

Vyučovanie matematiky orientovaného na budovanie mentálnych schém a výsledky z pozorovania žiakov počas vyučovania

Scheme-Oriented Approach to Mathematics Education and Results of an Observation of Pupils during the Educational Process

Kitti Páleníková^a – Katarína Senderáková^b

^{a*}*Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr, A. Hlinku 1, 949 74 Nitra*

^b*Cirkevná základná škola – NARNIA, Beňadická 38, 851 06 Bratislava*

Received September 20, 2019; received in revised form October 10, 2019; accepted October 11, 2019

Abstract

The following paper describes an alternative approach in mathematics education, known as Scheme-oriented mathematical education elaborated by prof. Milan Hejný from the Charles University, Prague, Czech Republic. We present the background of the approach: the theory of generic models; formalism and constructivism; schemes and structures and at least the principles of the approach. The paper then presents the results obtained by a structured observation of pupils of grade 5, 6 and 7 educated by this approach. We focused on the twelfth principle of the approach called Supporting collaboration – acquiring knowledge through discussion. We were interested in which portion of the lesson the students work together in pairs/in groups or in whole class discussion. We found out that pupils' collaboration takes more than 60 % of lesson. The findings are accompanied by other notes implicated by independently observation during the lessons.

Keywords: mathematics education, constructivism, mental schemes. Observation, collaboration of students.

Classification: D10, D40

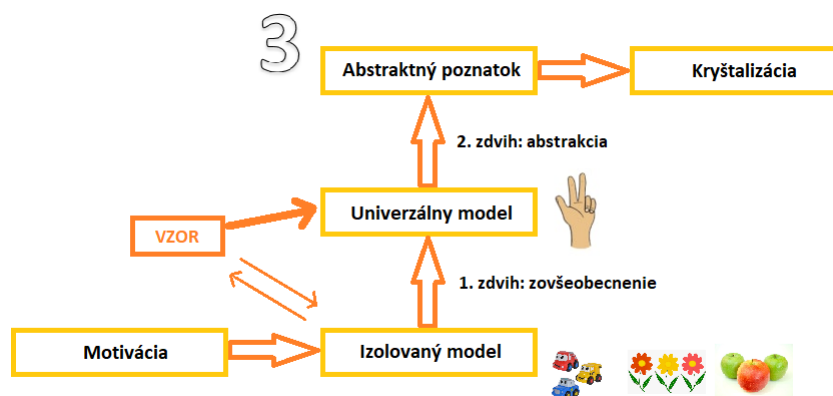
Úvod

Metóda Vyučovanie orientované na budovanie schém (VOBS) je na Slovensku známa aj ako Hejného metóda – podľa profesora Hejného, ktorý ju podrobne rozpracoval a implementoval spolu so svojim otcom a tímom spolupracovníkov. VOBS využíva už asi pätina základných škôl v Čechách [1] a takáto výuka sa začína šíriť aj na Slovensku. Medzi českými odborníkmi na didaktiku matematiky prebieha v posledných rokoch čoraz búrlivejšia diskusia o tom, či je táto metóda vhodná. V roku 2017 ukončilo v Českej republike základnú školu prvých 100 žiakov, ktorí sa na druhom stupni učili metódou VOBS a testovali pilotné učebnice k tejto metóde. Títo žiaci napísali prijímacie testy o niečo úspešnejšie ako žiaci učiari sa matematiku inými metódami [2]. Novší výskum s väčšou výskumnou vzorkou (vyše 4000 žiakov) realizovala v roku 2018 spoločnosť Kalibro Projekt, s.r.o., kde v porovnávacích testoch z matematiky dosiahli žiaci vyučovaní metódou VOBS vyššie skóre ako žiaci vyučovaní inými metódami. Uvidíme, či žiaci vyučovaní metódou VOBS budú tí úspešnejší aj naďalej v ďalších ročníkoch.

*Corresponding author; email: kpalenikova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2019.5.2.11-22

Teória generického modelu

Na to, aby sme porozumeli vyučovaniu orientovanému na budovanie schém, potrebujeme poznať to, ako sa na poznávací proces pozeral Vít Hejný (slovenský pedagóg a matematik, otec Milana Hejného). Svoju koncepciu vytvoril v rokoch 1947 – 1977 a nazval ju teóriou generického modelu. Tento model ilustruje zasadzovanie sa novej myšlienky do už vytvorenej kognitívnej štruktúry a opiera sa o základné myšlienky Jeana Piageta [3]. Pozostáva z 5 fáz: 1. motivácia, 2. izolované modely, 3. generický model (procesuálny → konceptuálny), 4. abstraktný poznatok, 5. kryštalizácia. Medzi 2. a 3. fázou a medzi 3. a 4. fázou nastáva zdvih. Prvý zdvih sa nazýva zovšeobecnenie a druhý zdvih zasa abstrakcia [4]. Tento model využíva poznatok, že žiak zväčša najprv porozumie zopár jednotlivým úlohám, pozoruje podobné znaky a až potom prechádza k všeobecnejším a abstraktnejším poznatkom.



Obr. 1 Mechanizmus poznávacieho procesu. Upravené z [3]

V celom tomto procese hrá veľmi dôležitú úlohu abstraktný zdvih, ktorý sa nazýva tiež hladinový prechod. V matematike, ale aj v celom poznávaní je moment objavu tým najdôležitejším. Ak žiak nezažije tento „AHA moment“ je ochudobnený o radosť z matematického poznávania [5].

Formalizmus a konštruktivizmus

K jedným z hlavných dôvodov, prečo sa profesor Milan Hejný hľadal inú cestu vo vyučovaní matematiky patrí aj fakt, že žiaci mali len formálne poznatky z matematiky, preto sa veľmi snažil vyhýbať formalizmu. Jeho metóda čerpá veľa z konštruktivizmu [6].

Formalizmus

K formalizmu často prispievajú aj učitelia. Spôsobujú ho tým, že veľmi dbajú na pamäťové učenie, zdôrazňujú vedomosti a vedú žiakov v prvom rade k tomu, aby mali poznatky a až neskôr sa budú zaoberať interpretáciou a aplikáciou. Namiesto toho, aby viedli k žiakov k väčšiemu porozumeniu, vedú ich len k väčšej snahe, väčšiemu drilu. Formalizmus u žiakov spôsobuje aj to, ak sa vo výuke nedáva dostatočný dôraz na etapu separovaných modelov a na vznik abstraktného poznatku [7].

Nie je ľahké spozorovať formalizmus, lebo prichádza nebadane a šíri sa pomaly. Jeho pomalému rozvoju napomáha aj to, že formalizmus nie je pre žiaka prirodzený, a preto sa mu bráni. Má tri štádiá:

1. **štádium:** Žiak si je vedomý toho, že jeho poznatky nie sú také, aké by chcel. Bráni sa tomu, keď mu učiteľ/rodič vnucuje formálne poznanie.

2. **štádium:** Žiak tu prechádza rozhodujúcou fázou. Formalizmus už prešiel do kognitívnej štruktúry žiaka. Nastáva tu pre žiaka moment voľby. Môže si vybrať, že sa bude snažiť matematiku pochopiť alebo rezignuje na skutočné porozumenie.

3. **štádium:** Keď si žiak v druhom štádiu vyberie druhú možnosť a rozhodne sa učiť sa všetko naspamäť bez hlbšieho porozumenia prechádza do tretieho štádia. Žiak tu už nejaví žiadne známky túžby porozumieť podstate a chce sa učiť už len mechanické postupy ako niečo vyriešiť [7].

Následky formalizmu nevidno hneď. Pre učiteľov nie je jednoduché diagnostikovať formalizmus u svojich žiakov. Deje sa to obvykle pri diskusii so žiakmi, pri domácej úlohe, pri tom, keď žiak rieši nejakú úlohu na tabuľu, pri rozbere písomnej práce alebo pri riešení netradičných úloh [8]. Dôležitá je tu komunikácia učiteľa so žiakom. Učiteľ sa pri tom snaží odhaliť, či je daný poznatok v žiakovej mysli prepojený s ostatnými a či dokáže na poznatok uviesť príklad (graficky alebo inak znázorniť). Učiteľovi pri diagnostike môžu pomôcť pravidlá, ktoré sformuloval Hejný [9].

Konstruktivizmus

Konstruktivizmus je široký prúd teórií vo vedách o správaní a sociálnych vedách. Konstruktivizmus zdôrazňuje aktivitu subjektu a dôležitosť jeho vnútorných predpokladov v pedagogických a psychologických procesoch a tiež významnosť interakcie subjektu s prostredím a so spoločnosťou [10]. Pedagogický konstruktivizmus spája kognitívny a sociálny konstruktivizmus. Snaží sa o to, aby sa vo vyučovaní viac pracovalo v skupinách, aby sa viac používali názorné pomôcky, aby sa viac manipulovalo s predmetmi a aby bolo prítomných viac konkrétnych úloh z reálneho života [11]. Tiež sa snaží o rozvoj tvorivého myslenia [12]. Cieľom konstruktivistického teórie je zisťovať čo je objektom poznania, ako poznávame, podmienky na zlepšenie učenia a poznávania [13]. Konstruktivizmus sa opiera najmä o fakt, že to ako človek poznáva, je konštrukčného charakteru [14], [15]. Naše chápanie sveta vzniká podľa našich skúseností. Človek najprv nadobudne skúsenosti a tieto skúsenosti naša myseľ spracuje a interpretuje tak, aby boli pre nás užitočné. Realita teda vzniká v mysli toho, kto poznáva. Deje sa to vďaka poznávacím štruktúram, ktoré si vytvárame [16]. Konstruktivizmus tvrdí, že človek pomocou svojej aktivity a empirie vytvára svet. Teda človek je tu aktívnym, prepája si nové informácie s už poznanými a vytvára si svoje interpretácie. V konstruktivizme je učiaci sa aktívnym subjektom. Do učenia ho nemusí nikto stimulovať a sám hľadá význam vecí [17].

Hejného metóda veľa čerpá z najmä z genetického konstruktivizmu. Genetický konstruktivizmus je typický spojením genetického prístupu k učeniu matematiky a konstruktivistického prístupu k vyučovaniu. Genetický prístup k matematike sa zakladá na dôslednom poznaní jej dejín a epistemológie. Žiak by teda podľa genetického konstruktivizmu mal dosahovať svoje matematické vzdelanie na základe rekonštrukcie procesu historickej genézy matematiky čiže žiak by teda mal dostávať úlohy v takom poradí, aby opakoval proces genézy matematických poznatkov. Genetická metóda má aj epistemologickú rovinu. Neskúma matematické poznanie len v nejakom poradí. Venuje sa tiež procesom, ktoré prispeli k utváraniu a pretváraniu matematického poznania. V genetickom konstruktivizme sa vo vyučovaní dbá aj na jednotlivca, ktorý sa učí sám a aj na sociálnu zložku (žiaci sa učia v skupine). Spájanie týchto dvoch zložiek vedie k tomu, aby žiak dosiahol skutočné matematické poznanie [18].

Schémy a štruktúry

Pojem **schéma** sa chápe rôznorodo, je preto dôležité vymedziť, čo v sa v tomto kontexte pod pojmom schéma myslí. Schéma sa v tomto prípade chápe ako súčasť vedomia jednotlivca [4], [16]. Na to aby sme dokázali objasniť pojem schéma, musíme najprv vysvetliť procept, z ktorého schéma v tomto ponímaní vychádza. Pojem procept ako prví zavádzajú v roku 1994 matematici E. Gray a D. Tall. V matematike sa niekedy používa rovnaká symbolika pre proces (napr. sčítanie čísel $5 + 6$) a aj produkt tohto deja (súčet $5 + 6$). Symbol, ktorý označuje proces aj koncept sa nazýva procept. Nejednoznačnosť takéhoto zápisu poskytuje mysliacemu jedincovi možnosť sa flexibilne pohybovať v mysli od deja, ktorým úlohu rieši a konceptom, s ktorým operuje ako s časťou komplexnejšej schémy. Procept má svoju viacvrstvovú štruktúru (základ – elementárny procept a komplex elementárnych proceptov- procept vyššieho stupňa). Vrstvy proceptu sú systematicky usporiadané. Gray a Tall [19] vyzdvihujú dôležitosť proceptu, keď ukazujú, že na to, aby dokázal žiak napr. počítateľ mu nestačí len rýchlosť a tréning, ale musí vedieť pracovať s danými zložkami ako s časťami komplexnejšej schémy. Schéma je teda pamäťová štruktúra obsahujúca klastre údajov, ktoré sú podstatné pre porozumenie. Poznatky sa totiž nenachádzajú v ľudskej mysli izolovane, ale spájajú sa do väčších celkov. Klaster v tomto prípade znamená množstvo nejakým spôsobom spoločne uložených skúseností a izolovaných informácií pripadajúce jednej schéme alebo proto-schéme [20]. Napr. slová jeden, dva, tri, päť vníma ako slová klastru počtu, aj keď ešte nerozumie ich náplni [21]. Aby sa mohla schéma nazývať **matematickou schémou** v tomto zmysle musí podľa [4] spĺňať tieto dva predpoklady: 1. Zrod matematickej schémy je vytvorenie generického modelu, ktorý patrí do schémy. Izolované modely, ktoré stoja za vznikom generického modelu sú poznatky spájajúce sa do klastru. Ten vytvára podmienky pre vznik schémy. Vytvára sa proto-schéma – priestor pre uloženie izolovaných modelov. 2. Schéma je meniacia sa organizácia rozdielnych prvkov, teda prvky a vzťahy medzi nimi. Prvky v tejto organizácii aj vzťahy medzi nimi sú premenlivé a teda aj schémy sú viac alebo menej flexibilné. Pri zmene schémy je dôležitý nový izolovaný model, ktorý vytvára rozpor s predchádzajúcim pochopením danej veci (napr. zistenie, že aj $1/3$ je číslo). Obvykle sa schéma mení rýchlo vtedy, keď s ňou žiak pracuje. Stáva sa však aj to, že nejaký objav ovplyvní aj iné schémy.

Schéma v uvedenom zmysle slúži aj ako mentálny nástroj, pomáha pri rozhodovaní sa, pri voľbe mét. Veľa tvrdení, ktoré platia o schémach v bežnom živote sa dajú aplikovať aj na schémy v matematike. O schéme ako o mentálnom nástroji platia podľa [4] nasledujúce tvrdenia: 1. Schémy sú veľkou pomôckou pri orientovaní sa v živote. Budovanie mentálnych schém v matematike je postavené na samostatnej intelektuálnej činnosti jedinca. To pomáha k tomu, aby si človek prepájal súvislosti, organizoval údaje, tvoril nové predstavy. 2. Schémy sa tvoria mimovoľne, ako následok jedincových potrieb. Ak nemá jedinec potrebu, schéma sa nevybuduje. 3. Schéma nejakého kúska reality je u každého človeka odlišná. Často kvôli tomu vzniká nedorozumenie medzi učiteľom a žiakom a učiteľ má potom tendenciu myslieť si, že žiak sa mýli, často to však len hovorí iným spôsobom, ktorému rozumejú viac iní žiaci ako učiteľ. 4. Pri spoločnom riešení nejakej úlohy ľudia dospejú k lepšiemu výsledku ako keď by každý z nich riešil úlohu sám. Keď sa žiaci medzi sebou rozprávajú, obohacujú sa navzájom a ich schémy sa môžu zlepšovať. 5. Prvky, ktoré človek dostal do schémy tak, že ich často používal a uvedomoval si ich, mu ostanú dlho. Naopak tie, ktoré používal len zriedka a uvedomoval si ich len málo, mu v pamäti neostanú dlho. 6. Tie prvky schémy, ktoré človek nevyužíva až tak často by mal mať prístupné v externej pamäti, aby ich vedel v prípade potreby využiť a tak sa môže sústrediť na náročnejšie operácie. Napríklad keď má žiak na lavici tabuľku

malej násobilky dokým sa mu zautomatizuje, môže sa sústrediť na náročnejšie časti úlohy ako len na násobenie.

Štruktúra je tiež pojem, ktorý má mnoho významov, preto je potrebné vymedziť jeho význam tak ako to chápe Hejný. Pod štruktúrou rozumieme časť ľudského vedomia, kompletný systém pojmov a ich vzájomných vzťahov, pričom jednotlivé prvky sú jasne terminované a artikulované cez minimálne jeden formalizovaný jazyk. Líši sa od schémy tým, že tam musí byť formalizovaný jazyk a prvky musia mať jasné ohraničenie. Schéma je viac intuitívne porozumenie a štruktúra zas axiomatické. Štruktúra však nemôže byť bez schémy. Na vysokej škole sa tak často vyučuje, že sa najprv ponúknu definícia pojmu a až potom sa začnú riešiť úlohy, ktoré s tým súvisia. Môže sa zdať, že sa tak vybuduje štruktúra. Avšak, ak si študent sám nedotvorí schému, nikdy nepríde k podstate poznania [21].

Základné princípy „Hejného metódy“

Táto metóda sa zakladá na 12 kľúčových princípoch, ktoré sú navzájom prepojené a čerpajú veľa z predchádzajúcich teoretických východísk. Princípy sú nasledovné (spracované z [4] [22], [23], [24]):

1. Budovanie schém: vytváranie schém matematických pojmov, poznatkov, dejov v mysliach žiakov je základom tejto metódy. Tento princíp hovorí o tom, že deti majú v hlavách prirodzené schémy a je dôležité ich posilňovať, prepájať a vyvádzať z nich zákonitosti. Hejného metóda využíva napr. schému autobusu, rodiny atď. Tieto schémy majú žiaci prirodzené už vytvorené v svojich mysliach a vďaka nim môžu objavovať matematické poznanie autonómne.

2. Práca v prostredíach: učíme sa opakovanou návštevou. Žiak je sústredenejší ak vykonáva činnosti v prostredí, ktoré je mu už známe a nemusí venovať pozornosť rozptyľujúcim faktorom.

3. Prepájanie tém: matematické zákonitosti neizolujeme. Nové poznatky nie sú žiakovi dávané samostatné, ale sú vždy zasadené do nejakej už poznanej schémy. Ak si totiž žiak spája jednotlivé témy a nachádza medzi nimi prepojenia, dokáže si hocikedy odvodiť nejaký poznatok. Zatiaľ čo pri učení sa, ktoré izoluje jednotlivé zákonitosti a nesnaží sa o to, aby im žiak naozaj porozumel, si potom žiak ťažko vybaví, čo sa učili pred nejakým časom a nedokáže si to sám odvodiť, lebo tomu neporozumel do hĺbky. Funguje to dvojako: jednak daná úloha rozvíja viaceré žiacke matematické schopnosti a prepája rôzne matematické celky a tiež nejaká matematická schopnosť sa vytvára v rôznych prostredíach.

4. Rozvoj osobnosti: podporujeme samostatné uvažovanie detí. Učiteľ k tomu prispieva tak, že namiesto toho, aby bol nositeľom poznania sa snaží o to, aby sa deti naučili diskutovať, hodnotiť, vyjadriť svoj názor a obhájiť si ho. Deťom to pomáha k tomu, aby sa vedeli rozhodnúť, aby dokázali rešpektovať druhých ľudí a aby dokázali niesť dôsledky za svoje správanie. Takisto sa žiak môže často sám rozhodnúť, akú náročnosť úlohy/testu/domácej úlohy si zvolí. Môže si tiež zvoliť tempo a spôsob práce.

5. Skutočná motivácia: keď „neviem“ , a „chcem vedieť“. Tento princíp je založený na viere v to, že každé dieťa je prirodzene zvedavé, že túži poznávať a že stačí jeho motiváciu podporovať. Dieťa má však inú motiváciu ako dospelý. Dieťa chce poznávať neodbytné a hneď, zaujíma ho mnoho vecí a často prebieha od jednej k druhej. V Hejného metóde je snaha o vnútornú motiváciu, keďže je kľúčovou v poznávacom procese. Úlohy sú koncipované tak, aby žiakov bavili a žiaci ich riešia sami a potom majú zo svojho úspechu radosť. Tešia sa zo svojich

„aha momentov“. V Hejného metóde je žiakovi ponúknutá matematika, ktorá je založená na jeho skúsenostiach.

6. Reálne skúsenosti: staviame na vlastných zážitkoch dieťaťa. Veľmi sa tu využívajú reálne skúsenosti dieťaťa, ktoré si vytvorilo doma, vonku, s kamarátmi atď. Pri skúsenostiach je dôležité to, že sú neprenosné, žiak to musí sám zažiť, sám sa musí zaoberať danou úlohou. Skúsenosť pre neho je, aj keď úlohu nevyrieši. Ale skúsenosť s tým, že našiel spôsob, ktorým sa nedostane k riešeniu alebo s tým, že zistil, čo ešte nevie na to, aby úlohu vyriešil. Naopak ak žiakovi niekto len povie nejaký poznatok, stane sa len formálnym a neosvojí si ho skutočne.

7. Radosť z matematiky: výrazne pomáha pri ďalšej výuke. Ak má žiak radosť z toho, že sa mu niečo podarilo, že ho pochválil učiteľ alebo spolužiaci, má omnoho väčšiu motiváciu pustiť sa do ďalšieho poznávania a aj do náročnejších úloh. Pričom objavovaniu výrazne napomáhajú matematické prostredia, ktoré sú koncipované tak, aby žiaci prichádzali k objavom. Keďže je mnoho rozličných prostredí, každý žiak môže nájsť nejaké, v ktorom mu to ide veľmi dobre. Rozličné úrovne náročnosti úloh zas prispievajú k tomu, aby mali radosť z úspechu všetci žiaci.

8. Vlastný poznatok: má väčšiu váhu ako ten prevzatý. Žiak na svojej ceste získava skúsenosti, diskutuje so spolužiakmi, koncipuje si nejakú teóriu, ktorú potom preveruje a vysvetľuje ostatným. Vďaka tomu sa sám dostáva k objaveniu nejakého poznatku. Napr. skladanie penových zlomkov do koláča, ciferník, čokoláda – to všetko žiakovi pomáha k tomu, aby objavil zákonitosti, ktoré platia pri práci so zlomkami. Nikto mu to nepovedal, sám to zistil. Každý žiak má svoje tempo a na rôzne poznatky príde v rôznom čase alebo mu vysvetlí nejaký objav spolužiak. Aj tak však prešiel cestu objavovania, preto si dokáže tento poznatok znútorniť a rozumie mu a je cennejší ako keby si ho iba niekde prečítal. Keď žiak na niečo sám príde, je mu jednoduchšie to zovšeobecniť a prijať matematický jazyk. Tento princíp verí tomu, že žiak dokáže sám objaviť všetko v matematike, dokonca aj tak zložitú vec ako integrály.

9. Rola učiteľa: sprievodca a moderátor diskusií. Dôležitým princípom v metóde VOBS je to, akú rolu zohráva učiteľ. Učiteľ má podľa Hejného vo vyučovaní nasledovné úlohy (okrem tých, ktoré sú už spomenuté v iných princípoch):

a) Učiteľ by mal byť tvorcom dobrej pracovnej klímy. Žiakov by mal motivovať, povzbudzovať a prežívať s nimi radosť z ich úspechov.

b) Učiteľ by mal žiakom nechať priestor. Nemal by im vnucovať svoje riešiteľské stratégie, aj keď žiacke postupy nepovažuje za najlepšie. Mal by žiakom nechať priestor na premýšľanie a neprerušovať ich myšlienkové procesy. Žiakom pomáha doplňujúcimi otázkami, len ak sa naozaj snažili a už nevedia čo ďalej.

c) Učiteľ by mal žiakov podporovať v túžbe rozumieť matematike, objavovať ju. Mal by oceňovať najmä to, že žiaci pracujú a nie to, že sa dokážu niečo naučiť naspamäť alebo že dokážu urobiť niečo rýchlo.

d) Učiteľ by mal žiakov viesť k diskusií v rôzne veľkých skupinách a mal by byť moderátorom týchto diskusií. V diskusií by mal zapájať všetkých žiakov a aj chybné riešenia by nemal hneď označiť za chybné. Nemal by dať najavo, ktoré riešenie je správne alebo ak sa objaví viacero postupov riešenia nejakého typu úloh nemal by povedať ktorý z nich je lepší alebo ktorý preferuje, ale mal by žiakov nechať možnosť vybrať si. Takto pomáha žiakom, aby boli otvorení voči iným názorom a aby sa učili im rozumieť, čím tiež podporuje kritické myslenie.

10. Práca s chybou:

Hejného metóda sa pozerá na chybu ako na niečo prirodzené, ako na normálny sprievodný jav učenia sa. Opiera sa o tvrdenie, že chybami sa človek učí. V tejto metóde je chyba vítaná a je

cestou k tomu, aby žiak niečomu skutočne rozumel. Na to, aby bola žiakovi pomocníkom na ceste poznávania, s ňou musí učiteľ správne pracovať. Je dôležité, aby učiteľ vedel v akej fáze prítomnosti chyby sa žiak nachádza a na základe toho mu poskytol potrebnú pomoc. Týchto fáz je päť:

1. Žiak vie o prítomnosti chyby nevie,
2. žiak sa domnieva, že má chybu, ale nie je o tom úplne presvedčený,
3. vie, že niekde spravil chybu, ale nevie nájsť kde,
4. vie, že má chybu a má tušenie, kde by mohla byť,
5. vie, že má chybu a presne vie kde.

Učiteľ by mal so žiakovou chybou pracovať pomocou nasledovných rád:

- a) Keď spraví učiteľ nejakú chybu, snaží sa hľadať jej príčinu a ak nejaký žiak upozorní učiteľa na chybu, mal by mu byť za to vďačný. Tak vytvára v triede atmosféru, v ktorej sa žiaci chýb neboja.
- b) Učiteľ by mal žiaka viesť k tomu, aby ho chyba neodradila, ale aby sa z nej poučil.
- c) Keď žiak vie, v ktorej fáze riešenia urobil chybu, ale stále ju nevidí, učiteľ mu môže pomôcť tak, že mu dá úlohu, ktorá nadväzuje na predchádzajúcu alebo úlohu, ktorá mu jasnejšie ukáže, v čom chyba spočíva.
- d) Ak učiteľ zistí, že žiak nie je schopný odstrániť svoju chybu, mal by pristúpiť k diagnostike chyby a následne k reedukácii.
- e) Učiteľ by mal žiaka viesť k tomu, aby si sám uvedomil, prečo urobil chybu a čo by mohol urobiť v budúcnosti, aby sa tejto chybe vyhol.

11. Primerané výzvy: pre každé dieťa zvlášť podľa jeho úrovne. Tento princíp nadväzuje na predchádzajúce tým, že sa opiera o tvrdenie, že ak sa dieťaťu dá primeraná výzva, má z riešenia radosť. Môže k tomu prispieť učiteľ tým, že dá dieťaťu možnosť výberu úloh na hodine alebo tým, že zostaví test, kde sú rôzne náročnosti úloh. Učiteľ by mal k tomu prispievať tiež tak, že diferencuje prácu na hodine pre žiakov, ktorí sú na rôznych úrovniach. Potom žiaci, ktorí sú slabší majú potom radosť z úspechu, keďže sa im podarilo vyriešiť niečo na ich úrovni a najlepší žiaci majú tiež radosť, lebo sú im predkladané úlohy, ktoré sú na ich úrovni a nenudia sa. Učiteľ tu musí byť citlivý na to, že pre slabšieho žiaka môže byť novým poznatkom niečo, čo je pre ostatných zrejmé. Tiež by mal venovať dostatok pozornosti nadaným žiakom. Veľkou pomôckou sú v tom Hejného učebnice, ktoré poskytujú gradované úlohy podľa náročnosti a tiež špeciálne úlohy pre nadaných žiakov. Hejného učebnice tiež rešpektujú vývojové fázy dieťaťa a snažia sa o to, aby úlohy mali svoju kontinuitu a neboli medzi nimi priveľké skoky.

12. Podpora spolupráce: poznatky sa rodia vďaka diskusii. Tento princíp hovorí o tom, je dobré, ak sa striedajú rôzne formy práce: jednotlivito, vo dvojici, v skupine. Každému žiakovi vyhovuje v danom čase niečo iné. Aj keď nejaký žiak pracuje rád sám, zväčša svoje riešenie veľmi rád s niekým prediskutuje. Riešenie vzniká vďaka spolupráci. Veľká časť žiackeho poznania sa vytvára na základe skúsenosti a vďaka diskusii, práve preto je diskusia a spolupráca dôležitá. Diskusia je dôležitá kvôli tomu, že tam žiaci môžu vyjadrovať svoje názory, môžu prehodnocovať rôzne možnosti, argumentovať a hájiť svoj názor. V diskusii sa tiež vyjasňujú mylné predstavy. Tak sa buduje nový poznatok. Učiteľ sa snaží o organizáciu vyučovania tak, aby mali žiaci možnosť spolupracovať, aj keď obmieňa formy práce. Mal by vyberať také organizačné formy, pri ktorej žiaci medzi sebou interagujú. Môže to byť práca vo dvojici, práca v štvorici alebo aj práca v celej triede. Žiaci pri práci môžu medzi sebou komunikovať, čo je veľmi dôležité. Vďaka tomu, že učiteľ podporuje spoluprácu a žiakov k tomu vedie môže v triede prebiehať tzv. „kognitívna osmóza“

Popis a výsledky pozorovania

Počas pozorovania sme sa zamerali najmä na dvanásty princíp Hejného metódy – podpora spolupráce: poznatky sa rodia vďaka diskusii. Hlavným cieľom pozorovania bolo zistiť, akú časť hodiny je prítomná spolupráca na hodinách matematiky vyučovaných metódou VOBS. Sledovali sme, koľko minút z vyučovacej hodiny tvorí skupinová práca, resp. práca v dvojici u jednotlivého žiaka a koľko času z hodiny tvorí spoločná diskusia všetkých žiakov v triede. V pozorovacích hárkoch sme sledovali každého žiaka osobitne, pretože v metóde VOBS sa niekedy postupuje tak, že žiak dostane na výber, či chce pracovať sám/v dvojici/v skupine, či sa chce zapojiť do diskusie, alebo si chce ešte dokončiť rozpracované.

Pre účely pozorovania žiakov sme dostupných výberom vybrali dve základné školy, ktoré vo výučbe aplikujú metódu VOBS aj na druhom stupni vzdelávania, a to Súkromná základná škola Felix a Súkromná cirkevná základná škola Narnia. Na týchto školách učia matematiku metódou VOBS od 1. ročníka, ale majú aj takých žiakov, ktorých prijali až do 5. ročníka, a tak sa Hejného metódu učia až od 5. ročníka. Pozorovanie žiakov na hodinách vedených metódou VOBS prebiehalo na troch základných školách: dvoch v Bratislave – SZŠ Felix (v dvoch triedach 5. ročníka a jednej triede 7. ročníka) a SCZŠ Narnia (tri triedy 6. ročníka) a jednej v Prahe – FZŠ Táboorská (jedna trieda v 5. ročníku a 1 trieda v 9. ročníku).

Z pozorovania jednotlivých vyučovacích hodín matematiky učných metódou VOBS sme zistili, že skupinová práca alebo práca v dvojici tvorí u jednotlivého žiaka počas 45-minútovej vyučovacej hodiny matematiky približne 41,30 % a spoločná diskusia žiakov tvorí u jednotlivého žiaka približne 18,16 % (bližšie v tab. 1). Spolu je to 59,46 %, čo tvorí skoro dve tretiny vyučovacej hodiny. Vyučovacie hodiny boli rôzne, na niektorých sa vôbec nediskutovalo alebo sa vôbec nepracovalo v skupine.

Avšak priemerné výsledky výskumu hovoria o tom, že diskusia, práca v dvojici a skupinová práca tvoria veľmi významnú časť každej vyučovacej hodiny matematiky vyučovanej metódou VOBS. Tento výsledok odráža reálnu aplikáciu dvanásteho princípu metódy VOBS do vyučovacej hodiny. Tieto výsledky tiež ukazujú na to, že táto metóda skutočne dbá aj na sociálny charakter vyučovania, aby sa žiaci naučili pracovať v tíme, spolupracovať, riešiť konflikty, vyjadrovať sa, diskutovať, argumentovať, prezentovať (rozvoj tzv. soft skills = mäkké zručnosti). Výsledky výskumu nepriamo ukazujú na to, že metóda VOBS nedbá len o výučbu matematiky, ale aj o výchovu.

Tab. 1: Priemery a smerodajné odchýlky času žiakov pri práci v dvojici/skupine alebo diskusii celej triedy počas 45-minútovej vyučovacej hodiny matematiky vyučovanej metódou VOBS

	Priemer	Smerodajná odchýlka
Práca v dvojici/v skupine	18,58 min	11,85 min
Diskusie v celej triede	8,17 min	8,69 min

Počas pozorovaní vyučovacích hodín matematiky vyučovaných touto metódou sme si všimli aj ďalšie zaujímavosti: To ako vo vyučovacích hodinách prebiehalo *rozdelenie do skupín* bolo zaujímavé. Keď sa žiaci mali zoznámiť s nejakým novým prostredím, skôr zvykli pracovať v dvojici. Často sa stávalo, že žiaci sa mohli rozdeliť do skupín sami tak, ako chceli, resp. mohli si vybrať či chcú pracovať samostatne alebo v dvojici/skupine.

Niekedy sa stávalo, že žiaci boli do skupín rozdelení náhodne. To, či si mohli vybrať sami skupinu alebo boli rozdelení lósom, odráža to, na čo bola viac zameraná vyučovacia hodina: či jej dôležitejším cieľom bol rozvoj myslenia a matematických vedomostí, zručností, schopností alebo naučiť sa spolupracovať, pracovať v skupine. Pri pozorovaní sme si všimli, že skupiny sa vytvárali ešte aj iným spôsobom. Žiaci mali najprv riešiť nejaké úlohy samostatne a potom tí, čo ich vyriešili si začali vytvárať „hniezda“ – skupiny, kde diskutovali o tom, kto to ako vyriešil a kto má správne riešenie.

Rola učiteľa: Pri pozorovaní sme si všimli, že učiteľ má pri skupinovej práci/práci v dvojici a v diskusii špeciálnu úlohu. V diskusii je moderátorom – veľa sa žiakov pýta, usmerňuje diskusiu, dáva slovo, neprehráva správne riešenie, keď sa ho nejaký žiak niečo opýta, tak sa opýta ostatných žiakov, čo si o tom myslia, vyzve ostatných žiakov, aby sa mu to pokúsili vysvetliť. Učiteľ sa v diskusii tiež zvykne pýtať, či žiaci porozumeli tomu, ako jeden žiak niečo vysvetľoval. Učiteľ usmerňoval diskusiu tak, aby sa žiaci sami dopracovali k novému poznatku, k správne riešeniu. Pri skupinovej práci/práci v dvojici učiteľ žiakov motivoval, zisťoval ako sa im pracuje, snažil sa im pomôcť, ak potrebovali. Snažil sa im však pomôcť tým, že im napr. radil, aby si znova prečítali zadanie úlohy alebo sa ich otázkami snažil priviesť k tomu, aby porozumeli, čo majú robiť.

Reálny obraz o sebe a spätná väzba: Žiaci si po skupinovej práci/diskusii dávali spätnú väzbu na to ako pracovali/diskutovali. Prebiehalo to napr. tak, že žiaci povedali koľko bodov by si dali za to, ako dnes pracovali v skupine, čo sa im podarilo, na čo sú hrdí. Po diskusii hodnotili to, kto prispel do diskusie dobrými argumentmi. Vďaka takejto spätnej väzbe si žiak buduje reálny obraz o sebe. Všimli sme si, že vďaka tomu, že si spätnú väzbu dávajú často, sa žiaci vedú realisticky ohodnotiť. Hodnotenie vlastných schopností vo vyučovaní je pre žiakov potrebné, a na školách málo využívané [25] V rámci diskusie sme spozorovali, že sa tu zaujímavým spôsobom *pracovalo s chybou*.

Keďže žiaci spolu často diskutovali a boli zvyknutí prezentovať svoje riešenie, nemali s tým problém, aj keď si ním neboli istí. V diskusii sa potom rozprávalo o ich riešení a žiaci si navzájom vysvetľovali, prečo je nejaké riešenie správne alebo nesprávne. Aj Boaler [5] zdôrazňuje, že jedným z najdôležitejších krokov, ktoré môže učiteľ spraviť, je zmeniť celkový prístup k robeniu chýb – jeden malý krok, no veľký rozdiel pre študentov. potrebu robiť chyby, nakoľko sa podľa nej pri chybe. Najmä *skupinová práca a práca v dvojici žiakov bavila*. Tešili sa na aktivitu, lebo mali pocit, že sa budú hrať. Často žiaci prejavovali radosť aj z toho, že mohli prispieť do diskusie a prezentovať vlastné riešenie. Potvrďuje to aj výsledky autoriek Medová a Bakusová [13].

Samotná *diskusia* sa vyznačovala niektorými charakteristikami. Diskusia prebiehala až po tom, ako žiaci skončili nejakú prácu, aby nebol prerušený ich myšlienkový tok a žiak mohol ostať pracovať na nejakej úlohe, ak chcel. V rámci diskusie žiaci ukazovali svoje riešenia alebo prezentovali svoje názory a niekedy ostala diskusia aj otvorená, či už do ďalšej hodiny alebo na neurčito. Poukazovalo to na aspekt, že učiteľ nie je v tejto metóde nositeľom poznania. Diskusia sa niekedy diala na koberci, aby sa tak odbúrali bariéry medzi žiakmi. A keď nejaký žiak niečomu nerozumel a opýtal sa to, tak mu to vysvetľoval iný žiak a nie učiteľ. Žiaci majú medzi sebou podobnejší spôsob komunikácie a preto si skôr porozumejú. Správna organizácia diskusie napomáha aj slabším žiakom zapájať sa do riešenia úloh [26].

Poznatok sa rodí v diskusii: Pri diskusii som mohla vidieť, že žiaci dospeli k nejakému poznaniu spolu, vďaka diskusii- napr. po aktivite pri diskusii dospeli k poznaniu vzťahov medzi sčítaním párnych čísel, nepárnych čísel a párneho a nepárneho čísla.

Napriek tomu, že sme sa pri pozorovaní zameriavali najmä na princíp spolupráce, na všetkých pozorovaných vyučovacích hodinách sme si všimli, ako sa jednotlivé princípy dopĺňajú.

Záver

Metóda vyučovania orientovaného na budovanie schém nás zaujala najmä tým, že je naozaj orientovaná na aktívnu prácu žiakov na hodinách. Je však dôležité dodať, že ak sa učiteľ na vyučovanie touto metódou nepripravuje s dodatočných predstihom, a nezíska tak celkový nadhľad nad koncepciou celého prístupu, sa výhody tejto metódy môžu úplne stratiť. Spolupráca žiakov vo vyučovaní matematiky je veľmi dôležitá, prácu v skupinách odporúčajú viacerí odborníci, napr. v [27], [28].

Autorky Jančaříková a Scholleová [29] uvádzajú aj návrh rozdelenia žiakov do skupín tak, aby bola ich spolupráca v rámci skupiny čo najefektívnejšia. Pozorovaním sme zistili, že približne dve tretiny z vyučovacej hodiny sa práca žiakov na hodinách vyučovaných metódou VOBS prebiehala vo dvojici/v skupine alebo spoločnou diskusiou v celej triede.

Učiteľ, ktorý nevie viesť diskusiu v triede správnym spôsobom ako facilitátor a diskusia nahradí iba jeho výklad učiva, nie je pripravený vyučovať touto metódou. Ďalej musíme poznamenať, že táto metóda nemusí vyhovovať každému žiakovi.

Z vlastnej skúsenosti vieme, že žiaci „s vlohami na matematiku“ zvládnu učivo matematiky na výbornú bez ohľadu na vyučovaciu metódu, ale myslíme si, že táto metóda najviac pomôže takým žiakom, ktorí potrebujú na pochopenie učiva viac času a dlhšie pracovať so separovanými alebo univerzálnymi modelmi.

Podakovanie

Výskum popísaný v príspevku bol realizovaný v rámci diplomovej práce Mgr. Kataríny Senderákovéj (rod. Gáborovej) pod vedením RNDr. Kitti Páleníkovéj, PhD.

Literatúra

1. Koubová, K., Svoboda, V.: *Hejného metóda je nebezpečný experiment. Nevíme, jaký dopad má na žáky, varuje matematiky Pokorný.* In *Český rozhlas*. 2018. Citované 9. 10. 2019. Dostupné na <https://plus.rozhlas.cz/hejneho-metoda-je-nebezpecnyexperiment-nevime-jaky-dopad-ma-na-zaky-varuje-7202114>
2. Trachtová, Z.: *U přijímaček se dařilo „Hejného dětem“.* *Myslí logicky a počty je baví.* In *iDNES*. 2017. Citované 9. 10. 2019. Dostupné na https://www.idnes.cz/zpravy/domaci/hejneho-metoda-prijimacizkousky.A170630_110555_domaci_zt
3. Chytrý, V.: *Netradiční přístupy k vyučování matematice.* Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem, 2015. Citované 9. 10. 2019. Dostupné na http://old.projekty.ujep.cz/podpuc/wp-content/uploads/2014/06/Netradicni_pristupy_k_vyucovani_matematice.pdf
4. Hejný, M.: *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika I. stupně.* Praha: Univerzita Karlova, 2014. 229 s. ISBN 978-80-7290-776-2.

5. Boaler, J.: *Mathematical Mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. California: John Wiley & Sons, 2015. 292 p. ISBN 978-0-470-89452-1
6. Hejný, M., Michalcová, A. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. Bratislava: Metodické centrum, 2001. 188 s. ISBN 80-8052-085-2
7. Strečko, V., *Technologické prvky nápravy typických chýb a nedostatkov žiakov SŠ v matematickej činnosti*. In Slovenský učiteľ, roč. 18, č. 5, 2010. s. 6-12. ISSN 1338-1202
8. Vallo, D., Rumanová, L., Ďuriš, V.: *Some Spatial Competences and Formalism in Solutions of Stereometrical Tasks*. In Procedia - Social and Behavioral Sciences, no. 197, 2015. pp. 2320-2324. ISSN 1877-0428
9. Hejný, M.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. 554 s. ISBN 80-08-01344-3
10. Škoda, J., Doulík, P.: *Psychodidaktika*. Praha: Grada publishing, a.s., 2011. 208 s. ISBN 978-80-247-3341-8
11. Steffe, L.P., Kieren T.: *Radical Constructivism and Mathematics Education*. In Journal for research in Mathematics Education, vol. 25, no. 6, 1994. pp. 711-733. ISSN 0021-8251
12. Perný, J.: *Konstruktivizmus ve vyučování matematice*. In Matematika v škole dnes a zajtra. Ružomberok: Katolícka univerzita v Ružomberku, 2006. s. 237-244. ISBN 80-8084-066-0
13. Medová, J., Bakusová, J.: *Application of Hierarchical Cluster Analysis in Educational Research: Distinguishing between Transmissive and Constructivist Oriented Mathematics Teachers*. In Statistika: Statistics and Economy Journal, vol. 99, no. 2, 2019. pp. 142-150. ISSN 1804-8765
14. Krpec, R.: *My Way to Constructivism*. In SGEM 2015 International Multidisciplinary Scientific Conferences on Social Sciences and Arts. Albena: SGEM, 2015. pp. 685-692.
15. Krpec, R.: *Konstruktivistický přístup k výuce kombinatoriky*. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, 2015. 96 s. ISBN 978-80-7464-800-7
16. Jančařík, A.: *Vybrané teorie učení a jejich projekce do využívání ICT ve výuce matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, 2013. 187 s. ISBN 978-80-7290-766-3
17. Veselský, M.: *Pedagogická psychológia 2: Teória a prax*. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 2005. 168 s. ISBN 80-223-1911-2
18. Kvasz, L.: *Princípy genetického konstruktivismu*. In Orbis Scholae, roč. 10, č. 2, 2016. s. 15-45. ISSN 1802-4637
19. Gray, E., Tall, D.: *Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic*. In The Journal for Research in Mathematics Education, vol. 25, no. 2, 1994. pp. 116-140. ISSN 0021-8251
20. Schoenfeld, A. H.: *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics*, in Grouws, D. A. (ed.) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan: New York, 1992. pp. 334-370. ISBN 978-0029223819
21. Hejný, M.: *Schéma – pilíř matematické znalosti*. in Letná škola pythagoras 2007. Bratislava: P-mat, 2007. s. 3-18. ISBN 80-969414-7-X
22. H-mat. *Hejného metoda*. Citované 9. 10. 2019. Dostupné na <https://www.h-mat.cz/principy>.
23. Hejný, M.: *Scheme – oriented educational strategy in mathematic*. In *Supporting Independent Thinking Through Mathematical Education*. Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego: Rzeszów, 2008. pp. 40-49. ISBN 978-83-7338-420-0

24. Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, 2004. 470 s. ISBN 80-7290-189-3
25. Říčan, J., Chytrý, V.: *Metakognice a metakognitivní strategie jako teoretické a výzkumné konstrukty a jejich využití v moderní pedagogické praxi*. Ústí nad Labem: Most, Hněvín, 2016. 310 s. ISBN 978-80-86654-93-3
26. Stein, M. K., et al.: *Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell*. In *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 10, no. 4, 2008. pp. 313-340. ISSN 1098-6065
27. Zakaria, E., Chin, L. Ch., Daud, Y.: *The Effects of Cooperative Learning on Students' Mathematics Achievement and Attitude towards Mathematics*. In *Journal of Social Sciences*, vol. 6, no. 2, 2010. pp. 272-275. ISSN 1549-3652
28. Pirie, S. E. B., Schwarzenberger, R. L. E.: *Mathematical discussion and mathematical understanding*. In *Educational Studies in mathematics*, vol. 19, no. 4, 1988. pp. 459-470. ISSN 0013-1954
29. Jančaříková, K., Scholleová, H.: *Methodology for team member selection for the need of work in course of daily and distance learning education*. In *International Conference Efficiency and Responsibility in Education*, Prague, 2010. pp. 137-145. ISBN 978-80-213-2084-0