Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 5, No. 1, p. 8 – 13
ISSN 2453-6083

Vzájomné vzťahy kvantifikovaných výrokov s viacnásobným použitím kvantifikátorov

The Mutual Relations of Quantified Statements with the Multiple Applications of Quantifiers

Peter Vrábel*

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received February 26, 2019; received in revised form March 4, 2019; accepted March 4, 2019

Abstract

The accurate understanding of quantified statements with the multiple applications of quantifiers is for students very important. Failings along this line lead up to difficulties with factual apprehension and acquirement fundamental notions of some mathematical theory. The didactic aspects of application quantified statements and their mutual relations are studied in the paper.

Keywords: quantifier, quantified statement, propositional function

Classification: 00A35, 97C50, 97D50

Úvod

Pri formulácii matematických viet i ich dôkazoch často vystupujú kvantifikované výroky s viacnásobným použitím kvantifikátorov. V tomto smere žiadna matematická disciplína nie je výnimkou. Správne chápanie kvantifikovaných výrokov so zmiešaným použitím kvantifikátorov je skutočne veľmi dôležité. Nedostatky v tomto prípade vedú k tomu, že študenti majú problémy už so skutočným pochopením a osvojením si základných pojmov nejakej matematickej teórie (Vrábel, [3], 2018). Markantne sa to prejavuje aj v dôkazoch a kontrapríkladoch, napríklad v matematickej analýze pri argumentácii, že daná postupnosť nemá limitu alebo, že daná funkcia nie je rovnomerne spojitá na nejakom intervale. V predloženom príspevku sa budeme zaoberať samozrejme len „logickou“ stránkou veci, teda správnym pochopením kvantifikovaných výrokov, ich negáciou a predovšetkým ich vzájomnými vzťahmi. Pri bezproblémovej práci s kvantifikovanými výrokmi však zohrávajú dôležitú úlohu aj poznatky o výrokových funkciách.

Didaktické aspekty používania kvantifikovaných výrokov

Kvantifikované výroky budeme označovať nasledovne: $\forall x \in A\, V(x)$, $\exists x \in A\, V(x)$, $\forall x \in A\, \exists y \in B\, V(x,y)$, $\cdots$, kde $V(x)$ $(V(x,y))$ je výroková funkcia jednej (dvoch) premenných, ktorá je definovaná na množine A $(A \times B)$. Vychádzame pritom z matematickej terminológie (Medek, [1], 1975). Treba poznamenať, že vo viacerých publikáciách autori píšu pred

*Corresponding author; email: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2019.5.1.8-13

výrokovú funkciu dvojbodku. V školskej matematike výrokové funkcie (najčastejšie ide o rovnice a nerovnice) sa nazývajú aj výrokové formy. Základom vzťahov akýchkoľvek kvantifikovaných výrokov sú nasledujúce implikácie, ktoré platia pre neprázdne množiny A, B:

$$\forall x \in A\ V(x) \Rightarrow \exists x \in A\ V(x), \tag{1}$$

$$\exists x \in A\ \forall y \in B\ V(x,y) \Rightarrow \forall y \in B\ \exists x \in A\ V(x,y). \tag{2}$$

Poznamenajme, že predpoklad neprázdnosti množín A, B nemožno vynechať, pretože formálny výrok $\forall x \in \emptyset\ V(x)$ je pravdivý a formálny výrok $\exists x \in \emptyset\ V(x)$ je nepravdivý. Priblížme si oba výroky vystupujúce v implikácii (2). Vo výroku

$$\exists x \in A\ \forall y \in B\ V(x,y)$$

sa tvrdí, že existuje taký pevný prvok $x_0 \in A$ spoločný (rovnaký) pre všetky prvky množiny B, že platí $\forall y \in B\ V(x_0, y)$. Napríklad výroky

$$\exists x \in \{1,2,3\}\ \forall y \in \{2,3,4\}\ x < y, \quad \exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \{2,3,4\}\ y < x$$

sú pravdivé. V prvom výroku existuje jediné x_0 s požadovanou vlastnosťou a to je číslo 1, v druhom výroku za x_0 stačí vziať ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako číslo 4. Na druhej strane napríklad výrok $\exists x \in \{\,2,3\}\ \forall y \in \{2,3,4\}\ x < y$ je nepravdivý.
Vo výroku

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\ V(x,y)$$

sa tvrdí, že ku každému prvku $y \in B$ existuje taký prvok $x \in A$ v závislosti od y (teda s každým y príslušný prvok x môže byť iný), že platí $V(x,y)$. Napríklad výrok $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\ y < x$ je pravdivý, pretože pre ľubovoľné prirodzené číslo y stačí zvoliť za x napríklad číslo $y+1$. V uvedenom výroku sa teda vlastne tvrdí, že ku každému prirodzenému číslu existuje prirodzené číslo od neho väčšie. Na druhej strane vo výroku $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ y < x$ sa tvrdí, že existuje prirodzené číslo, ktoré je väčšie ako všetky prirodzené čísla, čo je zrejme nepravdivý výrok. Zdôvodnime teraz implikáciu (2). Ak teda výrok $\exists x \in A\ \forall y \in B\ V(x,y)$ je pravdivý, tak výrok $\forall y \in B\ V(x_0,y)$ platí pre nejaký pevný prvok $x_0 \in A$, to ale znamená, že je pravdivý aj výrok $\forall y \in B\ \exists x \in A\ V(x,y)$ (pre každé $y \in B$ stačí zvoliť to isté $x \in A$ a síce $x = x_0$).
Negáciu výroku p budeme označovať symbolom $\neg p$. Pristúpme teraz k negácii kvantifikovaných výrokov. Ak $V(x)$ je výroková funkcia definovaná na množine A, tak symbolom $(\neg V)$(x) označme výrokovú funkciu, ktorá je definovaná takto: $(\neg V)(\,x_0)$ označuje výrok $\neg V(x_0)$ pre ľubovoľne zvolený pevný prvok $x_0 \in A$. Pre negáciu všeobecného a existenčného výroku potom platia tieto základné pravidlá (de Morganove):

$$\neg\left(\forall x \in A\ V(x)\right) \Leftrightarrow \exists x \in A\ (\neg V)(x), \tag{3}$$

$$\neg\left(\exists x \in A\ V(x)\right) \Leftrightarrow \forall x \in A\ (\neg V)(x). \tag{4}$$

Pri negácii výrokov s viacnásobným použitím kvantifikátorov používame opakovane de Morganove pravidlá pre negáciu všeobecného a existenčného výroku. Tak napríklad platí:

$$\neg\left(\forall x \in A\ \exists y \in B\ V(x,y)\right) \Leftrightarrow \neg(\forall x \in A\ (\exists y \in B\ V(x,y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A\ \neg\left(\exists y \in B\ V(x,y)\right) \Leftrightarrow \exists x \in A\ \forall y \in B\ (\neg V)(x,y).$$

Treba si uvedomiť, že $\exists y \in B\ V(x,y)$ je výroková funkcia voľnej premennej x (premenná y je viazaná kvantifikátorom) definovaná na množine A a pre ľubovoľné ale pevné $x \in A$ je to existenčný výrok. Pri negácii kvantifikovaného výroku s trojnásobným použitím kvantifikátorov využijeme poznatky s negovaním kvantifikovaných výrokov, v ktorých vystupuje výroková funkcia s dvomi premennými. Tak napríklad platí:

$$\neg\left(\forall x \in A\ \exists y \in B\ \forall z \in C\ V(x,y,z)\right) \Leftrightarrow \neg(\forall x \in A\ \left(\exists y \in B\ \forall z \in C\ V(x,y,z)\right))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A\ \neg\left(\exists y \in B\ \forall z \in C\ V(x,y,z)\right) \Leftrightarrow \exists x \in A\ \forall y \in B\ \exists z \in C\ (\neg V)(x,y,z).$$

Treba si zasa uvedomiť, že $\exists y \in B\ \forall z \in C\ V(x,y,z)$ je výroková funkcia voľnej premennej x (premenné y, z sú viazané kvantifikátormi) definovaná na množine A a pre ľubovoľné ale pevné $x \in A$ je to kvantifikovaný výrok s dvojnásobným použitím kvantifikátorov., ktorého negáciu už vieme vyjadriť. Uveďme na uvedenú negáciu kvantifikovaného výroku príklad zo základov matematickej analýzy, konkrétne definície vlastnej limity postupnosti reálnych čísel$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, a je reálne číslo) :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Symbolom $\mathbb{R}^+$ označujeme množinu všetkých kladných reálnych čísel.
Potom reálne číslo a nie je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n > m\ |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Ľahko nahliadneme, že reálne číslo a nie je limitou danej postupnosti práve vtedy, keď existuje také okolie $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ bodu a, do ktorého nepatrí nekonečne veľa členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka. V definícii vlastnej limity postupnosti sme použili jednoduchšiu variantu kvantifikovaného výroku. Ekvivalentná definícia je vyjadrená aj zápisom

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ m < n \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon,$$

ktorý je v súhlase s vyššie uvedenými všeobecnými zápismi kvantifikovaných výrokov.

Zovšeobecnením predchádzajúcich úvah možno teda uzavrieť, že negáciu kvantifikovaného výroku dostaneme tak, že všetky kvantifikátory v ňom vystupujúce sa zmenia v opačné (teda všeobecné v existenčné a existenčné vo všeobecné) a výroková funkcia $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definovaná napríklad na množine $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ sa zamení výrokovou formou $(\neg\, V)(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $(\neg\, V)(a_1, a_2, \dots, a_n)$ označuje výrok $\neg V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pre každý prvok $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Vzájomné vzťahy kvantifikovaných výrokov

Teraz vyšetríme vzájomné vzťahy kvantifikovaných výrokov, v ktorých vystupujú výrokové funkcie s dvomi alebo tromi premennými. Ukážeme, že všetky vzťahy týchto kvantifikovaných výrokov vyplývajú z implikácií (1) a (2). Najskôr vyriešme vzťahy kvantifikovaných výrokov s dvojnásobným použitím kvantifikátorov. Takýchto výrokov je osem:

$$P_1\colon \forall x \in A\ \forall y \in B\ V(x,y), \quad P_5\colon \forall y \in B\ \forall x \in A\ V(x,y),$$

$$P_2\colon \forall x \in A\ \exists y \in B\ V(x,y), \quad P_6\colon \exists y \in B\ \forall x \in A\ V(x,y),$$

$$P_3\colon \exists x \in A\ \forall y \in B\ V(x,y), \quad P_7\colon \forall y \in B\ \exists x \in A\ V(x,y),$$

$$P_4: \exists x \in A\ \exists y \in B\ V(x,y), \quad P_8: \exists y \in B\ \exists x \in A\ V(x,y).$$

Pre výroky P_1 až P_8 platí nasledujúci vzťahový diagram (Šalát, [2], 1986):

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \Rightarrow & P_3 & \Rightarrow & P_7 & \Rightarrow & P_8 \\ \Updownarrow & & & & & & \Updownarrow \\ P_5 & \Rightarrow & P_6 & \Rightarrow & P_2 & \Rightarrow & P_4. \end{array} \tag{5}$$

Z tautológie $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ dostávame, že z výroku $P_1(P_5)$ vyplýva nielen výrok P_3, ale aj výroky P_7, P_8 a P_4. Podobne z výroku P_3 vyplýva nielen výrok P_7, ale aj výroky P_8 a P_4 atď. Implikácie $P_1 \Rightarrow P_3$, $P_7 \Rightarrow P_8$ vyplývajú z implikácie (1), pretože formálny výraz $\forall y \in B\ V(x,y)$ $(\exists x \in A\ V(x,y))$ je výroková funkcia premennej x (y) definovaná na množine $A(B)$. Implikácia $P_3 \Rightarrow P_7$ je priamo už zdôvodnená implikácia (2). Podobne možno zdôvodniť „spodnú" cestu diagramu. Treba poznamenať, že žiadnu implikáciu uvedenú vo vzťahovom diagrame nemožno obrátiť (a teda nahradiť ekvivalenciou). Taktiež zo žiadneho výroku z výrokov P_3 a P_7 nevyplýva vo všeobecnosti ani jeden z výrokov P_6, P_2 a taktiež zo žiadneho z výrokov P_6, P_2 nevyplýva vo všeobecnosti ani jeden z výrokov P_3 a P_7. Uveďme napríklad, že z výroku P_3 nevyplýva vo všeobecnosti výrok P_6 ani P_2 a taktiež ani naopak.. Zvoľme za P_3 výrok $\exists x \in \{2,3,5\}\ \forall y \in \{3,4\}\ x < y$, ktorý je pravdivý. Výroky P_6 a P_2, teda výroky

$$\exists y \in \{3,4\}\ \forall x \in \{2,3,5\}\ x < y,$$

$$\forall x \in \{2,3,5\}\ \exists y \in \{3,4\}\ x < y,$$

sú nepravdivé.
Na druhej strane výroky

$$\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ y \mid x,$$

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ y \mid x$$

(označenie $y \mid x$ znamená, že prirodzené číslo y delí prirodzené číslo x) sú pravdivé, prvý je typu P_6 a druhý typu P_2. Príslušný výrok P_3 teda výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ y \mid x$, je však nepravdivý.

Pristúpme teraz ku kvantifikovaniu výrokových funkcií $V(x,y,z)$ s tromi premennými a ku analýze ich vzájomných vzťahov. Všetkých takýchto typov výrokov je 48. Každý typ je určený vlastne poradím premenných x, y, z a druhom kvantifikátora viažuceho premennú. Všetkých poradí premenných x, y, z je šesť a pri každej premennej sú dve možnosti vyskytujúceho sa kvantifikátora. Takto jednému poradiu premenných x, y, z odpovedá osem typov kvantifikovaných výrokov. Pri vzájomných vzťahoch týchto 48 výrokov môžeme množiny a výrokovú funkciu $V(x,y,z)$ kvôli stručnejšiemu zápisu vynechávať a teda napríklad výrok $\forall z \in C\ \exists x \in A\ \forall y \in B\ V(x,y,z)$ označíme ako $\forall z\ \exists x\ \forall y$. Priblížme si postupne jednotlivé typy z týchto výrokov. Zrejme pri trojnásobnom použití toho istého kvantifikátora dostaneme 6 ekvivalentných výrokov. Taktiež je zrejmé, že z výroku $\forall x\ \forall y\ \forall z$ (a z ďalších piatich s ním ekvivalentných) vyplývajú všetky ostatné. Stačí vysvetliť výroky týchto typov:

$$\forall x\ \forall y\ \exists z;\ \forall x\ \exists y\ \forall z;\ \exists x\ \forall y\ \forall z;\ \forall x\ \exists y\ \exists z; \exists x\ \forall y\ \exists z; \exists x\ \exists y\ \forall z.$$

Všetky ostatné sú z hľadiska objasnenia analogické a dostaneme ich iba zámenou premenných. Napríklad k prvému výroku $\forall x\ \forall y\ \exists z$ môžeme ešte priradiť z hľadiska objasnenia tieto analogické výroky:

$$\forall y\ \forall x\ \exists z; \forall x\ \forall z\ \exists y;\ \forall z\ \forall x\ \exists y; \forall y\ \forall z\ \exists x;\ \forall z\ \forall y\ \exists x.$$

S výrokom $\forall x\ \forall y\ \exists z$ je to podobne ako s výrokom P_2, ibaže z volíme v závislosti od x aj y. Vo výroku $\forall x\ \exists y\ \forall z$ volíme y v závislosti od x ale tak, že je pevné pre všetky z. Teda napríklad výrok $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ 10x - y < z$ je pravdivý (stačí zvoliť y tak, aby $y \geq 10x$) a výrok $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ x + y < z$ je nepravdivý ($1 < x + 1 \leq x + y$ pre ľubovoľné $x \in \mathbb{N}$ aj $y \in \mathbb{N}$).

S výrokom $\exists x\ \forall y\ \forall z$ je to podobne ako s výrokom P_3, ibaže musí existovať pevné x_0 spoločné pre všetky y aj z. Teda napríklad výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ x - 1 < y + z$ je pravdivý (stačí zvoliť za x_0 číslo 1 alebo 2) a výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ x + 2 < y + z$ je nepravdivý (pre $y = z = 1$ platí $x + 2 > y + z = 2$ pre každé prirodzené číslo x).

S výrokom $\forall x\ \exists y\ \exists z$ je to podobne ako s výrokom P_2, ibaže nielen y ale aj z volíme v závislosti od x. Teda napríklad výrok $\forall x \in \mathbb{N}\ \ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ x < \frac{y}{z}$ je pravdivý (stačí zvoliť y, z v závislosti od x napríklad takto: $y = x + 1$, $z = 1$ alebo $y = 2x^2$ a $z = x$) a výrok $\forall x \in \mathbb{N}\ \ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ y + z < x$ je nepravdivý (k číslu $x = 1$ neexistujú také prirodzené čísla y, z, aby platilo $y + z < 1$).

Výrok $\exists x\ \forall y\ \exists z\ V(x, y, z)$ je pravdivý, ak existuje taký prvok x_0 pevný pre všetky y , že výrok $\forall y\ V(x_0, y, z_0)$ je pravdivý pre nejaké z_0. Teda napríklad výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ x + z < 3y$ je pravdivý (výrok $\forall y \in \mathbb{N}\ x_0 + z_0 < 3y$ je pravdivý pre $x_0 = 1 = z_0$) a výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ x + z < y$ je nepravdivý (výrok $\forall y \in \mathbb{N}\ x_0 + z_0 < y$ je nepravdivý pre akékoľvek prirodzené čísla x_0, z_0).

S výrokom $\exists x\ \exists y\ \forall z$ je to podobne ako s výrokom P_3, ibaže musí existovať pevné x_0 aj y_0 spoločné pre všetky z. Teda napríklad výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ \frac{x}{y} < z$ je pravdivý (stačí položiť napríklad $x_0 = 1$ a $y_0 = 2$) a výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ x + y < z$ je nepravdivý ($2 \leq x_0 + y_0$ a potom neplatí výrok $\forall z \in \mathbb{N}\ x_0 + y_0 < z$ pre žiadne prirodzené čísla x_0, y_0).

Pristúpme teraz ku vzťahom kvantifikovaných výrokov výrokových funkcií s tromi premennými. Všetky tieto vzťahy vyplývajú so vzťahového diagramu kvantifikovaných výrokov výrokových funkcií s dvomi premennými. K výrokom typu $\Omega x \in A\ \varsigma y \in B\ V(x, y)$, kde Ω, ς je ľubovoľný kvantifikátor, priradíme v diagrame výrok $\Omega x \in A\ \ \varsigma y \in B\ \delta z \in C\ V(x, y, z)$. Teda napríklad k výroku $\forall x \in A\ \forall y \in B\ V(x, y)$ priradíme výrok $\forall x \in A\ \forall y \in B\ \forall z \in C\ V(x, y, z)$ alebo $\forall x \in A\ \forall y \in B\ \exists z \in C\ V(x, y, z)$. Takto platia tieto základné vzťahy pre kvantifikované výroky výrokových funkcií s tromi premennými pre poradie premenných x, y, z:

$$\begin{array}{ccccccccc} \forall x\ \forall y\ \forall z & \Rightarrow & \exists x\ \forall y\ \forall z & \Rightarrow & \forall y\ \exists x\ \forall z & \Rightarrow & \exists y\ \exists x\ \forall z & \Rightarrow & \exists y\ \exists x\ \exists z \\ \Updownarrow & & & & & & & & \Updownarrow \\ \forall y\ \forall x\ \forall z & \Rightarrow & \exists y\ \forall x\ \forall z & \Rightarrow & \forall x\ \exists y\ \forall z & \Rightarrow & \exists y\ \exists x\ \forall z & \Rightarrow & \exists y\ \exists x\ \exists z \end{array} \qquad (6)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \forall x\,\forall y\,\exists z & \Rightarrow & \exists x\,\forall y\,\exists z & \Rightarrow & \forall y\,\exists x\,\exists z & \Rightarrow & \exists y\,\exists x\,\exists z \\ \Updownarrow & & & & & & \Updownarrow \\ \forall y\,\forall x\,\exists z & \Rightarrow & \exists y\,\forall x\,\exists z & \Rightarrow & \forall x\,\exists y\,\exists z & \Rightarrow & \exists y\,\exists x\,\exists z \end{array} \qquad (7)$$

Zdôvodnime napríklad implikácie $\forall x\,\forall y\,\forall z \Rightarrow \exists x\,\forall y\,\forall z$, $\exists x\,\forall y\,\forall z \Rightarrow \forall y\,\exists x\,\forall z$. Prvá implikácia vyplýva z implikácie (1). Totiž

$$\forall x \in A\,\forall y \in B\,\forall z \in C\;V(x,y,z) \Leftrightarrow \forall x \in A\,(\forall y \in B\,\forall z \in C\;V(x,y,z)),$$

kde $\forall y \in B\,\forall z \in C\;V(x,y,z)$ je výroková funkcia jednej premennej x (označme ju φ), ktorá je definovaná na množine A. Platí teda $\forall x \in A\,\varphi(x) \Rightarrow \exists x \in A\,\varphi(x)$. V druhej implikácii platí:

$$\exists x \in A\,\forall y \in B\,\forall z \in C\;V(x,y,z) \Leftrightarrow \exists x \in A\,\forall y \in B\,(\forall z \in C\;V(x,y,z)),$$

kde $\forall z \in C\;V(x,y,z)$ je výroková funkcia definovaná na množine $A \times B$, označme ju $\omega(x,y)$. Potom z implikácie $P_3 \Rightarrow P_7$ zo vzťahového diagramu (5) vyplýva:

$$\exists x \in A\,\forall y \in B\,\big(\forall z \in C\;V(x,y,z)\big) \Leftrightarrow \exists x \in A\,\forall y \in B\;\omega(x,y) \Leftrightarrow \forall y \in B\,\exists x \in A\;\omega(x,y)$$
$$\Leftrightarrow \forall y \in B\,\exists x \in A\,(\forall z \in C\;V(x,y,z)) \Leftrightarrow \forall y \in B\,\exists x \in A\,\forall z \in C\;V(x,y,z).$$

Ďalšie vzťahy analogické vzťahom (6), (7) dostaneme tak, že budeme vychádzať z ostatných piatich poradí premenných x, y, z: $\forall y\,\forall x\,\forall z$, $\forall y\,\forall x\,\exists z$; $\forall x\,\forall z\,\forall y$, $\forall x\,\forall z\,\exists y$; $\forall y\,\forall z\,\forall x$, $\forall y\,\forall z\,\exists x$; $\forall z\,\forall x\,\forall y$, $\forall z\,\forall x\,\exists y$; $\forall z\,\forall y\,\forall x$, $\forall z\,\forall y\,\exists x$. Ide teda o ďalších 10 analogických diagramov.

Záver

Význam kvantifikovaných výrokov v logickej výstavbe každej matematickej disciplíny je dôležitý. Veľký aj malý kvantifikátor sú základné kamene vedeckého myslenia. Viacerí vysokoškolskí učitelia matematiky si myslia o študentoch matematiky, ktorí dokonale chápu zmysel a vzťahové relácie kvantifikovaných výrokov výrokových funkcií s tromi premennými, že majú už matematické myslenie. Takéto myslenie je rozhodujúce v hĺbke poznania čohokoľvek v matematike.

Literatúra

[1] Medek, V. a kol. 1975. *Matematická terminológia.* Bratislava: SPN, 1975.

[2] Šalát, T. - Smítal, J. 1986. *Teória množín.* Bratislava: Alfa, 1986.

[3] Vrábel, P. 2018. *Teória množín a teoretická aritmetika* (CD). Nitra: UKF 2018, ISBN 978-80-558-1332-5.