

Poznámka ku spojitému usporiadaniu reálnych čísel v Cantorovej konštrukcii

Remark to Continuous Ordering of Real Numbers in Cantor's Construction

Peter Vrábel^a

*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 20 September 2018; received in revised form 2 October 2018; accepted 3 October 2018

Abstract

The proof of the continuous ordering real numbers is somewhat complicated in the Cantor's construction of this ordered field. Let $(\mathbb{R}, <)$ $((\tilde{\mathbb{R}}, <_1))$ denotes the ordering set of real numbers in the Dedekind's construction (Cantor's construction). The similarity of the ordered sets $\mathbb{R}$ and $\tilde{\mathbb{R}}$ is proved in the paper directly..

Keywords: continuous ordering, real numbers, Dedekind's construction, Cantor's construction

Classification: 97B50, 06A05

Úvod

Obe exaktné konštrukcie množiny a usporiadaného poľa reálnych čísel, Dedekindova i Cantorova, sú pomerne teoreticky náročné. Každá má svoje výhody i nevýhody.

Tak napríklad v Dedekindovej konštrukcii (DK) sa jednoduchšie dokáže spojitost' usporiadania množiny reálnych čísel ako v Cantorovej konštrukcii (CK). Dôkaz spojitosti v CK je založený na predtým dokázaných vlastnostiach archimedovsky usporiadaných polí (Švec [4], 1987). Dôležitú úlohu tu zohráva poznatok, že v archimedovsky usporiadanom poli $(A, +, \cdot, <)$ je množina $(A, <)$ spojito usporiadaná práve vtedy, keď pole A je úplné. Následne sa dokáže, že pole reálnych čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ je úplné a teda $(\mathbb{R}, <)$ je spojito usporiadaná množina.

Na druhej strane sa v CK dajú jednoduchšie dokázať vlastnosti operácií reálnych čísel ako v DK. V CK sa totiž prirodzeným spôsobom prenášajú vlastnosti operácií poľa racionálnych čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ na operácie s reálnymi číslami, čo spočíva v jednoduchšej definícii súčtu a súčinu reálnych čísel v CK.

Ak označíme $(\mathbb{R}, <)$ resp. $(\tilde{\mathbb{R}}, <_1)$ usporiadanú množinu reálnych čísel v DK resp. v CK, tak v predloženom článku je priamo dokázané, že množiny $(\mathbb{R}, <)$ a $(\tilde{\mathbb{R}}, <_1)$ sú podobné. Tento fakt sa obyčajne tiež dokazuje pomocou všeobecnejších výsledkov o archimedovsky usporiadaných poliach (Šalát [2], 1982). Zo spojitosti usporiadanej množiny $(\mathbb{R}, <)$ takto vyplýva spojitost' usporiadanej množiny $(\tilde{\mathbb{R}}, <_1)$.

^a Corresponding author: pvrabel@ukf.sk

Základné pojmy a označenia

Usporiadaná množina $(P, <)$ sa nazýva spojito usporiadaná, ak každá jej zhora ohraničená neprázdna podmnožina má v P supremum. Množina racionálnych čísel s obvyklým usporiadaním nie je spojito usporiadaná (Šalát [3], 1986). Najdôležitejším príkladom spojito usporiadanej množiny v matematike je množina reálnych čísel, čo má kľúčový význam napríklad v základoch matematickej analýzy. Usporiadanú dvojicu $[A, B]$ nazveme rezom usporiadanej množiny $(P, <)$, ak množiny A (dolná skupina rezu), B (horná skupina rezu) sú neprázdne, $A \cup B = P$ a každý prvok množiny A je menší ako ľubovoľný prvok množiny B . Keďže $A \cap B = \emptyset$, tak $B = P - A$. Ľahko možno nahliadnuť, že množina A , $A \subseteq P$, je dolnou skupinou nejakého rezu množiny P práve vtedy, keď platí:

$$A \neq \emptyset, P - A \neq \emptyset, (a \in A \wedge x \in P \wedge x < a) \Rightarrow x \in A \quad (1)$$

Takto každý rez množiny P je jednoznačne určený svojou dolnou skupinou. Preto niekedy, ak to zjednodušuje úvahy resp. zápis, budeme o reze množiny P stručne hovoriť ako o množine A ($A \subseteq P$, A spĺňa (1)).

V DK uvažujeme množinu všetkých takých rezov A množiny $\mathbb{Q}$, kde množina A nemá najväčší prvok. Množinu všetkých takýchto rezov označme $\mathbb{R}$ (množina reálnych čísel). Množiny $\{x \in \mathbb{Q}; x < a\}$, $a \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_0^- \cup \{x \in \mathbb{Q}^+; x^2 < 2\}$ sú príkladmi rezov z $\mathbb{R}$. Na množine $\mathbb{R}$ možno definovať reláciu $<$ takto:

pre $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ platí $A_1 < A_2$ práve vtedy, keď A_1 je vlastná podmnožina množiny A_2 .

Relácia $<$ je spojitým usporiadaním množiny $\mathbb{R}$ (Palumbíny [1], 1994).

CK vychádza z pojmu fundamentálnej postupnosti racionálnych čísel. Postupnosť racionálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ nazveme fundamentálnou postupnosťou, ak

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall p, q > n_0 \quad |a_p - a_q| < \varepsilon. \quad (2)$$

Každá fundamentálna postupnosť je ohraničená a súčet aj súčin ľubovoľných fundamentálnych postupností racionálnych čísel sú opäť fundamentálne postupnosti. Označme F_Q množinu všetkých fundamentálnych postupností racionálnych čísel. Na F_Q definujeme reláciu $\sim$ takto:

$$\{a_n\}_{n=1}^\infty \sim \{b_n\}_{n=1}^\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Relácia $\sim$ je relácia ekvivalencie. Relácii $\sim$ odpovedá rozklad množiny F_Q na disjunktné triedy. Množinu týchto tried označíme znakom $\tilde{R}$ (množina reálnych čísel). Ak do nejakej triedy rozkladu patrí fundamentálna postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, tak túto triedu označíme aj $[\{a_n\}_{n=1}^\infty]$. Reálne číslo α , $\alpha = [\{a_n\}_{n=1}^\infty]$, nazveme kladným a píšeme $\bar{0} <_1 \alpha$, $\bar{0} = [\{0\}_{n=1}^\infty]$, ak existuje $r \in \mathbb{Q}^+$ a $m \in \mathbb{N}$ tak, že pre každé prirodzené číslo n , $m \leq n$, platí $r \leq a_n$. Ľahko možno nahliadnuť, že definícia kladného reálneho čísla α nezávisí od výberu reprezentanta $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Na množine $\tilde{R}$ definujeme reláciu $<_1$ takto:

pre $\alpha, \beta \in \tilde{R}$, $\alpha = [\{a_n\}_{n=1}^\infty]$, $\beta = [\{b_n\}_{n=1}^\infty]$, $\alpha <_1 \beta$ práve vtedy, keď $\bar{0} <_1 \beta - \alpha$,

kde $\beta - \alpha = [\{b_n - a_n\}_{n=1}^\infty]$. Relácia $<_1$ je usporiadanie množiny $\tilde{R}$ (Šalát [2], 1982).

Pripomeňme ešte pojem podobného zobrazenia a podobnosti usporiadaných množín. Pre usporiadané množiny $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ zobrazenie $f: A \rightarrow B$ nazveme podobné, ak pre každé $x, y \in A$ platí:

$$x <_A y \Rightarrow f(x) <_B f(y).$$

Uvedené usporiadané množiny nazveme podobné, ak existuje podobné zobrazenie množiny A na množinu B , pritom píšeme $A \cong B$.

O spojitosti usporiadania množiny $(\tilde{\mathbb{R}}, <_1)$

Ako sme už uviedli v úvode, dokážeme, že usporiadané množiny $(\mathbb{R}, <)$ a $(\tilde{\mathbb{R}}, <_1)$ sú podobné.

Veta 1. Nech usporiadané množiny $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ sú podobné a A je spojitou usporiadaná. Potom aj množina B je spojitou usporiadaná.

Dôkaz. Nech $f: A \rightarrow B$ je podobné zobrazenie množiny A na množinu B . Nech $\emptyset \neq M \subseteq B$ a M je zhora ohraničená v množine B prvkom b . Treba dokázať, že množina M má v množine B supremum. Uvažujme vzor množiny M v zobrazení f , teda množinu

$$f_{-1}(M) = \{x \in A; f(x) \in M\}.$$

Každé podobné zobrazenie je prosté, teda f je bijekcia. Potom existuje jediné $a \in A$ také, že $f(a) = b$. Zrejme pre každý prvok $x \in f_{-1}(M)$ je $x \leq_A a$. Ak by totiž existoval taký prvok $x_1 \in f_{-1}(M)$, že $a <_A x_1$, tak $b = f(a) <_B f(x_1) \in M$, čo by bolo v spore s voľbou prvku b . Množina $f_{-1}(M)$ je takto neprázdna a zhora ohraničená podmnožina spojitou usporiadanej množiny A , má teda supremum, označme ho u . Dokážeme, že $f(u)$ je supremum množiny M . Nech $y \in M$. Pre vzor x k prvku y v zobrazení f platí $y = f(x) \leq_B f(u)$. Teda $f(u)$ je horné ohraničenie množiny M . Nech $y_0 \in B$, $y_0 <_B f(u)$ a $f(x_0) = y_0$, $x_0 \in A$. Potom $x_0 <_A u$. Keďže $u = \sup f_{-1}(M)$, tak existuje $t \in f_{-1}(M)$ splňujúce nerovnosť $x_0 <_A t$. Takto $y_0 = f(x_0) <_B f(t) \in M$ a teda y_0 nie je horné ohraničenie množiny M . Takto $f(u)$ je aj najmenšie horné ohraničenie množiny M v množine B .

Lema 1. Nech $\alpha = [A, B] \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Q}^+$. Potom existujú také prvky $a \in A$, $b \in B$, že $k = b - a$.

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľne v množine $A(B)$ prvok $c(d)$. K číslu $\frac{d-c}{k}$ existuje prirodzené číslo n tak, že $\frac{d-c}{k} < n$. Potom $d < c + nk$ a v konečnej postupnosti $c, c + k, \dots, c + nk$ je prvý člen z A a posledný z B . Nech p je najmenšie prirodzené číslo s vlastnosťou $c + pk \in B$. Potom $a = c + (p-1)k \in A$, $b = c + pk \in B$, $k = b - a$.

Veta 2. Usporiadané množiny $(\mathbb{R}, <)$, $(\tilde{\mathbb{R}}, <_1)$ sú podobné.

Dôkaz. Nech $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = [A, B]$. Z lemy 1 vyplýva, že ku každému $n \in \mathbb{N}$ existujú také prvky $a_n \in A$, $b_n \in B$, že $b_n - a_n < \frac{1}{n}$. Nech

$$\bar{a}_n = \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad \bar{b}_n = \min \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

Potom $a_n \leq \bar{a}_n < \bar{b}_n \leq b_n$, $\bar{b}_n - \bar{a}_n < \frac{1}{n}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Nech $\varepsilon > 0$ a $m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Potom pre každé $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, $p > m$, $q > m$, platí

$$\bar{a}_p - \bar{a}_q < \bar{b}_q - \bar{a}_q < \frac{1}{q} < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Postupnosť $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je teda fundamentálna. Zrejme $[\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}] = [\{\bar{b}_n\}_{n=1}^{\infty}]$. Definujme teraz zobrazenie $f: \mathbb{R} \rightarrow \tilde{R}$ rovnosťou $f(\alpha) = [\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}]$. Dokážeme, že f podobné zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na množinu $\tilde{R}$, teda $\mathbb{R} \cong \tilde{R}$.

Zachovajme všetky označenia z doteraz uvedeného postupu a uvažujme $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta = [C, D]$, $\alpha < \beta$. Pretože $\alpha < \beta$, tak $C \cap B$ je nekonečná množina bez najväčšieho prvku. Podobne ako to bolo s prvkami $a_n, b_n, \bar{a}_n, \bar{b}_n$ možno skonštruovať neklesajúcu postupnosť $\{\bar{c}_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z množiny $C \cap B$ a nerastúcu postupnosť $\{\bar{d}_n\}_{n=1}^{\infty}$ z množiny D tak, že $\bar{d}_n - \bar{c}_n < \frac{1}{n}$. Ak by postupnosť $\{\bar{c}_n\}_{n=1}^{\infty}$ bola od istého indexu konštantná, tak vezmeme namiesto nej postupnosť $\{\bar{c}_n - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Zrejme

$$f(\beta) = [\{\bar{c}_n\}_{n=1}^{\infty}] = [\{\bar{c}_n - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}].$$

Môžeme teda predpokladať, že postupnosť $\{\bar{c}_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je konštantná, teda existuje také prirodzené číslo m , že $\bar{c}_m < \bar{c}_{m+1}$. Označme $\bar{c}_{m+1} - \bar{c}_m = r$. Potom pre každé $n \geq m+1$ platí: $\bar{c}_n \geq \bar{c}_{m+1} > \bar{c}_m > \bar{a}_n$. Takto pre každé $n \geq m+1$ platí $\bar{a}_n + r < \bar{c}_n$, teda $f(\alpha) <_1 f(\beta)$.

Teraz dokážeme, že zobrazenie f je surjekcia. Nech $a = [\{a_n\}_{n=1}^{\infty}] \in \tilde{R}$. Potom existuje taká vybraná postupnosť $M = \{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá je buď neklesajúca alebo nerastúca. Zrejme $\bar{a} = [\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}] = [\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]$. Nech postupnosť M je neklesajúca. Položme

$$A = \{r \in \mathbb{Q}; \exists n \in \mathbb{N} r < \bar{a}_n\}.$$

Zrejme A je neprázdna, nemá najväčší prvok a navyše je aj primitívnym intervalom množiny $\mathbb{Q}$. Keďže postupnosť M je zhora ohraničená, tak množina B , $B = \mathbb{Q} - A$, je neprázdna. Potom α , $\alpha = [A, B]$, patrí do množiny $\mathbb{R}$. Na základe lemy 1 a hore uvedeného postupu existuje neklesajúca postupnosť $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z množiny A a nerastúca postupnosť $\{\tilde{b}_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z množiny B tak, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\tilde{b}_n - \tilde{a}_n < \frac{1}{n}$. Z definície množiny A vyplýva, že ku každému $n \in \mathbb{N}$ existuje prirodzené číslo k_n tak, že $\tilde{a}_n < \bar{a}_{k_n}$, pritom vezmime najmenšie k_n s takou vlastnosťou. Keďže $\bar{a}_{k_n} \leq \tilde{b}_n$, tak aj $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{b}_n - \bar{a}_{k_n}) = 0$ a $[\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}] = \tilde{a} = \bar{a} = [\{\bar{a}_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}]$. Potom $f(\alpha) = \tilde{a}$, ale $\tilde{a} = \bar{a} = a$. Nech teraz postupnosť $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca. Položme $D = \{r \in \mathbb{Q}; \exists n \in \mathbb{N} \bar{a}_n \leq r\}$, $C = \mathbb{Q} - D$. Ak by mala množina C najväčší prvok, presunieme ho do množiny D . Potom $\beta = [C, D] \in \mathbb{R}$. Analogickou úvahou ako v predchádzajúcom prípade možno skonštruovať neklesajúcu postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z množiny C , pričom $c = [\{c_n\}_{n=1}^{\infty}] = [\{a_n\}_{n=1}^{\infty}] = a$. Potom $f(\alpha) = c = a$.

Keďže $(\mathbb{R}, <)$ je spojitou usporiadaná množina a $\mathbb{R} \cong \tilde{R}$, tak z vety 1 vyplýva, že aj $(\tilde{R}, <_1)$ je spojitou usporiadaná množina.

Záver

V predloženom príspevku sme sa nezaoberali definíciou a vlastnosťami operácií sčítania a násobenia v usporiadaných poliach $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus, \odot, <_1)$. Sústredili sme sa iba na usporiadanie týchto polí. Tieto usporiadané polia sú izomorfné (Šalát [2], 1982). Teda existuje taká bijekcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$, že pre každé prvky $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

$$f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$$

$$a < b \Rightarrow f(a) <_1 f(b).$$

Literatúra

- [1] Palumbíny, D. – Vrábel, P. 1994. *Teoretická aritmetika*. Nitra: FPV VŠPg, 1994, ISBN 80-88738-38-5.
- [2] Šalát, T. 1982. *Reálne čísla*. Bratislava: Alfa, 1982.
- [3] Šalát, T. - Smítal, J. 1986. *Teória množín*. Bratislava: Alfa, 1986.
- [4] Švec, M. - Šalát, T. – Neubrunn, T. 1987. *Matematická analýza funkcií jednej premennej*. Bratislava: Alfa, 1987.