Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 6, No. 1. p. 37-50
ISSN 2453-6083

Tajomstvá skryté v Pascalovom trojuholníku

Secrets in Pascal's Triangle Hidden

Miroslav Chválny[a]

[a1]*Stredná priemyselná škola stavebná, Cabajská 4, 950 50 Nitra, Slovakia*

Received October 30, 2019; received in revised form March 27, 2020; accepted April 4, 2020

Abstract

In this article we deal with some numerical sequences in Pascal's triangle and also in its modification called harmonic triangle. Both objects are interconnected by different properties and relationships, from which we focus on infinite number series on diagonals.

Keywords: Pascal's triangle, harmonic triangle, sequence, infinite number series

Classification: 97A20

Úvod

Pascalov trojuholník sa v matematike preslávil vďaka svojej symetrii a rôznymi vzťahmi medzi kombinačnými číslami. Množstvo prepojení Pascalovho trojuholníka s viacerými disciplínami matematiky z neho urobilo zaujímavý matematický objekt. Cieľom tohto článku je poukázať na niektoré vlastnosti, vzťahy a skryté „tajomstvá".

Trochu z histórie

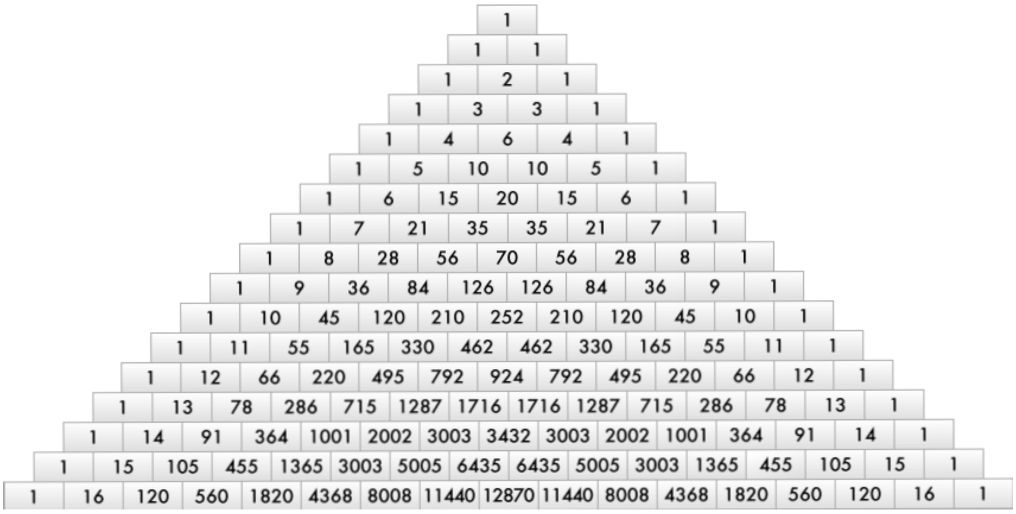
Samotný Blaise Pascal (1623-1662) v roku 1653 poznamenal, že by pravdepodobne nevedel opísať v jednej práci všetky jeho vlastnosti. [1] Poznamenávame, že Blaise Pascal tento trojuholník neobjavil. Uvedený trojuholník bol známy už čínskym učencom v 13. storočí n. l. Hoci tabuľku binomických koeficientov poznali už indickí matematici okolo 2. storočia pred n. l, v skutočnosti ho asi ako prvý zostavil čínsky matematik Jia Xian v 11. storočí a okolo roku 1100 aj perzský matematik a básnik Omar Chajjám. V Európe použil variáciu Pascalovho trojuholníka prvýkrát Petrus Apianus v roku 1527, učiteľ Karola IV., a binomickú vetu pravdepodobne ako prvý uviedol nemecký mních, reformátor a matematik Michael Stifel (1486-1597). [2]

Blaise Pascal dokončil odvodenie binomickej vety s použitím číselného trojuholníka až ako 30-ročný. Vtedy už mal na konte niekoľko objavov o vákuu a jednou z jeho najznámejších prác je *Traité du triangle arithmétique* (Pojednanie o aritmetickom trojuholníku), ktoré vyšlo v roku 1654. Obsahuje jednoduchý spôsob, ako vyčísliť kombinačné číslo $\binom{n}{m}$. Využitím vzťahu

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1},$$

[1]Corresponding author; email: mchvalny@stonline.sk
DOI: 10.17846/AMN.2020.6.1.37-50

kde $n, m, n \geq m + 1$ sú prirodzené čísla, je možné kombinačné čísla usporiadať do trojuholníkovej schémy, ktorú dnes poznáme pod názvom *Pascalov trojuholník*.



***Obr. 1**: Pascalov trojuholník.* Zdroj: [3]

Zostavenie Pascalovho trojuholníka je veľmi jednoduché.
Jednotlivé polia trojuholníka sa vyplnia podľa pravidla, kde každé číslo je súčtom dvoch políčok nad daným číslom.
Začína sa tak, že do prvého riadka napíšeme číslo 1. Druhý riadok sa skladá z dvoch polí, v ktorých sú opäť len jednotky. Tretí riadok má tri políčka, pričom končí a začína jednotkou (tak končí a začína každý riadok) a prostredné políčko bude doplnené o číslo 2, ktoré je súčtom políčok nad ním.
Podobne postupujeme v ďalších riadkoch; začíname a končíme riadok číslami 1, ostatné políčka sú súčtom dvoch políčok nad ním, ako sme už spomenuli.

Niektoré vlastnosti Pascalovho trojuholníka

Pascalov trojuholník má celý rad zaujímavých vlastností. Niektoré z nich si uvedieme bez dôkazov.

1. Každý vodorovný riadok začína a končí číslom 1: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. Začínajúc druhým vodorovným riadkom medzi dvoma číslami leží v nasledujúcom riadku ich súčet: $\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} = \binom{n}{m}$.
3. Pascalov trojuholník je súmerný podľa zvislej priamky p prechádzajúcej jeho „vrcholom“: $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.
4. Súčet kombinačných čísel $(n+1)$ –vého vodorovného riadku sa rovná 2^n

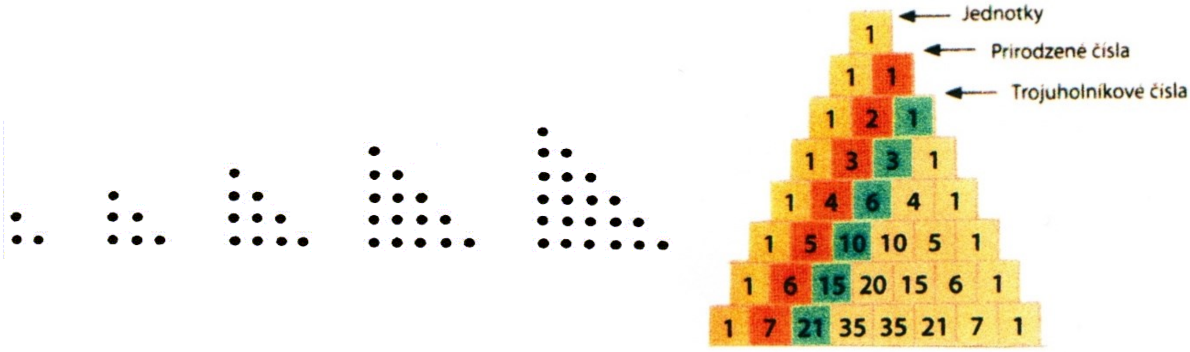
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

5. Ak sčítame v Pascalovom trojuholníku všetky čísla, ktoré ležia v tom istom šikmom riadku až do n-tého vodorovného riadku vrátane, dostaneme ako súčet číslo, ktoré leží v (n + 1)-vom vodorovnom riadku najbližšie napravo od posledného sčítanca.
   Napríklad, ak zvolíme $(m+1)$-vý šikmý riadok, v ktorom sa nachádzajú čísla $\binom{m}{m}$, $\binom{m+1}{m}$, $\binom{m+2}{m}$, $\binom{m+3}{m}, \dots$, $\binom{m+p}{m}, \dots$ potom pre ich súčet platí $\sum_{k=m}^{m+p}\binom{k}{m} = \binom{m+p+1}{m+1}$.
   Toto číslo leží šikmo vpravo najbližšie pod posledným sčítancom $\binom{m+p}{m}$.
6. Súčet druhých mocnín kombinačných čísel $(n+1)$ –vého vodorovného riadku Pascalovho trojuholníka sa rovná kombinačnému číslu $\binom{2n}{n}$.

Pripomeňme si, že grécka matematika bola geometrická. Gréci si čísla, ktorým dnes hovoríme prirodzené, predstavovali obvykle prostredníctvom nejakých pomocných javov. Napríklad kôpku kamienkov zoskupovali do geometrických útvarov pripomínajúcich trojuholník , štvorec alebo päťuholník. Dnes sa táto interpretácia čísla nazýva figurálne číslo. [4]

V Pascalovom trojuholníku sa objavujú figurálne čísla asi takto:

- na prvej diagonále sú jednotky,
- na druhej diagonále sú zhora nadol usporiadané vzostupne prirodzené čísla,
- na tretej diagonále sú tzv. trojuholníkové čísla: 1, 3, 6, 10, ..., (ich geometrické usporiadanie do „kamienkových trojuholníkov“ je na obr. 2),
- na štvrtej diagonále nájdeme tetrahedrálne čísla: 1, 4, 10, 20, 35, ...,
- na piatej diagonále sú pentachorónne čísla: 1, 5, 15, 35, ..., atď.



Obr. 2: *Figurálne čísla. Zdroj:* [5]

Číselné postupnosti v Pascalovom trojuholníku

V ďalšej časti článku sa zameriame na hľadanie zaujímavých trojíc čísel, resp. konečných postupností v príslušných riadkoch Pascalovho trojuholníka.

Aritmetické triplety

Hľadajme v Pascalovom trojuholníku také trojice kombinačných čísel idúcich v jednom riadku za sebou, ktorých stredný člen je aritmetickým (resp. geometrickým, harmonickým) priemerom svojich susedných členov.

Budeme hovoriť o trojčlenných aritmetických (resp. geometrických, či harmonických) postupnostiach), skrátene o aritmetických tripletoch (resp. geometrických, či harmonických tripletoch).

Ak sa detailnejšie pozrieme na ôsmy riadok (n = 7)

$$1,\ \underline{7},\ \underline{21},\ \underline{35},\ \underline{35},\ \underline{21},\ \underline{7},\ 1,$$

zistíme, že je zaujímavý tým, že čísla 7, 21, 35 tvoria konečnú rastúcu trojčlennú aritmetickú postupnosť, pričom čísla 35, 21, 7 v druhej časti riadku predstavujú klesajúci aritmetický triplet.

Prirodzene sa vynára niekoľko otázok. Existujú ďalšie riadky obsahujúce trojčlenné aritmetické postupnosti? Ak áno, tak koľko ich existuje? Ako zistíme ich členy? Existujú viacčlenné aritmetické postupnosti? Pokúsme sa dať odpovede na tieto otázky.

Predpokladajme, že existujú také $n, k \in N$, že trojica čísel

$$\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}$$

tvorí aritmetický triplet. To znamená, že hľadáme také prirodzené čísla $n, k\ (pre\ 1 \leq k \leq n-1)$, že platí

$$2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}.$$

Využitím známej definície kombinačného čísla dostaneme rovnice

$$2\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!},$$

$$2\,\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{(k+1)!}.$$

Po vynásobení poslednej rovnice výrazom $\frac{(k+1)k(k-1)!\,(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}$ dostaneme po úprave kvadratickú rovnicu s neznámou k a parametrom n:

$$4k^2 - 4kn + n^2 - n - 2 = 0 \qquad (1)$$

Substitúciou $t^2 = n + 2$, $t \in N$ dostaneme

$$k_1 = \frac{t^2 - t - 2}{2} \qquad k_2 = \frac{t^2 + t - 2}{2}$$

pre $t \in N,\ t \geq 3.$ Odvodíme

$$k_{1,2} = \frac{4n \pm \sqrt{16n^2 - 16(n^2 - n - 2)}}{8} = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}.$$

Záver: Podľa [6] riešením danej rovnice je parametrický systém usporiadaných dvojíc
$(n, k_1) = \left(t^2 - 2, \frac{t^2 - t - 2}{2}\right),\quad (n, k_2) = \left(t^2 - 2, \frac{t^2 + t - 2}{2}\right),$ kde $t \in N,\ t \geq 3.$ (2)

Týmto je zrejme dokázané, že pre každé prirodzené číslo $t \geq 3$, každá dvojica čísel n, k spĺňajúca predchádzajúce vzťahy (2), je riešením rovnice (1).

Ďalej môžeme tvrdiť, že v Pascalovom trojuholníku existuje nekonečne veľa riadkov obsahujúcich trojčlenné aritmetické postupnosti z čísel idúcich po sebe.

Každý takýto riadok obsahuje dve aritmetické postupnosti, čo je bezprostredný dôsledok súmernosti Pascalovho trojuholníka.

Obidve aritmetické postupnosti obsahujú totiž tie isté čísla, prvá pre $k = k_1$ je rastúca, druhá pre $k = k_2$ je klesajúca.

Ľahko vypočítame, že

- ak $t = 3$, potom dostaneme $n = 7$ a $k_1 = 2,\ k_2 = 5.$
- Ak $t = 4$, potom dostaneme $n = 14,\ k_1 = 5,\ k_2 = 9.$ Toto zodpovedá 15. riadku Pascalovho trojuholníka.

Kvôli lepšej názornosti, urýchleniu výpočtu a na overenie výsledkov použijeme softvér Mathematica. Použijeme príkaz

$$\mathrm{Column[Table[Binomial[n,k],\{n,14,14\},\{k,0,n\}],Center]},$$

ktorý generuje výsledok

$$\{1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1\}$$

Nasledovný tabuľkový výpis (Tab. 1) obsahuje hodnoty

$$n,\ k_1,\ k_2 \text{ pre } 3 \leq t \leq 15, t \in N.$$

Získame ho jednoduchým príkazom:

$$\mathrm{TableForm[Table[\{t, t^2 - 2, \frac{1}{2}(t^2 - t - 2), \frac{1}{2}(t^2 + t - 2)\}, \{t, 3,15\}],}$$

$$\mathrm{TableAlignments \to Right, TableHeadings \to \{None, \{"t", "n", k_1, k_2\}\}]}$$

t	***n***	***k₁***	***k₂***
3	7	2	5
4	14	5	9
5	23	9	14
6	34	14	20
7	47	20	27
8	62	27	35
9	79	35	44
10	98	44	54
11	119	54	65
12	142	65	77
13	167	77	90
14	194	90	104
15	223	104	119

Tab. 1: Výpis niekoľkých hodnôt t, n, k_1, k_2.

Z uvedenej tabuľky vyplýva:

- aritmetické postupnosti sa nevyskytujú v každom riadku Pascalovho trojuholníka,
- prvý výskyt aritmetického tripletu je v 8. riadku Pascalovom trojuholníku pre *n = 7,*
- v každom riadku s aritmetickou postupnosťou, vieme určiť prvé číslo rastúcej k_1 a prvé číslo klesajúcej k_2 aritmetickej postupnosti,
- pomocou vzorca $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, (resp. príkazom $Binomial[n, m]$ v Mathematice) môžeme určiť príslušné členy aritmetickej postupnosti,
- softvér Mathematica nám umožňuje zobraziť všetky členy riadka aj s pomerne vysokým indexom.

Napríklad pre 48 -my riadok členy rastúcej aritmetickej postupnosti: $k_1 = 20$

$$\text{Binomial}[47,19]= 6973199770790$$
$$\text{Binomial}[47,20]= 9762479679106$$
$$\text{Binomial}[47,21]= 12551759587422$$

členy klesajúcej aritmetickej postupnosti: $k_2 = 27$

$$\text{Binomial}[47,26]= 12551759587422$$
$$\text{Binomial}[47,27]= 9762479679106$$

$$\text{Binomial}[47,28] = 6973199770790$$

Čo nastane, keď hodnota $t<3,\ t\in N$?

- Ak $t=1$, potom $n=-1,$ čo nevyhovuje podmienkam úlohy.
- Ak $t=2$, potom $n=2,\ k_1=0,\ k_2=2.$ Toto zodpovedá tretiemu riadku v trojuholníku, v ktorom sú čísla: $1,\ 2,\ 1.$

Aritmetické postupnosti vyšších rádov v Pascalovom trojuholníku

Na čísla v jednotlivých diagonálach Pascalovho trojuholníka sa môžeme pozerať aj ako na aritmetické postupnosti vyšších rádov. [7]

Napríklad na druhej diagonále sa nachádza postupnosť $(a_n) = (1,2,3,4,5,6,\ldots)$, ktorú považujeme za aritmetickú postupnosť prvého rádu, ktorá je známa zo stredoškolskej matematiky. Najskôr uvedieme definíciu aritmetickej postupnosti druhého rádu.

Definícia *Konečná alebo nekonečná postupnosť (b_n) sa nazýva aritmetická postupnosť druhého rádu, ak postupnosť $(a_{n+1}) = (b_{n+1} - b_n)$ je aritmetická.*

Skúmajme Pascalov trojuholník po jednotlivých diagonálach.

- 2. diagonála: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., t. j. aritmetická postupnosť prvého rádu, teda $(a_n) = (1,2,3,4,5,6,7,8,\ \ldots)$
- 3. diagonála : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ..., t. j. aritmetická postupnosť druhého rádu, teda $(b_n) = (1,3,6,10,15,21,28,36,\ \ldots)$, pretože rozdiely každých dvoch jej susedných členov tvoria aritmetickú postupnosť prvého rádu
- 4. diagonála : 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ..., t. j. aritmetická postupnosť tretieho rádu, teda $(c_n) = (1,4,10,20,35,56,84,\ldots.)$, pretože rozdiely každých dvoch jej susedných členov tvoria aritmetickú postupnosť druhého rádu.

Aritmetická postupnosť	***Členy postupnosti***	***n–tý člen postupnosti***	***Súčet prvých n členov postupnosti***
nultého rádu	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...	$\binom{n}{0}$	$\binom{1}{0}+\binom{2}{0}+\binom{3}{0}+\ldots.+\binom{n-1}{0}=\binom{n}{1}$
prvého rádu	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...	$\binom{n}{1}$	$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\ldots.+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}$
druhého rádu	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...	$\binom{n+1}{2}$	$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots.+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3}$
tretieho rádu	1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ...	$\binom{n+2}{3}$	$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\ldots.+\binom{n+2}{3}=\binom{n+3}{4}$
štvrtého rádu	1, 5, 15, 35, 70, 126, ...	$\binom{n+3}{4}$	$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots.+\binom{n+3}{4}=\binom{n+4}{5}$
piateho rádu	1, 6, 21, 56, 126, 252, ...	$\binom{n+4}{5}$	$\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\ldots.+\binom{n+4}{5}=\binom{n+5}{6}$
....	....	....	....
k-tého rádu	1, ...	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots.+\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k}{k+1}$

Tab. 2: Niektoré vlastnosti aritmetických postupností vyšších rádov

Tieto zistené vzťahy, nám umožňujú definovať aritmetickú postupnosť *n*-ho rádu.

Definícia *Nech* $(r)_n$ *je konečná alebo nekonečná aritmetická postupnosť* $(n-1)-$ *ho rádu. Konečná alebo nekonečná postupnosť* (p_n) *sa nazýva aritmetická postupnosť n-ho rádu, ak postupnosť* $(r_{n+1}) = (p_{n+1} - p_n)$ *je aritmetická.*

V Pascalovom trojuholníku sú postupne v ďalších šikmých stĺpcoch tzv. aritmetické postupnosti štvrtého, piateho, šiesteho, atď. .... rádu, ktoré súhrnne nazývame aritmetické postupnosti vyšších rádov.

Aritmetická postupnosť	***n – tý člen postupnosti***	***Súčet prvých n členov postupnosti***
nultého rádu	$\binom{n}{0} = 1$ (t. j. polynóm premennej n nultého stupňa)	$\binom{n}{1} = n$ (t. j. polynóm premennej n prvého stupňa)
prvého rádu	$\binom{n}{1} = n$ (t. j. polynóm premennej n prvého stupňa)	$\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n(1+n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (t. j. polynóm premennej n druhého stupňa)
druhého rádu	$\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (t. j. polynóm premennej n druhého stupňa)	$\binom{n+2}{3} = \frac{1}{6}n(1+n)(2+n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$ (t. j. polynóm premennej n tretieho stupňa)
tretieho rádu	$\binom{n+2}{3} = \frac{1}{6}n(1+n)(2+n)$ $= \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$ (t. j. polynóm premennej n tretieho stupňa)	$\binom{n+3}{4} = \frac{1}{24}n(1+n)(2+n)(3+n)$ $= \frac{1}{24}n^4 + \frac{1}{4}n^3 + \frac{11}{24}n^2 + \frac{1}{4}n$ (t. j. polynóm premennej n štvrtého stupňa)
štvrtého rádu	$\binom{n+3}{4} = \frac{1}{24}n(1+n)(2+n)(3+n)$ $= \frac{1}{24}n^4 + \frac{1}{4}n^3 + \frac{11}{24}n^2 + \frac{1}{4}n$ (t. j. polynóm premennej n štvrtého stupňa)	$\binom{n+4}{5} = \frac{1}{120}n(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)$ $= \frac{1}{120}n^5 + \frac{1}{12}n^4 + \frac{7}{24}n^3 + \frac{5}{12}n^2 + \frac{1}{5}n$ (t. j. polynóm premennej n piateho stupňa)
piateho rádu	$\binom{n+4}{5} = \frac{1}{120}n(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)$ $= \frac{1}{120}n^5 + \frac{1}{12}n^4 + \frac{7}{24}n^3 + \frac{5}{12}n^2 + \frac{1}{5}n$ (t. j. polynóm premennej n piateho stupňa)	$\binom{n+5}{6} = \frac{1}{720}n(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)(5+n)$ $= \frac{1}{720}n^6 + \frac{1}{48}n^5 + \frac{17}{144}n^4 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{137}{360}n^2 + \frac{1}{6}n$ (t. j. polynóm premennej n šiesteho stupňa)

Tab. 3. n-tý člen a súčet prvých n členov aritmetických postupností vyšších rádov

Matematickou indukciou môžeme uvedené výsledky zovšeobecniť do nasledovného tvrdenia:

Veta. *N –tý člen aritmetickej postupnosti k –tého rádu je polynómom premennej n stupňa k;* t. j.

$$a_n = \alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} n + \alpha_k.$$

Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti k –tého rádu je polynómom premennej (n+1) stupňa ($k+1$) s nulovým absolútnym členom, t.j.

$$s_n = \beta_0 (n+1)^{k+1} + \beta_1 (n+1)^k + \ldots . + \beta_k\,(n+1),$$

kde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_0, \beta_1, \ldots . \beta_{k+1}$ sú vhodné koeficienty.[8]

Mnohým žiakom bol známy historický príbeh *K. F. Gaussa* (1777-1855), ktorý v r. 1786 na hodine matematiky brilantne vypočítal súčet $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100$. Poznamenajme, že známy vzťah pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti (prvého rádu)

$$s_n = n\,\frac{a_1 + a_n}{2}$$

je možné odvodiť s využitím vyššie uvedenej skutočnosti, že súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti prvého rádu je polynóm premennej n stupňa druhého, t. j.:

$$s_n = \beta_0 n^2 + \beta_1 n$$

Koeficienty β_0, β_1 určíme z rovníc, ktoré dostaneme dosadením $n = 1, 2$;

$$\beta_0 + \beta_1 = s_1 = a_1$$
$$4\beta_0 + 2\beta_1 = s_2 = 2a_1 + d.$$

Riešením tejto sústavy rovníc dostaneme $\beta_0 = \frac{d}{2}$, $\beta_1 = a_1 - \frac{d}{2}$, teda

$$s_n = \beta_0 n^2 + \beta_1 n = \frac{d}{2} n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) n.$$

Geometrické triplety

Predpokladajme, že existujú také $n, k \in N$, že trojica čísel $\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}$ tvorí geometrickú postupnosť.

$$\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1},$$

čiže

$$\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)^2 = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\,\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}.$$

Po úprave dostaneme

$$k(n-k) = (k+1)\,(n-k+1),$$

odkiaľ dostaneme $0 = n + 1$, čo je sporné, keďže $n \in N$.

V Pascalovom trojuholníku teda neexistuje riadok, ktorý by obsahoval trojčlennú geometrickú postupnosť, teda geometrický triplet.

Harmonický trojuholník

Starí Gréci poznali okrem aritmetického a geometrického priemeru dvoch čísel aj priemer harmonický. Harmonický priemer $H(a, b)$ dvoch kladných čísel a, b je definovaný nasledovne:

$$H(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Definícia. Harmonickou postupnosťou nazývame postupnosť, ktorej všetky členy, okrem prvého, sú harmonickým priemerom susedných členov.

Najznámejšia harmonická postupnosť je postupnosť $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

Vychádzajme z postupnosti čísel $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$, ktorú tvoria kmeňové zlomky. Všeobecný člen tejto postupnosti je $a_n = \frac{1}{n}$.

Ak od každého člena $\frac{1}{n}$ tejto postupnosti odčítame jeho nasledujúci člen $\frac{1}{n+1}$, dostaneme postupnosť

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}, \ldots$$

Usporiadajme získané hodnoty podľa schémy:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{7} \\
& \frac{1}{2} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{42} & \\
& & \frac{1}{3} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{105} & & \\
& & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{140} & & & \\
& & & & --- & & --- & & --- & & & &
\end{array}$$

Teraz otočme túto schému (tabuľku čísel) o 60° v smere hodinových ručičiek, aby sme vytvorili trojuholníkové pole.

Dostaneme nový trojuholník, ktorý nazývame harmonickým trojuholníkom.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
& & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
& & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
& & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
& & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
& & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
& \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}$$

- - - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{1}{r\binom{r-1}{r-1}} \quad \frac{1}{r\binom{r-1}{r-2}} \quad \frac{1}{r\binom{r-1}{r-3}} \quad \text{-----------------------------------} \quad \frac{1}{r\binom{r-1}{2}} \quad \frac{1}{r\binom{r-1}{1}} \quad \frac{1}{r\binom{r-1}{0}}$$

Obr. 5: Harmonický trojuholník

Napíšme si ešte ďalšie dva nasledujúce riadky:

$$\frac{1}{(r+1)\binom{r}{r}} \quad \frac{1}{(r+1)\binom{r}{r-1}} \quad - \; - \quad - \quad \frac{1}{(r+1)\binom{r}{1}} \quad \frac{1}{(r+1)\binom{r}{0}}$$

$$\frac{1}{(r+2)\binom{r+1}{r+1}} \quad \frac{1}{(r+2)\binom{r+1}{r}} \quad - \; - \quad \frac{1}{(r+2)\binom{r+1}{2}} \quad \frac{1}{(r+2)\binom{r+1}{1}} \quad \frac{1}{(r+2)\binom{r+1}{0}}$$

--------------- ------------ ------------- --------------- - - ----------------- ---------- ------------- ------------- -------------

Vyslovíme hypotézu, že platí

$$\frac{1}{(n+2)\binom{n+1}{k+1}} + \frac{1}{(n+2)\binom{n+1}{k}} = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}.$$

Dokážeme jej správnosť.

Postupným upravovaním dostaneme:

$$\frac{1}{(n+2)\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}} + \frac{1}{(n+2)\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}} = \frac{1}{(n+1)\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

$$k+1+n+1-k = n+2$$

$$n+2 = n+2$$

Tým sme overili platnosť uvedeného vzťahu v harmonickom trojuholníku.

Ak označíme $H_k(n) := \frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}}$, potom môžeme vzťah

$$H_k(n) + H_{k+1}(n) = H_k(n-1)$$

upraviť nasledovne:

$$\frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}} + \frac{1}{n\binom{n-1}{k}} = \frac{1}{(n-1)\binom{n-2}{k-1}}.$$

Dostali sme základné vzorce platné v harmonickom trojuholníku, ale aj vzorce platné medzi prvkami oboch trojuholníkov.

Doposiaľ získané vzťahy uvedieme v nasledovnom prehľade (Tab. 4):

	Pascalov trojuholník	**Harmonický trojuholník**
Označenie prvkov ($\forall\, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}, \in \boldsymbol{N};\ \ \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{k}$)	$C_k^n\ ,\binom{n}{k},\ C_k(n)\ \ \ldots$	$H(n,k),\ H_k^n\ ,\ H_k(n),\ \ \ldots.$
Generovanie prvkov	$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$	$H_k(n)+\ H_{k+1}(n)=\ H_k(n-1)$

Tab. 3: Prehľad vzorcov medzi Pascalovým a harmonickým trojuholníkom

Existujú nejaké vzťahy medzi číslami v diagonálach? Ako vypočítať ich súčet, ak existuje?

- Čísla na 1. diagonále harmonického trojuholníka tvoria harmonickú postupnosť

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\ \ldots=\ \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

K nej príslušný rad sa nazýva harmonickým radom.

Ak by sme brali do úvahy len trojice čísel za sebou idúcich v harmonickom rade, tak dostávame harmonické triplety. Je zrejmé, že ich existuje nekonečne veľa. Napr.:

$$\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}:\qquad \overline{x}_h=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{5}}+\frac{1}{\frac{1}{7}}}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},$$

alebo iné nepárne skupiny za sebou idúcich čísel:

$$\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10},\frac{1}{11}:\ \ \overline{x}_h=\frac{1}{7}\ \ ,$$

vypočítame pomocou softvéru *Mathematica* príkazom

$$\text{HarmonicMean}[\{\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{7},\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{9},\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{11}\}],\quad \tfrac{1}{7}.$$

- Čísla na 2. diagonále harmonického trojuholníka sú

$$\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20},\frac{1}{30},\frac{1}{42},\frac{1}{56},\ldots$$

Určíme súčet ich prevrátených hodnôt

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\binom{n}{2}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)}=\ 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\ 2\,.\,1=2$$

Rozpíšeme posledný vzťah. Ak označíme $S_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$, potom po úprave dostaneme

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n}$$
$$S=S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.$$

Teda platí, že čísla na 2. diagonále harmonického trojuholníka sú polovicou obrátených hodnôt trojuholníkových čísel a súčet týchto čísel je 1.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots=$$
$$=\frac{1}{2}(1^{-1}+3^{-1}+6^{-1}+10^{-1}+15^{-1}+\cdots)=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\binom{n}{2}}=1$$

- Čísla na 3. diagonále harmonického trojuholníka sú

$$\frac{1}{3},\frac{1}{12},\frac{1}{30},\frac{1}{60},\frac{1}{105},\cdots$$

Z vyššie uvedených vzťahov môžeme predpokladať, že každé z uvedených čísel je jednou tretinou obrátených tetrahedrálnych čísel v Pascalovom trojuholníku, t, j.

$$1,4,10,20,35,56,54,\ldots=\binom{3}{3},\binom{4}{3},\binom{5}{3},\binom{6}{3},\binom{7}{3},\ldots..\binom{k}{3},\ldots$$

Utvorme ich súčet:

$$\frac{1}{3}\left\{\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}+\cdots+\binom{n}{3}+\cdots\right\}=\frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\binom{n}{3}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\cdots=\frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\binom{n}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$$
$$=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)(n-2)}=2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Stačí len upraviť súčet nekonečného číselného radu

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{3.2.1}+\frac{1}{4.3.2}+\frac{1}{5.4.3}+\frac{1}{6.5.4}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)(n-2)},$$

ktorý je ekvivalentný s výrazom:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

- Čísla na 4. diagonále harmonického trojuholníka sú

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\frac{1}{280}+\frac{1}{504}+\frac{1}{840}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{4}(1^{-1}+5^{-1}+15^{-1}+35^{-1}+70^{-1}++126^{-1}+\ldots)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\binom{4}{4}}+\frac{1}{\binom{5}{4}}+\frac{1}{\binom{6}{4}}+\frac{1}{\binom{7}{4}}+\frac{1}{\binom{8}{4}}+\ldots+\frac{1}{\binom{k}{4}}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\binom{n}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}}=$$
$$=6\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=6.\ \frac{1}{18}=\frac{1}{3},\quad n\geq 4, n\in N.$$

Analogickým postupom by sme mohli pokračovať ďalej. Je zrejmé, že pri výpočtoch súčtov uvedených nekonečných číselných radov sa zvyšuje obťažnosť výpočtov.

Záver

V článku sme poukázali na niektoré súvislosti medzi prvkami Pascalovho trojuholníka, ako aj na jeho modifikáciu - harmonický trojuholník.

Ich základné vlastnosti a vzťahy, akými sú napríklad postupnosti (aritmetické, geometrické a harmonické), sú obsahom učiva v rámci stredoškolskej matematiky.

Aktívne skúmanie a objavovanie matematických vzťahov môže podporiť dosiahnutie kvalitnejších a trvalejších výsledkov matematického vzdelávania u žiakov, prípadne podnietiť záujem o ďalšie vzdelávanie v matematike.

Literatúra

[1] https://sk.wikipedia.org/wiki/Pascalov_trojuholník (2020-03-23).

[2] Janeček, F. (1983). *Vlastnosti Pascalova trojúhelníku. Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 61, 1982/83, DUBEN.* Praha: Nakl. JČSMF.

[3] https://sk.wikipedia.org/wiki/Portál:Matematika/Obrázok_týždňa/8#/media/Súbor:Pascal's_Triangle_divisible_by_5.svg (2020-03-23).

[4] Fulier J., Šedivý O., *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky.* Nitra 2001.,(s. 112-113), ISBN 80-8050-445-8.

[5] Jackson, T., et al. (2013). *Matematika. 100 objavov, ktoré zmenili históriu.* SLOVART, s. r. o., Bratislava 2013, (s. 49), ISBN 978-80-556-0834-1.

[6] Аврамов, А., 1980. Арифметические прогрессии в треугольнике Паскаля. Časopis Kvant, 1980, No11, (s. 27-28).

[7] Zhouf, J., PedF UK Praha: *Aritmetická posloupnost druhého řádu. Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 80, (2005),číslo 3, s. 3-11.*

[8] Vyšín J., *O nekonečných řadách, Praha, 1948, Nakl. JČSMF*, (s. 10-12).