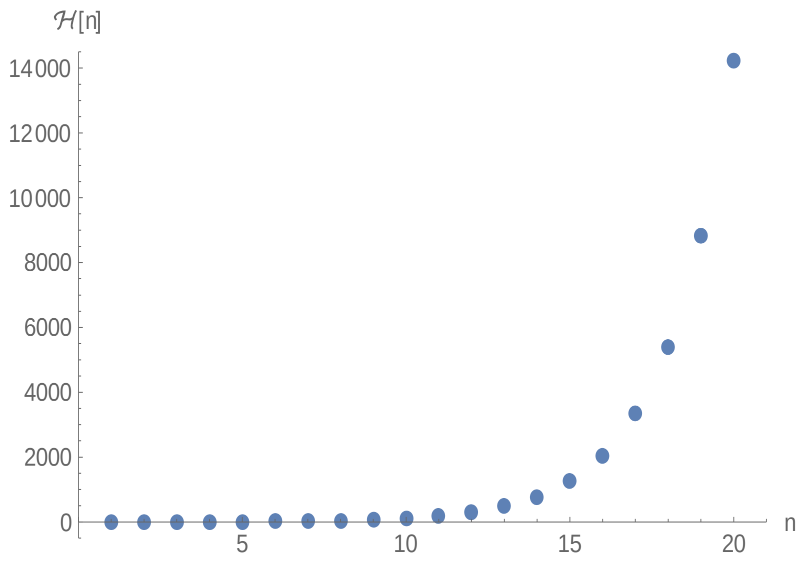
Výpis hodnôt prvých 50 -tich diagonálnych súčtov pomocou softvéru Mathematica:

$$\mathcal{H}[\mathrm{n\_}] := \mathrm{Sum}[\mathrm{Fibonacci}[p]\mathrm{Fibonacci}[n-2(p-1)], \{p, 1, \mathrm{Floor}[\tfrac{n+1}{2}], 1\}].$$

Table[$\mathcal{H}$[n],{n,1,50}]
{1, 1, 3, 4, 9, 13, 25, 38, 68, 106, 182, 288, 483, 771, 1275, 2046, 3355, 5401, 8811, 14212, 23112, 37324, 60580, 97904, 158717, 256621, 415715, 672336, 1088661, 1760997, 2850645, 4611642, 7463884, 12075526, 19541994, 31617520, 51163695, 82781215, 133951675, 216732890, 350695511, 567428401, 918141623, 1485570024, 2403740304, 3889310328, 6293097000, 10182407328, 16475579353, 26657986681}.

Grafické zobrazenie hodnôt prvých 20 -tich diagonálnych súčtov pomocou softvéru Mathematica (Obr. 15).

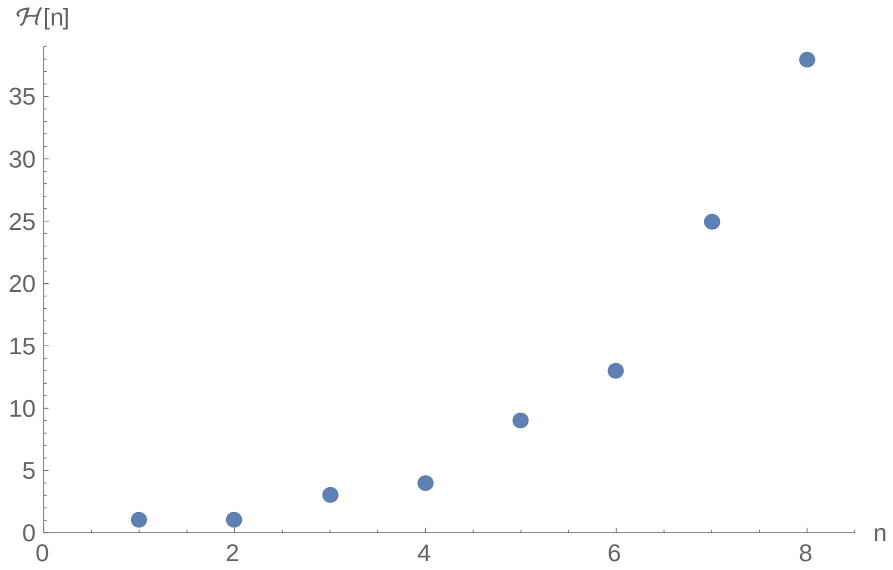
$S = \mathrm{Table}[\mathcal{H}[n], \{n, 1, 20\}]$,
{1,1,3,4,9,13,25,38,68,106,182,288,483,771,1275,2046,3355,5401,8811,14212}
gS=ListPlot[S, PlotStyle->PointSize[0.02], PlotRange->{{0, 21}, {-500, 14500}},Axes->True,AxesOrigin->Automatic, AxesLabel->{"n","$\mathcal{H}$[n]"}].



***Obr. 15:** Diagonálne súčty: $\mathcal{H}[n], \{n, 1, 20\}]$. Vlastný obrázok.*

Z uvedených výpisov hodnôt diagonálnych súčtov je zrejmé, že hodnoty značne rastú. Pre zjemnenie vizualizácie znázornime prvých 8 diagonálnych súčtov (Obr. 16):

$S = \text{Table}[\mathcal{H}[n], \{n, 1, 8\}],\ \{1,1,3,4,9,13,25,38\},$
$\text{gS} = \text{ListPlot}[S, \text{PlotStyle} \to \text{PointSize}[0.02], \text{PlotRange} \to \{\{0, 8.5\}, \{0, 39\}\}, \text{Axes} \to \text{True}, \text{AxesOrigin} \to \text{Automatic}, \text{AxesLabel} \to \{\text{"n"}, \text{"}\mathcal{H}[\text{n}]\text{"}\}]$



***Obr. 16:** Diagonálne súčty: $\mathcal{H}[n], \{n, 1, 8\}]$. Vlastný obrázok.*

Generujúce funkcie, ako matematický nástroj možno použiť, ak chceme určiť členy postupnosti (konečnej, alebo nekonečnej), ktoré súvisia s riešením nejakej úlohy. Vychádzajúc z tejto všeobecnej myšlienky a použitím daných vzťahov a postupu v [16], dostaneme vzorec pre členy postupnosti $\mathrm{H_n}$:

$$\mathrm{Hn} = \frac{1}{2}\left(F_{n+3} - F_{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-5}{2}\right\rfloor}\right).$$

Napríklad:

$$\mathrm{H}_8 = \frac{1}{2}\left(F_{11} - F_{2\left\lfloor\frac{8}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{3}{2}\right\rfloor}\right) = \frac{1}{2}\,(F_{11} - F_7) = \frac{1}{2}\,(89 - 13) = 38$$

Riadkové súčty Hosoyovho trojuholníka

Tvorivý aspekt matematiky možno spoznať aj pri hľadaní vzťahov pre riadkové súčty Hosoyovho trojuholníka. Označme $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$postupnosť riadkových súčtov, t, j.:

$$1, 2, 5, 10, 20, 38, 71, 130, 235, 420, \ldots..,$$

Kde na obr. 17 je znázornených prvých šesť riadkov. Zápis (zľava do prava) v r-tom riadku sa rovná:

$$F_1\, F_r + F_2 F_{r-1} + F_3 F_{r-2} + \cdots + F_{r-1} F_2 + F_r F_1 = \textstyle\sum_{k=1}^{r} F_k\, F_{r-k+1}.$$

Zo [16], [17] vieme, že r-tý súčet je daný vzťahom:

$$\sum_{k=1}^{r} F_k\, F_{r-k+1} = \frac{1}{5}(r\, F_{r+1} + 2(r+1)\, F_r).$$

Napríklad: nech r=5, potom dostaneme:

$$\sum_{k=1}^{5} F_k\, F_{5-k+1} = F_1\, F_5 + F_2F_4 + F_3F_3 + F_4F_2 + F_5F_1 \ = 1.5 + 1.3 + 2.2 + 3.1 + 5.1 = 5 + 3 + 4 + 3 + 5$$
$$= 20.$$

$$\tfrac{1}{5}(r\, F_{r+1} + 2(r+1)\, F_r) = \tfrac{1}{5}(5\, F_6 + 2(5+1)\, F_5) = \tfrac{1}{5}(5\,.8\ + 12\,.5) = \tfrac{1}{5}(40\ + 60) = 20.$$

$r_1 = 1$: F_1F_1 (1)

$r_2 = 2$: F_1F_2 (1), F_2F_1 (1)

$r_3 = 5$: F_1F_3 (2), F_2F_2 (1), F_3F_1 (2)

$r_4 = 10$: F_1F_4 (3), F_2F_3 (2), F_3F_2 (2), F_4F_1 (3)

$r_5 = 20$: F_1F_5 (5), F_2F_4 (3), F_3F_3 (4), F_4F_2 (3), F_5F_1 (5)

$r_6 = 38$: F_1F_6 (8), F_2F_5 (5), F_3F_4 (6), F_4F_3 (6), F_5F_2 (5), F_6F_1 (8)

Obr. 17: *Hosoyov trojuholník-riadkové súčty*. (*Vlastný obrázok)*.

Softvér *Mathematica* použijeme jednak pre výpis hodnôt riadku s vyšším indexom, aj na overenie súčtu daného riadka, napr.: r= 30, (m=29),

Column[Table[H[m,k],{m,29,29},{k,0,m}],Center]
{{{832040, 514229, 635622, 589254, 606965, 600200, 602784, 601797, 602174, 602030, 602085, 602064, 602072, 602069, 602070, 602070, 602069, 602072, 602064, 602085, 602030, 602174, 601797, 602784, 600200, 606965, 589254, 635622, 514229, 832040}}},

$$\sum_{k=1}^{30} F_k F_{-k+30+1} = 18394910 = \tfrac{1}{5}(2(30+1)F_{30} + 30F_{30+1}),$$

pre r=1000, získame nasledovnú hodnotu súčtu:

$$\sum_{k=1}^{1000} F_k F_{1000-k+1} = \frac{1}{5}(2(1000+1)F_{1000} + 1000F_{1000+1}) =$$
$$31470083240134320721216737456522976525383144038427407421674665344881344212986187092866163386880256116483637496117714381181631232378235290007738655532530599193749356272734535322456497561421290626022233871111941750$$

Záver

Článok poskytuje študentom matematiky (aj učiteľom z praxe) inšpiratívny a pútavý text z veľmi rozsiahlej problematiky, akou je Pascalov trojuholník a jeho súvislosti a vzťahy medzi rôznymi matematickými objektami: Fibonacciho postupnosť, Fibonacciho čísla, Hosoyov trojuholník. Slovenský matematik Štefan Znám sa v práci [18] vyjadril takto *„Fibonacciho čísla sú často „šedou eminenciou“ v pozadí riešenia praktických problémov“*.

Literatúra

[1] Fulier, J.,-Šedivý, O., 2001. *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky.* Nitra, UKF Nitra 2001., 270 s., ISBN 80-8050-445-8, (s. 195-196).

[2] Čižmár, J., 2017. *Dejiny matematiky. Od Najstarších čias po súčasnosť.* Prvé vydanie. Bratislava Perfekt 2017., 885 s., ISBN 978-80-8046-829-3, (s. 339-340).

[3] Seibert, J., 2018. *Fibonacciova čísla jako zdroj inspirace pro učitele.* Učitel matematiky. ISSN 1210-9037, 2018, ročník 26, číslo 1, (s. 51-52).

[4] https://mathigon.org/timeline/pingala (2020-05-04).

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Pingala (2020-05-04).

[6] https://wikivisually.com/wiki/Hosoya%27s_triangle (2020-05-22).

[7] Anglin, W., S., 1994. *Mathematics: A Concise History and Philosophy.* Springer-Verlag New York Inc. ISBN 0-387-94280-7, (s. 170).

[8] https://www.lehigh.edu/~gi02/math163/inductnotes.pdf (s. 10-11, 2020-05-26).

[9] Moser, B., A., 2018. *A Novel Fibonacci Pattern in Pascal´s Triangle.* (s. 1-4).
Dostupné na: https://arxiv.org/pdf/1811.02085v1.pdf (2020-06-04).

[10] Moser, B., A., 2014. *On a Multisection Style Binomial Summation Identity for Fibonacci Numbers.* Int. J. Contemp. Math. Sciences (IJCMS), vol. 9, no 4, s. 175-186.

[11] Halton, J., H., 1964. *On Fibonacci residues*. Fibonacci Quarterly, 1964, 2(3), s. 217-218.

[12] Posamentier, A., S., Lehmann, I., 2007. *The fabulous Fibonacci numbers*. Published 2007 by Prometheus Books New Your. ISBN 978-1-59102-475-0, (s.95-97).

[13] Jarošová, M., 2010. *Fibonacciho čísla a jejich aplikace.* Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Disertační práce. 2010. (s. 230-232).

[14] Pickover, A., C., 2012. *Matematická kniha.* Prvé vydanie v českom jazyku. Praha. Dokořán, Praha 5, 2012. 542. ISBN 978-80-7363-368-4 (Dokořán). ISBN 978-80-257-0705-0 (Argo).

[15] Koshy, T., 2001. *Fibonacci and Lucas numbers with application.* NewYork. John Wiley and Sons. 2001, 674s., ISBN 0-471-39969-8, (s. 187-195).

[16] Griffiths, M., 2011. *Fibonacci diagonalis.* The Fibonacci Quarterly, **49.1** (2011), s. 51-55.
Dostupné na: https://www.fq.math.ca/Papers1/49-1/GriffithsM.pdf (2020-06-08).

[17] Griffiths, M., 2010. *Digit Proportions in Zeckendorf Representations.* The Fibonacci Quarterly, Volume **48** (2010), Number 2, May 2010, s. 174.
Dostupné na: https://www.fq.math.ca/Papers1/48-2/Griffiths.pdf (2020-07-29).

[18] Znám, Š., 1986. *Teória čísel.* 2. vydanie. Bratislava: Alfa, 1986. 206s., (s. 141).

[19] Strečko, V., *Fragmenty z matematiky stredoveku.* Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 2, s. 27-28. http://dml.cz/dmlcz/146574