Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 4, No. 2, p. 1 – 8
ISSN 2453-6083

Rovnice druhého stupňa v prostredí programu GeoGebra

Second Degree Equations in GeoGebra Environment

Martin Billich[a]

[a*]*Department of Mathematics, Faculty of Education, Catholic University in Ružomberok, Hrabovská cesta 1A, SK-034 01 Ružomberok*

Received 5 September 2018; received in revised form 20 September 2018; accepted 22 September 2018

Abstract

GeoGebra is one of the most popular dynamical mathematical software that joins geometry, algebra and calculus. This tool help students to acquire knowledge about not only geometric objects. The relationships between the sum and product of the roots of a quadratic equation and the coefficients of the equation (Viete's theorem) are considered. We give several geometrical (or graphical) methods of solving quadratic equations such as using the right triangle altitude theorem and the power of a point theorem. We will try to show some possibilities of the software GeoGebra to visualize these ways. In addition, we show that this can be solved by elementary geometry always using only ruler and compass.

Keywords: GeoGebra, quadratic equations, Vieta's formula.

Classification: H30, R20

Úvod

V súčasnosti je GeoGebra jedným z voľne dostupných programov dynamickej geometrie, ktorý sa čoraz častejšie dostáva na všetky úrovne matematického vzdelávania, od základných škôl, cez rôzne typy stredných škôl až po univerzity. O GeoGebre možno hovoriť aj ako o multiplatformovom matematickom systéme, ktorý v sebe spája geometriu, algebru a matematickú analýzu. Skúmanie matematických situácií, riešenie problémov a osvojenie nových matematických pojmov žiakmi alebo študentmi v prostredí programu GeoGebra sa môže stať prístupnejšie a zrozumiteľnejšie, keďže je podporované vhodnými ilustráciami formou dynamických obrázkov. GeoGebra ponúka hlavne ľahko použiteľné rozhranie, ktorého dynamika, spojená s manipuláciou s voľnými objektmi, poskytuje dostatočný priestor na mnohé študentské aktivity nielen v škole ale aj v domácom prostredí. V tomto článku sa bližšie pozrieme na problematiku riešenia rovníc druhého stupňa, ich geometrickú interpretáciu, pri ktorej využijeme viaceré možnosti programu GeoGebra.

Trochu z histórie

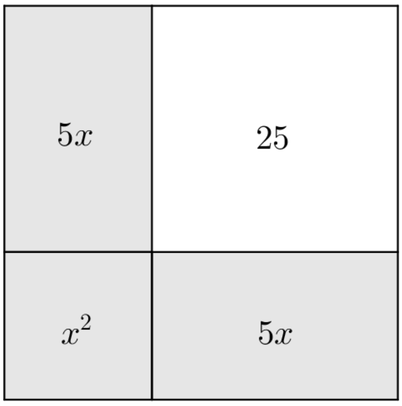
Na úvod uvedieme jednu geometrickú interpretáciu riešenia určitej a v stredoveku azda najznámejšej kvadratickej rovnice, ktorá by mohla slúžiť pre študentov nielen ako motivácia ale hlavne ako dobrá vizualizácia toho, čo sa odohráva pri algebraickom riešení kvadratickej

*Corresponding author: martin.billich@ku.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.2.1-8

rovnice, keď hľadáme iba jej kladné korene. V nasledujúcom príklade (pozri [3]) vychádzame z diela významného arabského matematika al Chvárizmího (780 - 850).

Príklad: Hľadajme (kladné) korene rovnice $x^2 + 10x = 39$.

Riešenie: Podstatou riešenia je doplnenie na štvorec (viď obr. 1). Najskôr zostrojíme štvorec so stranou dĺžky x. K tomuto štvorcu pripojíme dva obdĺžniky so stranami dĺžky 5 a x. Získaný obrazec má obsah 39 (tmavá časť). Tento doplníme na štvorec. Pridaná časť je štvorec s obsahom $5^2 = 25$. Výsledný štvorec má obsah $39 + 25 = 64$ a jeho strana má dĺžku 8. Východiskový štvorec má preto stranu dĺžky 3 (hľadaný koreň).



Obrázok 1

Predchádzajúci spôsob môžeme opísať pomocou dnešného algebraického jazyka:

$$x^2 + 10x = x^2 + 2(5x) = 39$$
$$x^2 + 2(5x) + 25 = 39 + 25 = 64$$
$$(x + 5)^2 = 64$$
$$x + 5 = 8$$
$$x = 3.$$

Takéto riešenie rovnice geometrickou cestou sa javí pre študentov ako veľmi užitočné, keďže im umožňuje nahliadnuť do podstaty veci. V podobnom duchu budeme pristupovať k riešeniu rovníc 2. stupňa aj v nasledujúcom texte, pričom dôraz bude kladený nielen na vizualizáciu, ale predovšetkým na podstatné charakteristiky metód ich riešenia v prostredí programu GeoGebra.

Východisková úloha

Získanie istej zručnosti pri riešení rovníc a ich sústav patrí medzi tie najzákladnejšie v stredoškolskej matematike. Nezriedka k nim vedie množstvo praktických úloh a problémov. S riešením kvadratickej rovnice je takmer neodmysliteľne spojená nasledujúca geometrická úloha:

Úloha 1: Aké sú rozmery obdĺžnika, ktorého polovičný obvod je 18 a obsah 65?

Riešenie: Našou úlohou je nájsť dve čísla, ak poznáme ich súčet a súčin. Ak označíme x, y dĺžky strán obdĺžnika, dostávame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + y &= 18 \\ x.y &= 65. \end{aligned} \tag{1}$$

Ak z prvej rovnice vyjadríme neznámu y a dosadíme do druhej, dostávame po úprave kvadratickú rovnicu

$$x^2 - 18x + 65 = 0. \tag{2}$$

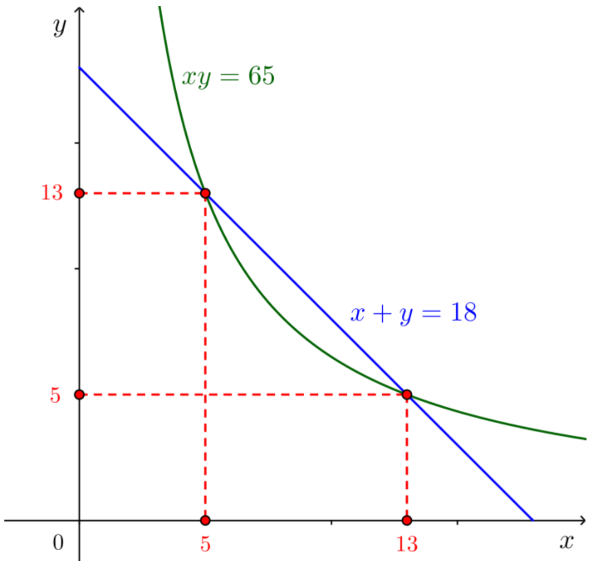
V stredoškolskej matematike sa spravidla na riešenie kvadratickej rovnice používa metóda algebraická alebo grafická (geometrická). Výsledkom prvej metódy, pomocou úpravy na štvorec, dostávame vzťah pre korene kvadratickej rovnice (2) v tvare:

$$x_{1,2} = 9 \pm \sqrt{9^2 - 65}.$$

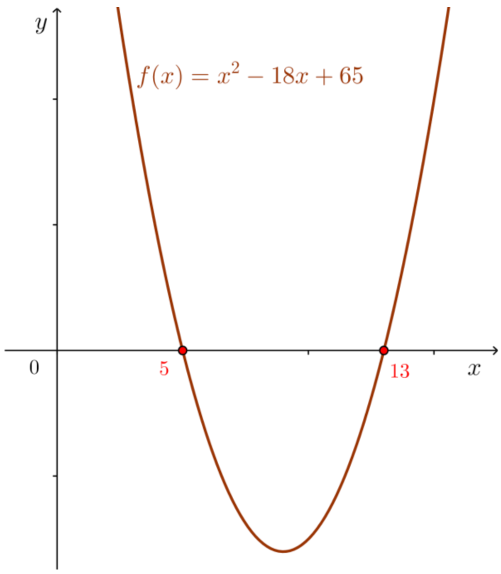
Ak použijeme úpravu kvadratického trojčlena rovnice na súčin, tak pre korene dostávame:

$$(x - 5).(x - 13) = 0.$$

Korene rovnice $x_1 = 13$, $x_2 = 5$ sú dĺžkami strán hľadaného obdĺžnika. Grafická metóda je založená na hľadaní spoločných bodov častí priamky a hyperboly (pre kladné hodnoty x, y) určených rovnicami (1), alebo paraboly (grafu kvadratickej funkcie $f(x) = x^2 - 18x + 65$) s x-ovou osou. Obe tieto situácie vytvorené v prostredí programu GeoGebra sú načrtnuté na obrázkoch 2a,b.



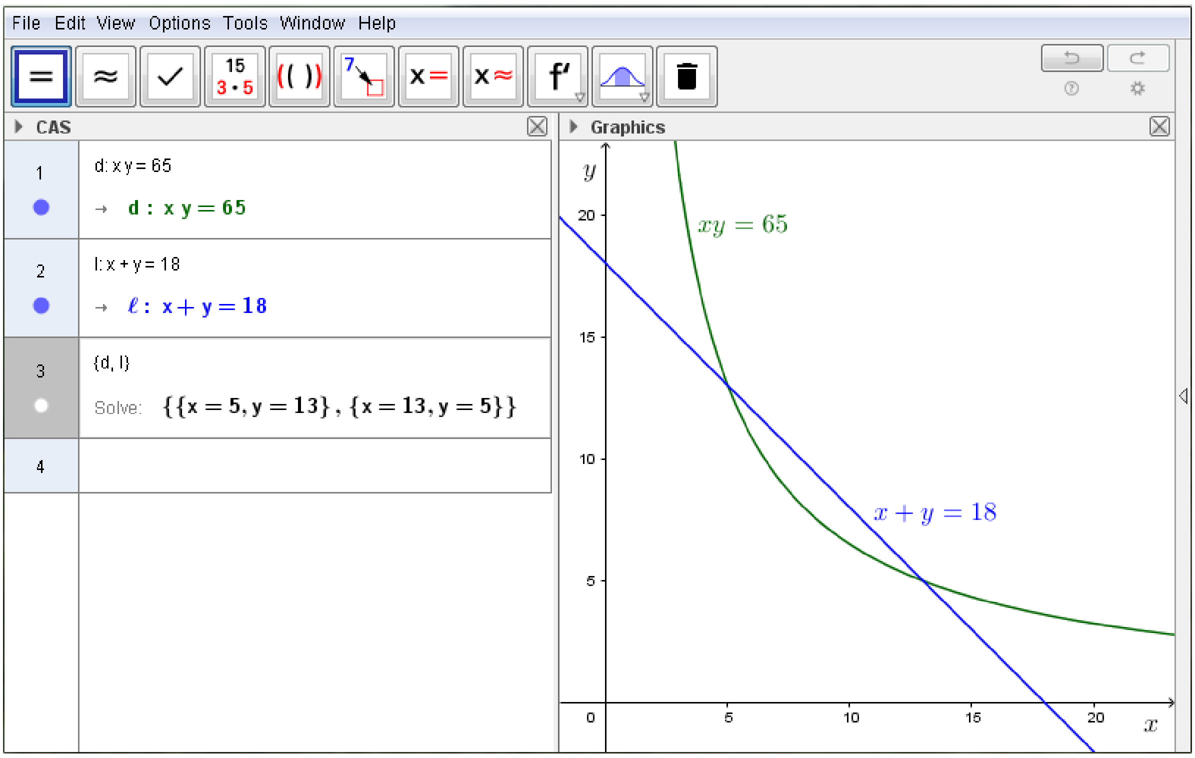
a)



b)

Obrázok 2

V tejto súvislosti treba zdôrazniť, že v školských podmienkam sa študentom podarí zostrojiť (na tabuli či v zošitoch) iba konečný počet bodov danej paraboly resp. hyperboly. Výsledkom tejto metódy je obyčajne iba približná hodnota premennej x, ktorá je jednou zo súradníc spoločných bodov priamky a hyperboly, resp. pri ktorej kvadratická funkcia nadobúda nulovú hodnotu. Grafické riešenie kvadratickej rovnice sa v takýchto podmienkach stáva často zdĺhavým a v konečnom dôsledku nám dáva iba približné výsledky. Avšak na overenie správnosti riešenia danej úlohy máme v GeoGebre niekoľko možností. Prvou voľbou je spravidla iba odčítanie súradníc vopred zostrojených priesečníkov priamky a hyperboly z algebraického okna programu. V prípade paraboly a jej priesečníkov s x-ovou osou, možno využiť z ponuky nástrojov namiesto príkazu „*Priesečník*“ priamo príkaz „*Korene*“ slúžiaci na určenie koreňov danej kvadratickej funkcie. Druhou, v riešení našej východiskovej úlohy aj prirodzenou pomôckou, je v GeoGebre integrovaný algebraický výpočtový systém CAS, ktorý umožňuje jednoducho riešiť sústavu rovníc (1) tak, ako to vidno na obrázku 3.



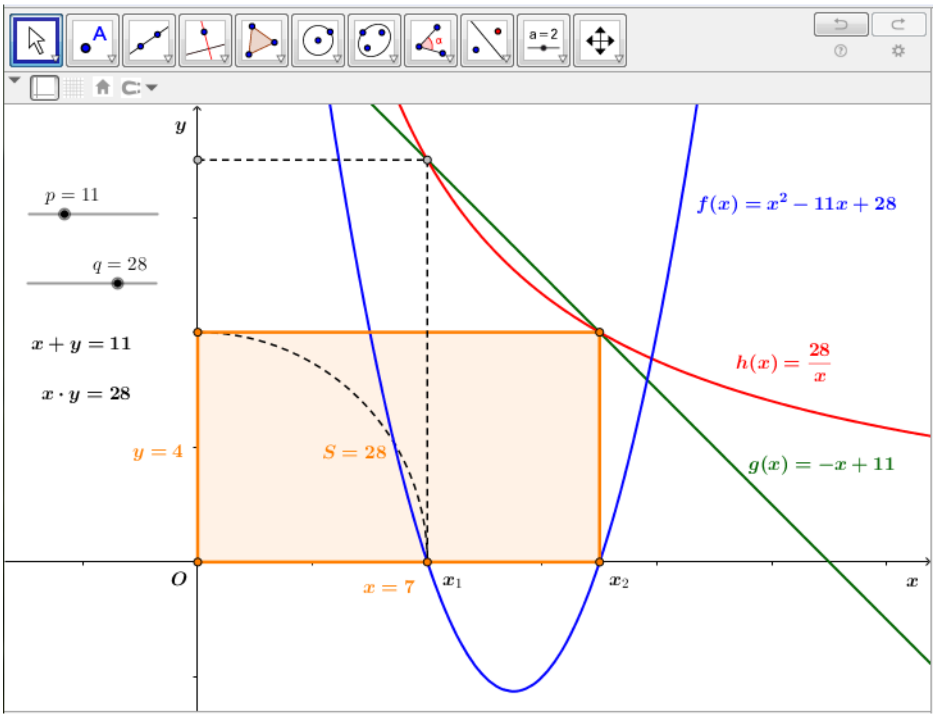
Obrázok 3

Variácie východiskovej úlohy

Bezprostredne po vyriešení východiskovej úlohy je vhodné pokračovať v numerickom ale i grafickom riešení (v prostredí programu GeoGebra) analogických úloh s rôznymi hodnotami pre polovičný obvod a obsah uvažovaného obdĺžnika. Týmto môže vzniknúť tzv. *strapec* úloh (viac o tejto metóde možno nájsť v [4]). Ako by to mohlo vyzerať v prípade našej základnej úlohy? Napriklad:

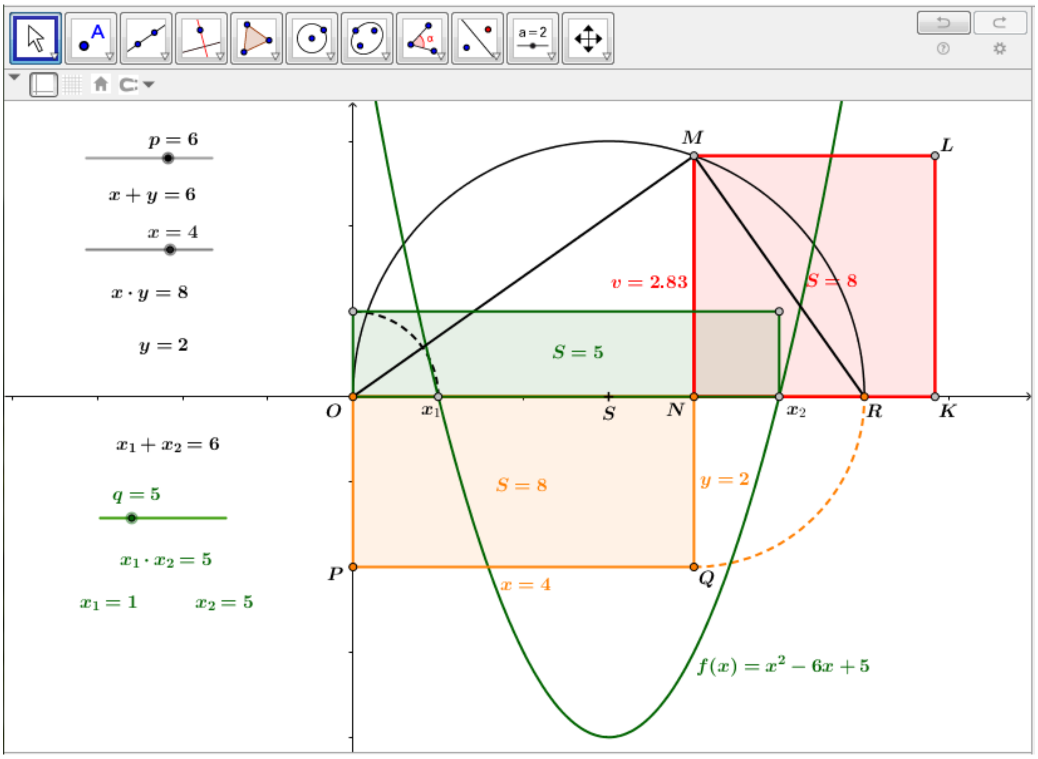
- Ak zmeníme napr. obsah obdĺžnika na 81 a polovičný obvod zostane rovnaký, tak riešením úlohy bude štvorec so stranou dĺžky 9. Príslušná kvadratická rovnica má v tomto prípade jedno riešenie (dvojnásobný koreň).
- Ak zvolíme napr. polovičný obvod 15 a obsah sa nezmení, tak neexistuje obdĺžnik požadovaných vlastností. Teraz zodpovedajúca kvadratická rovnica nemá riešenie.

Je dobré ešte zdôrazniť, že do vytvárania nových úloh určitého *strapca* možno vtiahnuť aj študentov. Je veľmi cenné, ak študenti dokážu sami sformulovať podmienky, kedy existuje obdĺžnik požadovaných vlastností, teda pre aké hodnoty jeho polovičného obvodu a obsahu má príslušná kvadratická rovnica jedno alebo dve riešenia, príp. nemá riešenie. Po takýchto aktivitách by už malo byť zrejmé, že pri malom obvode nemôže byť obsah ľubovoľne veľký, avšak obsah môže byť ľubovoľne malý pri akomkoľvek obvode obdĺžnika. Na tento účel je vhodné si zostrojiť v programe GeoGebra rôzne vizualizácie riešenia úlohy. Prvou z možností je vytvorenie modelu, v ktorom je možné meniť pomocou nástrojov „*posuvníkov*“ iba numerické zadanie úlohy a sledovať, ako zmeny týchto parametrov vplývajú na celkový počet riešení úlohy (viď obr. 4).



Obrázok 4

Okrem už vyššie uvedeného by bolo dobré si uvedomiť, že v geometrickej interpretácii riešení úloh možno využiť aj Euklidovu vetu o výške. Presnejšie, ak zostrojíme pravouhlý trojuholník nad preponou dĺžky $p = x + y$, tak obsah $q = x.y$ uvažovaného obdĺžnika je rovný druhej mocnine veľkosti výšky v tohto pravouhlého trojuholníka (obr. 5).



Obrázok 5

V prostredí programu GeoGebra vieme sledovať nielen závislosť obsahu q na veľkosti x pri konštantnom p, ale súčasne aj závislosť koreňov x_1 a x_2 na hodnote q pri konštantnom p a naopak. Odtiaľ je zrejmé, že obsah obdĺžnika q je maximálny v prípade, ak $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}p$, a teda hľadaný obdĺžnik je štvorec. Rovnako platí, že pre $q > \left(\frac{1}{2}p\right)^2$ neexistuje obdĺžnik požadovaných vlastností a úloha nemá riešenie. Predchádzajúce postupy môžeme jazykom algebry zhrnúť nasledovne:

Ak polovičný obvod označíme p a obsah q, tak sústave rovníc

$$x + y = p$$
$$x.y = q$$

zodpovedá kvadratická rovnica v tvare

$$x^2 - px + q = 0, \tag{3}$$

pre korene ktorej dostávame vzťah:

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{4}$$

Ak existujú korene x_1 a x_2, t. j. $p^2 > 4q$, tak rovnicu (3) možno písať v tvare súčinu

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

pričom platia *Vietove vzťahy* v tvare:

$$x_1 + x_2 = p, \quad x_1.x_2 = q. \tag{5}$$

Zovšeobecnený prístup

Zatiaľ sme sa zaoberali riešením kvadratickej rovnice v tvare (3) iba pre kladné hodnoty premenných p a q, pričom sme v geometrickej interpretácii použili jednu z Euklidových viet. Vo všeobecnosti, ak p a q sú ľubovoľné reálne čísla, tak na grafické (geometrické) riešenie kvadratickej rovnice v normovanom tvare

$$x^2 + px + q = 0 \tag{6}$$

použijeme mocnosť bodu vzhľadom na kružnicu (porovnaj v [1]). Tento prístup je vhodný aj pre školskú matematiku, keďže na hľadanie koreňov kvadratickej rovnice sú postačujúce iba euklidovské konštrukcie (viď [2]). V prostredí programu GeoGebra budeme postupovať nasledovne:

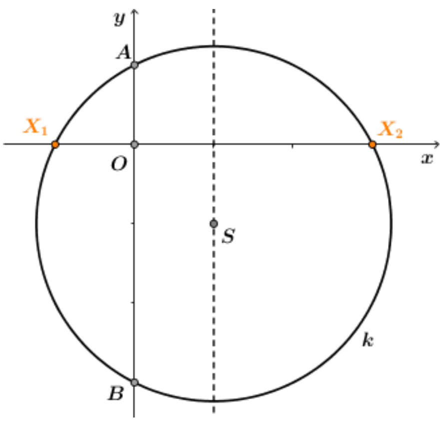
Najskôr zostrojíme body $O = [0;0]$ $A = [0;1]$, $B = [0;q]$ a $S = \left[-\frac{p}{2}; \frac{1+q}{2}\right]$. Nech k je kružnica so stredom v bode S a polomerom dĺžky $r = |AS|$. Pre vzájomnú polohu kružnice k a x-ovej osi nastane práve jedna z nasledujúcich možností:

a) Kružnica k pretína x-ovú os v dvoch rôznych bodoch $X_1 = [x_1; 0]$ a $X_2 = [x_2; 0]$ (viď obr. 6a). Potom pre mocnosť bodu O vzhľadom na kružnicu k platí:

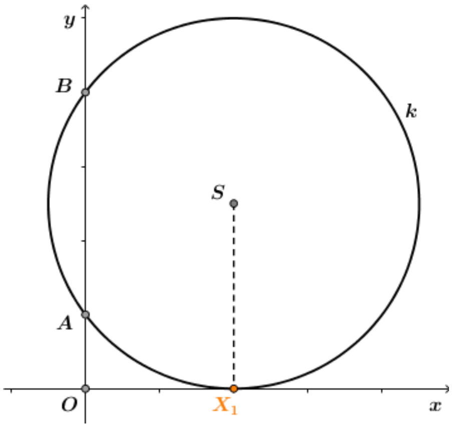
$$(X_1 - O) \cdot (X_2 - O) = (A - O) \cdot (B - O).$$

Po dosadení súradníc jednotlivých bodov dostaneme

$$x_1 \,.\, x_2 = q.$$



a)



b)

Obrázok 6

Stred S kružnice k leží na osi úsečky X_1X_2. Potom pre x-ové súradnice bodov X_1, X_2, S platí:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{p}{2}$$

alebo po úprave

$$x_1 + x_2 = -p.$$

b) Kružnica k sa dotýka x-ovej osi v bode $X_1 = [x_1; 0]$ (viď obr. 6b). Podobne ako v predchádzajúcom prípade, pre mocnosť bodu O vzhľadom na kružnicu k platí:

$$(X_1 - O) \cdot (X_1 - O) = (A - O) \cdot (B - O)$$

a dosadením súradníc jednotlivých bodov máme

$$x_1 \,.\, x_1 = q.$$

Navyše, x-ové súradnice bodov S a X_1 sú súčasne rovné $-\frac{p}{2}$, t. j. platí:

$$x_1 + x_1 = -p.$$

c) Kružnica k a x-ová os namajú žiaden spoločný bod.

Je vidieť, že pre kvadratickú rovnicu (6) sme týmto postupom dostali známe *Vietove vťahy*:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 . x_2 = q. \tag{7}$$

Konštrukciou kružnice k so stredom v bode S a polomerom AS a jej priesečníkov s x-ovou osou dostávame všetky riešenia kvadratickej rovnice (6). Ich počet zodpovedá práve počtu priesečníkov kružnice k s x-ovou osou.

Záver

V súčasnej školskej matematike má dynamická podpora výučby svoje nezastupiteľné miesto, keďže prispieva nielen k ľahšiemu a rýchlejšiemu pochopeniu učiva, ale aj k jeho hlbšej fixácii. V tomto článku sme sa zamerali na niektoré možnosti použitia voľne dostupného programu GeoGebra pri vizualizácií pojmov z algebry, pri riešení rovníc druhého stupňa. Používanie nástrojov tohto programu pomáha študentom nahliadnuť na podstatu veci aj v prípade riešenia kvadratických rovníc. Rôzne pohľady na geometrické či grafické hľadanie koreňov kvadratickej rovnice, prepojené s ich algebraickou podstatou (Vietove vzťahy), sú zdrojom viacerých študentských aktivít, ktoré prispievajú k prirodzenému osvojovaniu si nových pojmov. Aj keď sme sa v tomto príspevku venovali iba riešeniu kvadratickej rovnice v normovanom tvare, pozorný čitateľ si iste uvedomil, že všetky postupy môžeme využiť aj pri riešení kvadratickej rovnice vo všeobecnom tvare: $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c sú reálne čísla $(a \neq 0)$.

Literatúra

[1] Billich, M.: Solving Quadratic Equations. In: *Proceedings of the XIIth Czech-Polish-Slovak Mathematical School*, Hluboš 2005, s. 88-92.

[2] Čižmár, J.: Euklidovské konštrukcie. *Proceedings of Seminars on Computational Geometry SCG'99*, Volume 8, p. 31-47.

[3] Kopka, J.: *Ako riešiť matematické problémy*. Ružomberok: VERBUM, 2010.

[4] Kopka, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem, UJEP 1999.