

Polohové a nepolohové úlohy v rovine – omyl alebo opodstatnená klasifikácia ?

Positional and Non-positional Tasks in Plane – Mistake or Valid Classification?

Dušan Vallo^a

^a* Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,

Received 5 October 2018; received in revised form 9 October 2018; accepted 10 October 2018

Abstract

In this paper we deal with some methodological teaching problems that are occurring in teaching to geometric construction tasks in the plane. The analysis of the problem is related to special classification of the tasks.

Keywords: didactics of mathematics, geometry, construction task

Classification: G10, R20

Úvod

Rôzne didaktické a iné odborné pochybenia vo výučbe geometrických konštrukčných úloh sú vo vyučovaní bežné. Sú spôsobené viacerými faktormi, najčastejšie „prepisovaním“ z učebných materiálov, široko dostupných v elektronickej podobe. Tieto elektronické verzie učebných textov neraz nepodliehajú revízii a stávajú sa mätúcou príťažbou pre žiakov i učiteľov. Cieľom tohto príspevku je poukázať na jednu konkrétnu klasifikáciu geometrických konštrukčných úloh, ktorá sa objavuje v praxi a spôsobuje terminologicko-didaktický zmätok v mysli žiakov i učiteľov.

Krátka genéza konštrukčných geometrických úloh v školskej praxi

Konštrukčné geometrické úlohy vždy boli a sú dôležitou súčasťou výučby geometrie na našich školách.

Rozvíjajú logické myslenie a analytický prístup k riešeniu problémov, vedú žiaka k pochopeniu zložitosti problémových úloh v matematike a v konečnom dôsledku sú istým „kultúrno-učebným dedičstvom“ nadväzujúcim na českú geometrickú a deskriptívnu školu. [1, 2]

V 60-tych rokoch minulého storočia sa objavuje modernizačný prúd založený na množinovej matematike. Ten prináša viaceré zmeny, medzi nimi aj snahu o elimináciu konštrukčných úloh. Napr. v [3] sa uvádza:

„V poslední době – v etapě modernizace obsahu a metod školské matematiky – jsou konstruktivní úlohy řešené „ryze geometricky“ ze

školy stále víc a víc vytlačovány. Je to jednak proto, že jejich význam pro moderní matematické vzdělání stále klesá, jednak proto, že ve škole musíme dát přednost jiným, modernějším partiím matematiky, které jsou pro dnešní společnost důležitější, a na konstrukční úlohy prostě nezbývá čas. „

Návrat ku geometrii nastáva v 80-tych rokoch, kedy množinová symbolika a formalizmus prenikajú aj do vyučovania geometrie. Súčasne sa objavuje snaha o axiomatizáciu a presadenie rôznych štruktúrovaných rozdelení, ktoré sa odrazili na príslušných metodikách výučby. K takým patrila aj klasifikácia planimetrických konštrukčných úloh, rozdeľovaných na tzv. *polohové* a *nepolohové* úlohy. Pozrime sa na problematiku dôkladnejšie.

Polohové a nepolohové geometrické konštrukčné úlohy

V publikácii [3] sa na str. 157 píše o roztriedení konštrukčných úloh nasledovne:

„Jsou konstrukční úlohy, kde je danými podmínkami určena ... i poloha hledaných útvarů Tyto úlohy budeme nazývat polohové. Druhou skupinu tvoří úlohy, v nichž není dána poloha žádného bodu (nebo jiného útvaru); proto jimi také není určená poloha hledaného objektu. Tyto úlohy budeme nazývat nepolohové.“

Podľa autora príkladom tzv. polohovej úlohy je:

Úloha 1. Je daná priamka p a bod A ležiaci mimo nej. Bodom A zostrojte kolmicu k priamke p .

Naproti tomu, príkladom tzv. nepolohovej úlohy je úloha 2.

Úloha 2. Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané dĺžky ťažníc t_a, t_c a dĺžka výšky v_b .

Ďalej autor zdôrazňuje, že v procese riešenia nepolohovej úlohy je potrebné vykonať tzv. *lokalizáciu*. Prakticky to znamená umiestniť niektorý z daných prvkov, čím sa nepolohová úloha prevedie na polohovú.

Samotná lokalizácia môže následne výrazne ovplyvniť riešenie úlohy. Autor v [3, str. 158-159] uvádza dve riešenia úlohy 2.

V prvom začína lokalizáciou najprv ťažnice $t_a \equiv AS_a$, kde S_a je stred BC . V tomto riešení je hľadaný 1 neznámy bod – vrchol trojuholníka.

V druhom riešení umiestňuje do roviny zase výšku v_b a výsledok - riešenie je v porovnaní s prvým zložitejšie (využívajú sa ďalšie pomocné neznáme body).

Z toho sa vyvodzuje, že rôzna lokalizácia tej istej nepolohovej úlohy môže viesť k hľadaniu riešenia úlohy s **rôznym počtom** neznámych bodov. Prirodzene teda autor prichádza k záveru, ktorý uvádza vo forme odporúčania - konštrukčné úlohy v rovine treba roztriediť podľa počtu neznámych bodov.

Takáto štrukturalizácia sa v didaktike matematiky (neskôr aj v teórii vyučovania matematiky) skutočne ujala a podstatne rozvinula. Napríklad v publikáciách [4, 5] sa odporúča, aby úlohy s jedným neznámym bodom boli spravidla riešené metódou množín bodov danej vlastnosti, kým pri viacerých neznámych bodoch je uprednostňovaná metóda zobrazení.

Je zaujímavé, že „pracovné“ roztriedenie na tzv. polohové a nepolohové úlohy, ktoré mohlo „upadnúť do zabudnutia“, sa dostalo do povedomia učiteľov matematiky a ďalej sa nekriticky

premietlo do metodických príručiek a rôznych učebných materiálov, v dnešnej dobe zväčša elektronických, napr. [6, 7, 8, 9, 10, 11]. *

To sa samozrejme vo vyučovaní konštrukčných úloh prejavilo v rôznych dôsledkoch.

Napríklad, v [6] sa uvádza, že „*zadanie polohovej úlohy väčšinou začína slovami „Je daná...“ . Táto veta znamená, že konštrukciu musíme začať prvkom, ktorý je daný v úvodnej vete.*“

Kým pri nepolohovej úlohe slovné spojenie „*Je daná...*“ absentuje a zo „*zadaných prvkov si môžeme vybrať ktorýkoľvek a začať konštrukciu od neho.*“

V uvedenom zdroji je ukážkou tzv. polohovej úlohy napr. úloha 3.

Úloha 3. *Je daná úsečka AB , $|AB| = 6 \text{ cm}$. Zostrojte všetky trojuholníky ABC so stranou AB , pre ktoré platí $v_c = 4 \text{ cm}$, $t_c = 6 \text{ cm}$.*

A zase ukážkou tzv. nepolohovej úlohy je:

Úloha 4. *Zostrojte trojuholník ABC , pre ktorý platí $a = 6 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $\beta = 50^\circ$.*

Z uvedeného jasne vyplýva, že ide o umelé rozdelenie, značne poznačené formálnym vzdelávaním. Veď len uvážme:

- zadanie úlohy 3 vieme preformulovať bez použitia slovného spojenia „je dané...“ - „*Zostrojte trojuholník ABC tak, aby $|AB| = 6 \text{ cm}$, $v_c = 4 \text{ cm}$, $t_c = 6 \text{ cm}$.*“
- Ako je/môže byť lokalizovaná daná úsečka AB v rovine? Je zrejmé, že presne lokalizovať krajné body úsečky možno umiestnením do súradnicovej sústavy, ak sú dané súradnice týchto bodov. A ani vtedy nie je situácia jednoznačná, pretože voľba polohy súradnicových osí v rovine môže byť „rôzna“.
- Je žiak schopný rozlišovať medzi polohovými a nepolohovými úlohami? Zamyslí sa vôbec nad tým, či má zmysel úsečku AB narysovať „vodorovne“ alebo „zvislo“? Má odhad, či sa konštrukcia „zmestí“ na papier?

Diskusia k úlohe je taktiež dôležitou fázou riešenia konštrukčnej úlohy. Žiak/učiteľ musí rozhodnúť o celkovom počte riešení. Triedenie polohové vs. nepolohové úlohy sa negatívne prenieslo aj na tento krok riešenia konštrukčnej úlohy.

Mnohí autori sa nezhodnú v názore, ako uvažovať o celkovom počte riešení konštrukčnej úlohy. Uvažujú sa riešenia v rovine alebo len v jednej polrovine? Zhodné výsledky /útvary sú považované za jedno riešenie? Ak áno, uvažuje sa existencia len priamej zhodnosti medzi výslednými útvarmi?

V súčasnej dobe sú populárne rôzne internetové fóra - nápovedné zdroje informácií. Na webe [12] sa uvádza, že „*počtom riešení konštrukčnej úlohy sa rozumie počet všetkých jej rôznych riešení a to:*

- pri polohovej úlohe sa za rôzne riešenia považujú každé dva výsledné útvary, ktoré nie sú totožné a vyhovujú zadaniu,*

* Citované zdroje sú vybrané ilustračne. Bežné internetové vyhľadávače ich ponúkajú prioritne na prvých miestach. Ich obsah považujeme za negatívny dôsledok metodických usmernení z minulosti a žiadnym spôsobom neznevažujeme ich autorov, ktorí svedomito vypracovali učebné texty v dobrej viere a podľa ich najlepšieho vedomia.

„Pôvodcom tejto klasifikácie je zaiste horlivec s vyvinutým zmyslom pre ľudovú tvorivosť, lebo vzdelaný učiteľ ovládajúci syntetickú geometriu v rozsahu strednej školy by neomylnne vedel, že súhrnný názov polohové úlohy sa používa pre úlohy operujúce s vlastnosťami geometrických objektov založených na axiómach incidencie, usporiadania a rovnobežnosti ako opozitum k súhrnnému názvu metrické úlohy, v ktorých ... primárnu dôležitosť majú vlastnosti, založené na axiómach zhodnosti a spojitosti.“

Veríme, že učiteľská verejnosť kriticky posúdi opodstatnenosť klasifikácie na polohové vs. nepolohové úlohy a toto triedenie sa postupne z vyučovania vytratí.

Literatúra

- [1] Čižmár, J. O niektorých kliše v riešení (nielen) konštrukčných geometrických úloh. In: *Proceedings of Symposium on Computer Geometry, SCG 2012*, Vol. 21, ISBN: 978-80-227-3798-2, p. 28 -37
- [2] Hejný, M. a kol. *Teória vyučovania matematiky II*, SPN Bratislava, 1989, ISBN: 80-08-00014-7
- [3] Vyšín, J. *Metodika řešení matematických úloh*, SPN Praha, 1962
- [4] Šedivý, O. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky. Konštrukčné úlohy a metódy ich riešenia*. FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 78, Nitra, 2001, ISBN: 80-8050-417-2
- [5] Šedivý, O., Vallo, D. Prečo vyučovať slovné a konštrukčné úlohy? In: *Slovné a konštrukčné úlohy ako prostriedok k rozvoju logického myslenia*. FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 516, Nitra, 2013, ISBN: 978-80-558-0238-1, s. 3 -10
- [6] http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/03_Planimetrie/4_Konstrukcni_ulohy/340_5_Konstrukce_trojuhelniku_I.pdf
- [7] http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/stepan_kurka/ulohy.htm
- [8] <http://www.realisticky.cz/ucebnice/03%20Matematika%20Z%C5%A0/03%208.%20ro%C4%8Dn%C3%ADk/06%20Konstruk%C4%8Dn%C3%AD%20%C3%BAlohy/11%20Konstrukce%20troj%C3%BAheln%C3%ADk%C5%AF%20I.pdf>
- [9] http://skola.brundik.net/szz-ma/materialy/didaktika/Did-4-03 - Konstrukcni_ulohy.pdf
- [10] http://www.gymst.com/sablony-dum/32-12/VY_32_INOVACE_Rych12.pdf
- [11] http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/GeoGebra/matematika/planimetrie/konstrukcni_ulohy_old/zadani.html
- [12] <http://forum.matematika.cz/viewtopic.php?id=86333>