

Niekoľko poznámok o aspektoch vizualizácie v matematickom vzdelávaní

Some Remarks on Aspects of Visualization in Mathematics Education

Jozef Fulier^{a*}

*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 19 April 2018; received in revised form 9 May 2018; accepted 15 May 2018

Abstract

In this article we discuss the importance of visual thinking development and visual competence of students in mathematics education. We used few examples of graphical form of representation as evidence from history to demonstrate its positive influence on mathematical analysis and mathematics education.

Keywords: mathematics education, visualization, mathematical analysis, history of mathematics

Classification: C30, D30, A30

Úvod

Dnes žijeme v dobe, k názvu ktorej môžeme bez nadsádzky pridať i prívlastok *vizuálna*. Obrazy v televízii, na internete, najmä vo forme reklám či šotov, ale aj v klasických printových médiách (novinách, časopisoch a knihách) majú spravidla dokonalý dizajn, aby nás zaujali vizuálne. Nikdy predtým nebol vplyv vizuálnych obrazov pre manipulovanie a zámerné ovplyvňovanie ľudí tak veľký ako dnes. O sile pôsobenia vizuálnych obrazov, o sile myslenia v obrazoch svedčí aj skutočnosť, že hoci sú niektoré obrazy celkom jednoduché až triviálne, vystihujú a vyjadrujú hlboké a komplexné myšlienky. Preto je iste veľmi dôležité rozvíjať u každého človeka schopnosť *vizuálneho myslenia*.

Väčšina z nás sa narodila s darom vizuálnej inteligencie. Spomeňme si, ako nás v predškolskom veku bavilo maľovať, kresliť či modelovať. Bohužiaľ, pokiaľ túto schopnosť myslieť vizuálne cielene ďalej nerozvíjame, s pribúdajúcim vekom ju postupne strácame, na čom má nemalý podiel aj súčasné vzdelávanie, ktoré kladie akcent viac na slová a čísla. To je iste na škodu veci, pretože vizuálne (obrazovo-názorné) myslenie je účinným nástrojom pre riešenie nielen *praktických manipulatívnych problémov*, ale aj *abstraktných problémov, vrátane problémov matematických*.

V tomto článku nás bude najviac zaujímať problematika *vizualizácie a vizuálneho myslenia*, resp. *vizuálno-priestorového myslenia*. Arcavi vymedzil pojem vizualizáciu v práci (Arcavi, 2003). nasledovne:

„Vizualizácia je schopnosť, proces a produkt tvorenia, interpretácie, používania a reflexie obrazov, predstáv, schém v našich myšliach, na papieri alebo s použitím technologických nástrojov, s cieľom opisovať a komunikovať

*Corresponding author: jfulier@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.1.24-38

informácie, myslieť a rozvíjať doposiaľ neznáme myšlienky a nasledujúce pochopenia.“

Podľa Gardnera (Gardner, 1999) sú jadrom vizuálno - priestorovej inteligencie schopnosti, ktoré zaisťujú presné vnímanie vizuálneho sveta, umožňujú transformovať a modifikovať pôvodné vnemy a vytvárajú z vlastných vizuálnych skúseností myšlienkové predstavy, aj keď už žiadne vonkajšie podnety nepôsobia. Vďaka týmto schopnostiam môžeme konštruovať rôzne tvary alebo s nimi manipulovať. Medzi charakteristické črty priestorovej inteligencie sa zaraďuje presné zrkové vnímanie, kreslenie (grafické znázornenie) a manipulovanie s imaginárnymi objektmi.

Pojem vizualizácie spravidla chápeme vo viacerých zmysloch: je to výsledok (produkt), aj samotný proces tvorby vizualizácie a je to tiež i interpretácia existujúcich obrázkov, kresieb a ich reflexia (zrkadlenie) obrazmi v našej mysli, či interpretácia vizuálnych predstáv vytvorených iba našou myslou samotnou.

Hoci tieto tri polohy (*objekt vizualizácie, introspektívna vizualizácia a interpretácia vizualizácie*) zjednodušujú diskusiu, súčasne vnášajú do diskusie o vizualizácii rôzne hľadiská a neraz celú problematiku dosť komplikujú. Ná konečný (2004) upozorňuje, že vizualizácia sa môže opierať nielen o predstavy konkrétnych objektov a pohybov, ale aj o predstavované schémy a štruktúrované diagramy, ktoré reprezentujú predstavy vzťahov medzi skúmanými objektmi. Mentálne operácie s obrazmi môžu byť dopĺňované skutočnými manipuláciami a spravidla do konkrétnej manipulácie aj vyúsťujú. Skutočnosť reprezentujú najmä štruktúrne vzťahy a funkčné vzťahy, pričom oba môžu byť reprezentované predstavami: v mysli môžeme mať nielen obraz danej situácie a súčasne si môžeme predstaviť, čo sa stane, ak sa v danej situácii niečo zmení.

V uvedenej súvislosti je vhodné poznamenať, že napriek tomu, že existujú aj nenázorné spôsoby myslenia, transformácia abstraktného na názorné pomáha pochopiť abstraktné. Vizualizácia patrí k základným kognitívnym stratégiám v tvorivosti, objavovaní, vynaliezavosti a schopnosti riešiť problémy. Z ľudskej schopnosti vidieť (predstaviť si) veci a javy vyplýva aj schopnosť induktívne myslieť. Obrazy sú pre tvorivé myslenie podstatné, pretože veľká časť našej inšpirácie sa deje v obrazoch.

Význam vizualizácie potvrdzuje zistenie, že najväčšia časť mozgovej kôry je zameraná práve na videnie a vizuálnu analýzu. Koniec-koncov dokumentujú to i všeobecne známe príslovia: „Lepšie raz vidieť, ako tisíckrát počuť.“, „Jeden obraz povie viac ako tisíc slov.“ a pod. Mnohé z našich myšlienok sú transformované do obrazov a pravdepodobne sú aj takto zakódované. Napríklad, keď si spomíname na dej románu, ktorý sme čítali v minulosti, zápletku deja si vybavujeme spravidla skôr ako sled obrazov, než ako reťazec slov použitých autorom.

Má vizualizácia význam aj pre vysoko abstraktné a exaktné vedy, medzi ktoré patrí v prvom rade matematika?

Je vhodné si uvedomiť, že vizualizácia a vizuálne myslenie ďaleko prekračuje rámec fyziologického zraku človeka. Krásnym, i keď smutným príkladom, je osud Leonharda Eulera (1707 - 1783), jedného z najväčších matematikov v histórii ľudstva. L. Euler najprv oslepol na jedno oko a neskôršie úplne. Napriek tomuto hendikepu dokázal vytvoriť celý rad

vynikajúcich a rozsiahlych diel. Novším prípadom bol osud ruského matematika L. S. Pontriagina (1908 - 1988), ktorý oslepol už v štrnástich rokoch pri výbuchu petrolejového variča. Avšak, stal sa vynikajúcim matematikom. Predovšetkým vďaka pomoci jeho matky, ktorá mu čítala matematické články. Je teda viac ako zrejmé, že vytvoriť také úžasné diela, aké nám zanechali len títo dvaja matematici, je s absenciou pokročilých vizualizácií a rozvinutého vizuálneho myslenia určite nemožné. Hoci už z týchto príkladov sa dá odpoveď na položenú otázku tušiť, nechajme ešte prehovoriť niekoľkých význačných matematikov, resp. teoretických fyzikov, ktorí sa k tejto problematike vyjadrili.

Podľa francúzskeho matematika Jacquesa Hadamarda (1863 - 1965) vizuálne myslenie je veľmi dôležitou súčasťou myslenia matematikov. Vo svojej knihe (*Hadamard, 1945*) cituje list od Alberta Einsteina (1879-1955), v ktorom Einstein píše, že *podstatou jeho myslenia sú obrazy*. Einstein sa v uvedenom liste vyjadruje takto:

„Slová prirodzeného jazyka, v písanej či hovorenej forme, ako sa zdá, nehrajú žiadnu rolu v mechanizme môjho myslenia. Psychické entity, ktoré sú podľa všetkého prvkami myslenia, sú isté znaky a viac-menej jasné obrazy, ktoré môžu byť ľubovoľne reprodukované a kombinované. Je tu samozrejme aj isté spojenie medzi tými prvkami a relevantnými matematickými pojmami. Je tiež jasné, že želanie dosiahnuť nakoniec logicky spojené pojmy je emocionálna báza tejto trochu nejasej hry so spomenutými prvkami. Vyššie zmienené prvky sú v mojom prípade vizuálneho a niekedy muskulárneho typu. Ak zoberieme túto kombinatórnu hru z psychologického hľadiska, zdá sa, že je základnou vlastnosťou produktívneho myslenia... Konvenčné slová či iné znaky musia byť prácne vyhľadávané až v druhej fáze, až keď zmienená asociačná hra je ukončená a dostatočne upevnená, ktorú potom môžeme ľubovoľne reprodukovať.“

Poznamenajme tiež, že silu a dôležitosť vizualizácie dokazujú už formulácie, resp. zadania rozličných hlavolamov a problémov s reálnym kontextom, ktoré spravidla obsahujú *obrazy, vizualizáciu problémovej situácie*, ako prirodzené a určite veľmi dôležité prostriedky pre hľadanie ich riešení. Dobrým príkladom je napríklad úloha „*riešiť labyrint*“. Jeho slovný opis môže byť totiž tak ťažkopádny, že potencionálny riešiteľ problému by mal veľké problémy situácii vôbec porozumieť, nieto ešte uvažovať o jeho riešení. Inak povedané, v mnohých prípadoch je *obrazotvornosť* (schopnosť predstavovať si veci a deje vo forme vizuálnych predstáv a myšlienok) oveľa výhodnejšia a efektívnejšia ako *verbálne uvažovanie*.

Hoci z teoretického hľadiska sú *lingvistika* a *obrazotvornosť* rovnako produktívne, v praxi jednoznačne vyhráva *obrazotvornosť*. Pravdepodobne je to spôsobené tým, že k hlavným výhodám obrazotvornosti vo vzťahu k lingvistike sa dajú identifikovať minimálne tri zjavné atribúty: *paralelizmus, rýchlosť* a *mnohorozmernosť*.

Paralelizmus tkvie v tom, že lingvistické deje sa totiž spravidla odohrávajú v *časovej následnosti*, na rozdiel od obrazu - napríklad pri sledovaní filmu, kde naraz vnímame gestá či pohyby, resp. interakciu dvoch, troch či viacerých osôb. Tento atribút je prirodzene

hmatateľný aj pri *vizuálnom vnímaní* štruktúrovaného matematického diagramu, či grafu funkčnej závislosti nejakej veličiny od iných veličín, ktoré nám spravidla odhalí aj ďalšie, dovtedy skryté súvislosti. *Rýchlosť* súvisí s tým, že obraz znázorňujúci isté matematické vzťahy a súvislosti pochopíme oveľa rýchlejšie a komplexnejšie ako pri lingvistickom uvažovaní - často *jedným pohľadom*. *Mnohorozmernosť* súvisí s tým, že vizuálna obrazotvornosť je médiom, ktorá nám umožňuje videnie v dvojrozmernom či v trojrozmernom priestore, čím myšlienke poskytuje nové dimenzie, nový „priestor“.

Problematika vizualizácie (názornosti) v matematickom bádani je považovaná za jednu z najdôležitejších v rozvoji matematického myslenia. Významný nemecký matematik *David Hilbert* (1862-1943) (*Hilbert - Vossena*, 1932) sa o problematike názornosti v matematike, špeciálne v geometrii, ktorú je možné považovať za základný zdroj názorných predstáv matematických pojmov i teórií - vyjadril nasledovne:

„V matematike sa stretávame, podobne ako v iných oblastiach bádania, s dvoma tendenciami: s tendenciou k abstrakcii a s tendenciou k názornosti. Tendenciou k abstrakcii sa snažíme na základe logiky oboru jednotlivé disciplíny systematicky usporiadať. Názornosť vychádza skôr zo živého nazerania a ich obsahových vzťahov. V geometrii viedli abstraktné princípy k veľkolepým systematickým stavbám, akými sú napr. algebrická a Riemannova geometria a topológia. V nich sa podarilo široko aplikovať abstraktné uvažovanie, symboliku a kalkuly. Napriek tomu však názornosť zohráva dodnes významnú úlohu v geometrii, a to nielen ako podnecujúca sila v bádani, ale aj z hľadiska chápania a posudzovania výsledkov vedeckého bádania.“

Všeobecné poznámky k významu vizualizácie pre vyučovanie školskej matematiky

Za dôležitý míľnik v pestovaní vizuálnej kultúry je možné považovať dielo významného českého pedagóga *J. A. Komenského* (1592 – 1670) s názvom *Orbis Pictus*, ktoré prvýkrát vyšlo v roku 1658. Zdalo by sa, že o dôležitosti názornosti a význame rozvoja vizuálneho myslenia pre vedu i pre samotné vyučovanie a učenie sa matematike dnes už nikto nepochybuje. Nie je to však celkom tak. Napriek veľkému množstvu prác (či práve preto), ktoré sa zaoberajú vizualizáciou vo vede a vo vzdelávaní, vrátane matematiky, vznikla vo vede o vzdelávaní zaujímavá situácia. Kým vo všeobecnosti vedecká komunita zaoberajúca sa vzdelávaním priznáva užitočnosť a účinnosť vizualizácie vo vzdelávaní, vedecká komunita pre matematické vzdelávanie sa k tomuto problému stavia pomerne vlažne.

Konkrétne, dvojica *G. Hanna* a *N. Sidoli* v práci (*Hanna. – Sidoli*, 2007) rozdeľuje súčasných matematikov a didaktikov matematiky - podľa ich názorov na postavenie vizualizáciu v matematike a jej vzdelávaní - do troch základných skupín.

Prvá skupina akceptuje vizualizáciu ako doplnok dôkazu, druhá považuje vizualizáciu za základnú a dôležitú (nie však postačujúcu) časť dôkazu a tretia skupina matematikov tvrdí, že vizuálnu reprezentáciu je možné akceptovať ako dôkaz matematického tvrdenia. Uvedení autori sa prikláňajú k názoru, že väčšina súčasných matematikov je presvedčená o tom, že vizuálne obrazy a vizuálne reprezentácie zohrávajú síce dôležitú, ale predsa len obmedzenú úlohu v dôkazoch.

Na druhej strane *B. Casselman* (2000) tvrdí, že

„...napriek odporcom...obrázky – dokonca aj keď sú iba v psychike človeka – často hrajú kľúčovú rolu v logických dôkazoch“ a môžu „v sebe niesť informácie, niekedy celé dôkazy.“

J. Borwein a *L. Jörgenson* si tiež kladú otázku, či môže obrázok slúžiť ako forma „vizuálneho dôkazu“. Aj keď ich odpoveď je kladná, trvajú na tom, že takýto „vizuálny dôkaz“ by mal spĺňať minimálne tri základné podmienky (ktoré však nepovažujú za úplné):

- *spoľahlivosť* – prostriedky vedúce k dôkazu majú byť spoľahlivé;
- *zhoda* – prostriedky a výsledok dôkazu musia byť v zhode s ostatnými známymi faktami a dôkazmi;
- *opakovateľnosť* – dôkaz by mal byť jednoducho znovu demonštrovateľný inému pozorovateľovi.

Títo dvaja matematici pripisujú vizuálnemu dôvodu a argumentácii v matematike veľkú dôležitosť. Dokonca tvrdia, že niektoré *vizuálne reprezentácie* je možné považovať za úplný dôkaz daného tvrdenia.

Na druhej strane (čo je pravdepodobne spôsobené, už vyššie uvedeným, vlažným až odmietavým postojom nemalej skupiny „ortodoxných“ matematikov k vizualizácii), nie je možno celkom prekvapujúce. Ide o to, že vizuálne metódy riešenia problémov, vrátane osvetľovania matematickej argumentácie prostredníctvom *geometrickej analógie* sú, napriek svojej vysokej účinnosti, pomerne zriedkavé v učebniciach matematiky. Potvrdzuje to i výrok súčasného matematika a významného didaktika matematiky *Iana Stewarta*:

„Obrazy prenášajú omnoho viac informácií než slová. Mnoho rokov sme odvykali žiakov používať obrázky, pretože „nie sú presné“. To je smutné nedorozumenie. Áno, obrázky nie sú presné, ale pomáhajú myslieť, a takouto pomocou by sme nemali opovrhovať.“

Vizualizácia je prirodzeným a veľmi dôležitým prvkom matematického myslenia, ktorá hrá veľkú úlohu pri objavovaní vzťahov a súvislostí medzi matematickými objektmi v prenose a komunikácii v matematike. Pekne to vystihol aj významný český matematik *P. Vopěnka* (1935 - 2015):

„Neuznávání obrázků a náčrtků za plnohodnotný způsob sdělování matematických poznatků, to je důsledné trvání na úplných slovních popisech sdělovaných poznatků, výrazně umrtvuje dynamiku matematického poznávání.“ (Vopěnka, 2004)

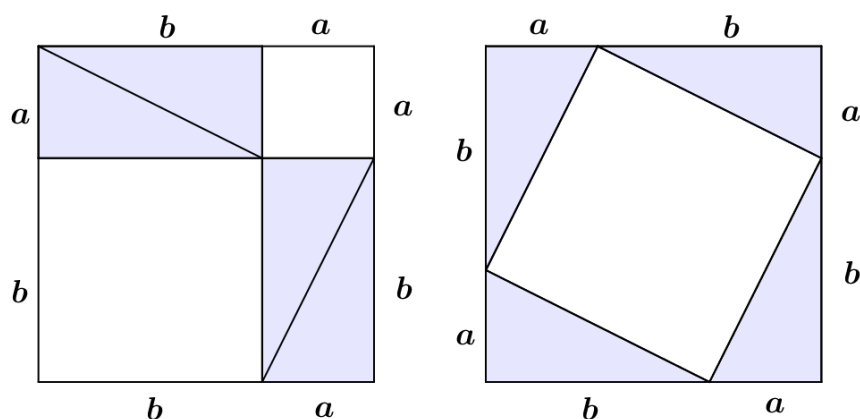
Spomeňme tiež, že aj známy popularizátor matematiky *Martin Gardner* (1914 – 2010) zdôrazňoval, že strohý a pre niekoho i „nudný“ dôkaz matematickej vety môže byť často doplnený jednoduchými a krásnymi geometrickými analógiami, z ktorých je pravdivosť vety zrejmá hneď na prvý pohľad (*Gardner*, 1973).

O tom, že je to naozaj možné, presvedčuje väčšinu z nás aj kniha *„Proofs without word: Exercises i Visual Thinkings“* od *R. Nelsona* (Nelson, 1993), kde je možné nájsť veľa podnetných vizualizácií, z ktorých pravdivosť daného tvrdenia (najčastejšie v tvare rovnosti či nerovnosti) je úplne zrejmá. Tieto obrázky (vrátane nevyhnutného minima vzťahov a

súvislosti vo forme symbolických zápisov pre lepšie pochopenie, príp. slovné pomenovania tam vystupujúcich objektov) poskytujú, aj podľa nášho názoru, vizuálne potvrdenie skúmaného tvrdenia, ktoré je možné považovať aj za jeho matematický dôkaz.

Zdá sa, že situácia je oveľa jednoduchšia, ak sa obmedzíme na vyučovanie *geometrie* na základných a stredných, či dokonca aj na vysokých školách. *Vizualizácia* je prirodzeným a veľmi dôležitým prvkom matematického myslenia v geometrii, ktorá hrá veľkú úlohu pri objavovaní vzťahov a súvislostí medzi matematickými objektmi v prenose a komunikácii v matematike. Na začiatku poznávacieho procesu je priame zmyslové poznanie skutočnosti (zmyslová skúsenosť), potom sa tvoria predstavy, a až potom pojmy. Zmyslová skúsenosť je základom a tvorí prameň poznávania skutočnosti. Pre priblíženie uveďme *zdôvodnenie platnosti* („*dôkaz*“) *Pytagorovej vety*, ktoré je reprezentované dvojicou zhodných štvorcov (pozri obr. 1). V tomto prípade totiž *nemusíme nič počítať*. Stačí si iba uvedomiť, že obsahy vyšrafovaných častí (pozostávajúce zo štyroch zhodných trojuholníkov) oboch štvorcov (majúcich rovnaký obsah) sa rovnajú, preto sa prirodzene rovnajú aj obsahy nevyšrafovaných častí oboch štvorcov, čo však znamená, že platí $a^2 + b^2 = c^2$. Samozrejme, že môžu vzniknúť pochybnosti, či toto je možné naozaj považovať za korektný dôkaz *Pytagorovej vety*.

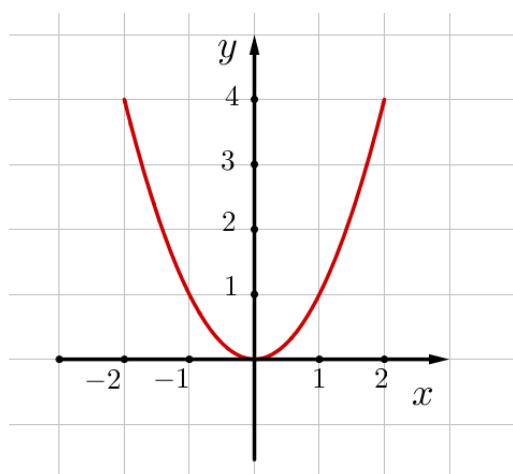
Treba si však uvedomiť, že v geometrii existuje veľmi dlhá tradícia používania diagramov pri jej vyučovaní, preto po odstránení (doplnení) určite nie celkom triviálnych námietok, je možné uvedený diagram za školský dôkaz tejto vety uznať. Na druhej strane je zrejmé, že „*vidieť*“ v uvedenej dvojici diagramov dôkaz nejakého matematického tvrdenia, nie je možné bez predchádzajúcej skúsenosti. Umeniu *vidieť* v *danej vizualizácii* identifikovať na obrázku, resp. v mentálnej predstave, istú matematickú štruktúru, resp. objaviť a vidieť určité vzájomné súvislosti a relačné vzťahy medzi nejakými kvantitami, ktoré sú prítomné v danej vizualizácii, sa musíme *tiež naučiť*.



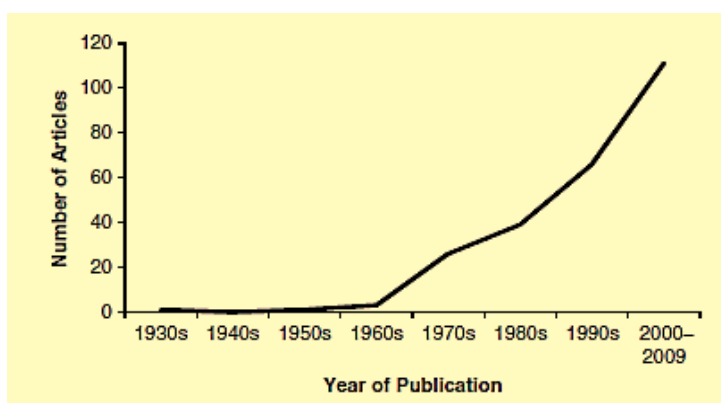
Obrázok 1. Dôkaz Pytagorovej vety

Z hľadiska akceptácie vizualizácie ako podporného prostriedku pre zdôvodňovanie záverov je o čosi zložitejšia situácia v ostatných matematických disciplínach, napríklad v matematickej analýze a algebre. V elementárnej matematickej analýze k základným objektom vizualizácie patrí *graf funkcie*. Pripomeňme si, že zavedenie a skúmanie funkčnej závislosti ako matematického objektu spolu s jeho grafickým znázornením patrí k významným, ale neskorším míľnikom vývoja matematiky. Hoci prvé začiatky znázornenia

grafu funkčnej závislosti nachádzame už v dielach *N. Oresmeho* (1323 - 1382) a *R. Descartesa* (1596 -1650), zakladateľa analytickej geometrie, k úplnému rozvinutiu učeníu o funkciách dochádza až v 18. a 19. storočí v dielach *I. Newtona* (1643 – 1727), *G. W. Leibniza* (1646 – 1716), *L. Eulera* (1707 – 1783), *A. Cauchyho* (1789 – 1857) a *K. Weierstrassa* (1815 -1897). Poznamenajme, že kreslenie a interpretáciu grafov funkcie je jedno najbežnejších využití vizualizácie v školskej matematike. Jednoduchý rovinný graf je geometrickou reprezentáciou vzťahu medzi dvoma premennými.



Obrázok 2. Graf funkcie $f: y = x^2$



Obrázok 3. Počty publikovaných článkoch o vizualizácii v období 1930-2009 (zdroj: Philips-Norris-Macnab, 2010)

Na obr. 2 je znázornená časť grafu funkcie $f: y = x^2, x \in \mathbb{R}$, ktorou sa zaoberal už *Galileo Galilei* pri štúdiu voľného pádu telesa. Od študentov stredných škôl sa očakáva, že pochopia že funkcia f zadaná rovnicou $y = x^2$ a graf tejto funkcie $G(f) = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$ kódujú tie isté matematické informácie. Teda jej symbolická reprezentácia v tvare formuly a aj jej grafická reprezentácia predstavujú dve stránky toho istého objektu.

Táto *dualita pojmu funkcia* stavia pred tvorcov učebných osnov a autorov učebníc dôležitú otázku. Čo bude pri štúdiu funkcií na strednej škole východiskovým pojmom? Bude to funkčný predpis $f: y = f(x)$ a jej graf bude len pomôckou pre štúdium jej vlastností, alebo prioritným pojmom bude graf funkcie a funkčný vzťah bude iba doplnkom pre štúdium vlastností príslušnej funkcie?

Vzhľadom na to, že v súčasnosti je možné prostredníctvom dostupných počítačových softvérov bez problémov vytvárať vizualizácie matematických objektov, teda aj grafy funkcií, zdá sa, že sa postupne presadzuje skôr druhá alternatíva. Samozrejme, že príklon k tejto alternatíve je úplne jednoznačný pri funkčných závislostiach získaných z empirických či štatistických údajov, ktoré boli odpozorované v reálnej praxe, príp. boli získané v laboratórnych podmienkach alebo zberom a spracovaním štatistických údajov. V tomto prípade analytické vyjadrenie v tvare rovnice príslušnej funkčnej závislosti spravidla absentuje (ak neberieme do úvahy možné približné aproximácie takýchto funkcií) a je k dispozícii iba jej grafická reprezentácia.

Na obr. 3 je znázornený graf takejto konkrétnej funkčnej závislosti, ktorý vyjadruje počty publikovaných článkoch o vizualizácii v závislosti od času pre obdobie rokov 1930 až 2009. Pri prvom priblížení sa zdá, že cieľom vizualizácie je poskytnúť *reálne zobrazenia sveta*. Bližší pohľad na tento problém však poodhaľuje, že zámerom a ani úlohou vizualizácie vôbec nie je *realistické zobrazenie* nejakej situácie, či konfigurácie. V skutočnosti vizualizácie správne fungujú práve preto, že sú v našej mysli podrobené procesu *idealizácie* a *abstrakcie*, ktoré v nemálo prípadoch umožňujú s minimom vynaloženej energie získavať maximum kľúčových informácií o skúmanom objekte alebo jave. Už na takom jednoduchom objekte, akým je graf na obr. 3, je možné demonštrovať jednu z charakteristických vlastností vizualizácie, o ktorej hovorí Arcavi: „Vizualizácia zviditeľňuje neviditeľné.“

Totíž graf tejto funkcie, ktorý je vizuálnou reprezentáciou uvedenej závislosti, prináša nielen súbor štatistických údajov o počte publikovaných článkoch v danom časovom období (tie by bolo možné reprodukovat' aj slovne), ale už *jediný pohľad*, resp. niekoľko málo opakovaných pohľadov na tento graf, nám prináša *celý príbeh* o publikovaní článkov (o vizualizácii) v uvedenom období. Súčasťou tohto príbehu sú, okrem jednoduchých kvantitatívnych charakteristík uvedeného procesu, aj jeho *kvalitatívne stránky*. Napríklad, v ktorých rokoch počet článkov najrýchlejšie rástol, v ktorých rokoch bol rast iba pozvoľný, prípadne stagnoval a pod.

Naviac, z *aspektu vzdelávania* je nemalou výhodou aj to, že organické prepojenie vizuálnej reprezentáciou uvedenej závislosti s dôležitými kvantitatívnymi s kvalitatívnymi stránkami daného javu, umožňuje ľahšie a spravidla i trvácnejšie uloženie kľúčových informácií o tejto závislosti do dlhodobej pamäti vzdelávaných subjektov (žiakov).

Niekoľko poznámok k významu vizualizácie pre vyučovanie matematickej analýzy v učiteľskom štúdiu

V tomto druhu vysokoškolského štúdia sa za najdôležitejšie považuje, aby študenti dostatočne hlboko pochopili *kľúčové koncepty* základných pojmov matematickej analýzy: *funkcia, limita funkcie, spojitost' funkcie v bode a množine, derivácia funkcie, neurčitý a určitý integrál*. Preto je veľká pozornosť venovaná *genéze vzniku* týchto pojmov a určovaniu (niekedy hovoríme o dôkaze) vyššie spomínaných charakteristík danej funkcie na základe definícií týchto charakteristík (*Heineho*, resp. *Cauchyho* definícia limity funkcie v bode, definície spojitosti a derivácie funkcie v danom bode či na množine a pod.). Veľmi dôležitou časťou tejto fázy vyučovania základov matematickej analýzy sú pôsobivé a účinné geometrické interpretácie uvedených kľúčových pojmov. Tieto geometrické reprezentácie základných pojmov sú spravidla dopĺňané geometrickými interpretáciami dôležitých tvrdení diferenciálneho počtu (viet o *strednej hodnote* funkcie: vety *Rolleovej*, *Lagrangeovej* či *Cauchyho*; *Taylorovej* vety, vety o vzťahu znamienka prvej derivácie (resp. druhej derivácie) funkcie a jej monotónnosti (resp. jej konvexnosti či konkávnosti)), ale aj geometrickými interpretáciami základných viet integrálneho počtu, ktoré sú spravidla doplnené o pôsobivé vizualizácie jednotlivých aplikácií integrálneho počtu.

Ak sa na problematiku vizualizácie bližšie pozrieme prostredníctvom príslušných *učebníc* štandardných matematických disciplín v učiteľskom štúdiu matematiky, tak

z hľadiska frekvencie výskytu vizuálnych reprezentácií, obrázkov, diagramov a grafov funkcií v týchto učebniciach je možné zistiť prekvapivý jav: zo všetkých klasických matematických disciplín (geometria, algebra, matematická analýza, matematická štatistika atď.) obsahujú učebnice matematickej analýzy najviac rôznorodých vizuálnych reprezentácií (možno okrem niekoľkých učebníc geometrie).

Pravdepodobne to súvisí s tým, že v počiatočných fázach štúdia na univerzite najväčšie problémy študentom spôsobuje štúdium elementárnej matematickej analýzy. Väčšinou totiž ide o vizualizácie (ako sme už konštatovali vyššie), ktoré uľahčujú pochopenie pojmov a obsahu tvrdení jednotlivých tvrdení matematickej analýzy. Z tohto hľadiska je možné považovať tieto geometrické interpretácie za veľmi významné. Táto skutočnosť je o to zaujímavejšia, že väčšina učiteľov matematickej analýzy patrí k tej skupine matematikov, ktorí neuznávajú *vizuálny dôkaz* a požadujú *dôkaz analytický*.

V súčasnosti sa vo vyučovaní matematickej analýzy nemusíme obmedzovať iba na statické obrázky, ktorými sú ilustrované pojmy a dôležité tvrdenia tejto matematickej disciplíny v učebniciach. Dnes sú dostupné v triedach a prednáškových miestnostiach rôznorodé *informačné a komunikačné technológie*: počítače, tablety, vybavené interaktívne bohatým edukačným softvérom, ku ktorým patria programy dynamickej geometrie (napríklad GeoGebra), ako aj komplexné počítačové systémy typu CAS (napríklad *Mathematica*, *MathLab*, *Maple* a pod).

Informačné technológie umožňujú vytvoriť primeraný a dostatočne presvedčivý vizuálny obraz matematickej situácie na monitore počítača a to nielen vo forme statického obrázku daného javu, ale aj vo forme *dynamickej simulácie* (napríklad, využitím *Java appletov*). Tieto nám do príslušnej vizuálnej prezentácie vnášajú *pohyb a dynamiku* procesov spojených s danou matematickou situáciou, ktoré proces pochopenia i samotný proces osvojovania nových poznatkov posúva kvalitatívne na oveľa vyššiu úroveň.

Na druhej strane treba priznať, že medzi vizuálnymi reprezentáciami, s ktorými sa bežne oboznamujú študenti pri vyučovaní matematickej analýzy, je pomerne veľa aj takých, ktoré zdanlivo do matematickej analýzy nepatria. Napríklad geometrická interpretácia *A-G nerovnosti*, t.j. vzťahu medzi aritmetickým a geometrickým priemerom; či aritmetické vzťahy potrebné pri výpočtoch *Riemannovho integrálu* pomocou integrálnych súčtov konkrétnych funkcií. Ide o rôzne vzťahy (dokazované matematickou indukciou), akými sú

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = [1 + 2 + \dots + n]^2.$$

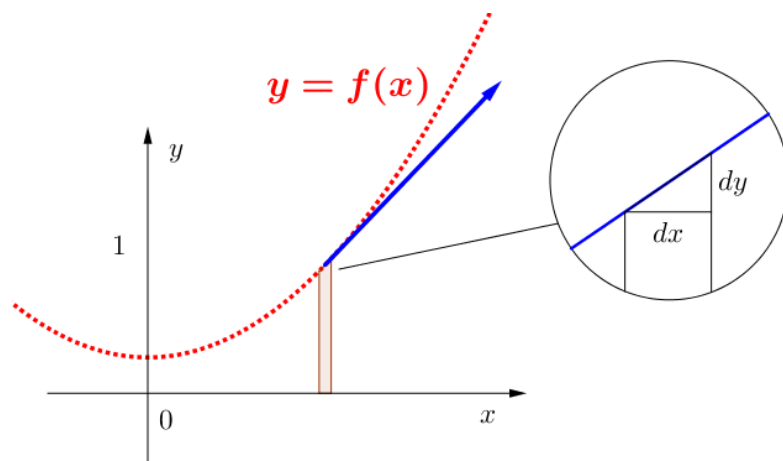
K tradičným a nemenej dôležitým *grafickým formám reprezentácie* v matematike zaradíme aj *symboliku* diferenciálneho a integrálneho počtu. V základných rysoch ju zaviedli jeho zakladatelia - *G. W. Leibniz* (1646 – 1716), *I. Newton* (1643 - 1727), a ktorú do dnešnej podoby vyprofilovali ich nasledovníci (*Euler*, *Lagrange*, *Cauchy*, *Wieierstrass* a ďalší).

V spomínaných začiatkoch infinitezimálneho počtu bol v tvorbe matematickej symboliky úspešný najmä *G. W. Leibniz*. Podľa *Leibniza* by *matematická symbolika* mala odrážať vnútornú podstatu označovaných objektov, čím môže napomáhať k objavovaniu súvislostí medzi uvedenými objektmi. To, že tieto požiadavky *Leibniz* splnil, môžeme ilustrovať vizualizáciou tzv. *charakteristického trojuholníka* (pozri obr. 4), ktorý určuje vzťah

medzi *diferenciálmi* dx, dy, ds . Pomocou nich bolo možné zaviesť aj súčasný pojem *derivácie funkcie* ako podiel diferenciálov dy, dx , t.j. $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Určite stojí za zmienku, že táto symbolika umožňuje anticipovať platnosť významných viet diferenciálneho počtu: napríklad *vety o derivácii zloženej funkcie*, *vety o derivácii inverznej funkcie* a *vety o derivácii funkcie zadanej parametrickými rovnicami*, ktoré pri splnení istých podmienok môžeme zapísať rovnosťami, ktoré pripomínajú štandardné pravidlá pre

počítanie s klasickými zlomkami: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dy}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.



Obrázok 4. Idea charakteristického trojuholníka zloženého z diferenciálov dx, dy, ds

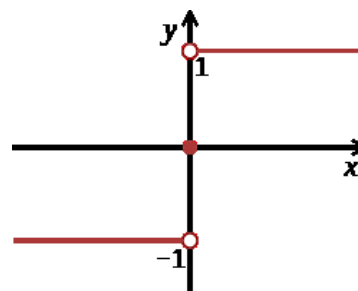
Realistické znázornenie versus nerealistické znázornenie objektu

Budúci učitelia matematiky pri konštrukcii hlbších poznatkov z matematickej analýzy vo svojich myšliach by sa určite mali naučiť konštruovať funkcie s vopred zadanými vlastnosťami. V matematickej analýze sa v prevažnej miere pracujeme najmä s funkciami *elementárnymi*, čo je iste celkom prirodzené, keďže táto trieda funkcií je postačujúca pre väčšinu bežných úloh a aplikácií.

Avšak už študenti prvého ročníka učiteľského štúdia sa stretnú aj s funkciami, ktoré *nie sú elementárne*. Jednou z nich je funkcia *signum*, ktorú zaviedol nemecký matematik L. Kronecker (1823 – 1891). Ide o funkciu, ktorú je možné bez problémov zaviesť už na strednej škole.

Dôvod je zrejмый – jej definícia i graf funkcie $y = \operatorname{sgn} x$ sú pomerne jednoduché:

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ak } x > 0, \\ 0, & \text{ak } x = 0, \\ -1, & \text{ak } x < 0. \end{cases}$$



Obrázok 5 Graf funkcie funkcie $y = \operatorname{sgn} x$

Táto funkcia *nie je elementárnou funkciou*, pretože je definovaná v bode (konkrétne v bode $x = 0$), v ktorom *nie je spojitá*. Žiadna elementárna funkcia takúto vlastnosť nemá, každá z nich je totiž spojitá vo svojom definičnom obore. Poznamenajme, že druhou *nie elementárnou* funkciou, s ktorou sa (ešte v nedávnej minulosti) mohli žiaci strednej školy „stretnúť“ je tzv. *celá časť čísla x* , označovaná symbolom $[x]$.

Študenti učiteľského štúdia sa v úvodnom kurze matematickej analýzy sú oboznámení s ďalšou *nie elementárnou funkciou*, *funkciou χ* , ktorú v roku 1828 prvýkrát uverejnil nemecký matematik a významný priekopník rozvoja všeobecného pojmu funkcia *Peter L. Dirichlet* (1805-1859). Táto funkcia (neskoršie nazvaná na jeho počesť *Dirichletovou funkciou*) je definovaná nasledovne:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ak } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

kde symbol $\mathbb{Q}$ označuje množinu všetkých racionálnych čísel a množinový rozdiel $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ označuje množinu všetkých iracionálnych čísel.

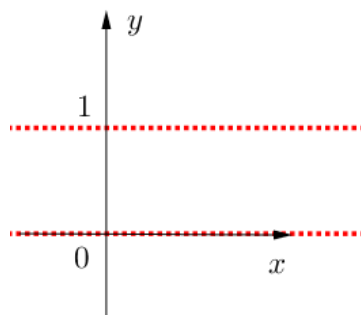
Poznamenajme, že neskoršie sa ukázalo, že *Dirichletovu funkciu* je možné vyjadriť analyticky jedinou rovnicou $\chi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \cos^{2k}(n! \pi x)$.

Dirichletova funkcia χ má významné postavenie v matematickej analýze, pretože má celý rad *neštandardných vlastností*. Jej *neštandardnosť* spočíva v tom, že je definovaná na celej množine $\mathbb{R}$, avšak nemá v žiadnom bode limitu, *v žiadnom bode nie je spojitá, nie je diferencovateľná, na žiadnom intervale nie je monotónna, nie je riemannovsky a ani newtonovsky integrovateľná na žiadnom podintervale množiny $\mathbb{R}$* , a teda neexistuje ani jej *Fourierov rad*. Z tohto dôvodu ju v začiatkoch *nepovažoval za funkciu* ani samotný *Dirichlet* (až neskoršie sa dokázalo, že táto funkcia je tiež integrovateľná, prirodzene vo všeobecnejšom zmysle^{*}).

Práve vyššie uvedené neštandardné vlastnosti umožňujú využívať *Dirichletovu funkciu* v úlohe radu *protipríkladov* v matematickej analýze. Samozrejme, že táto funkcia má aj niekoľko *štandardných vlastností*: je *ohraničená* a v ľubovoľnom podintervale svojho definičného oboru nadobúda *svoje maximum a minimum*.

Z aspektu vizualizácie, ktorej sa v tejto práci venujeme je pre nás dôležité, že *graf tejto funkcie nedokážeme znázorniť!* Realistický graf tejto funkcie (vygenerovaný vhodným počítačovým kresličom grafov funkcií) totiž zdanlivo pozostáva z dvoch priamok: $y = 0, y = 1$, v ktorých sú však *komplementárne „diery“*. Tie však určite *nie je možné vidieť*.

^{*} Existuje napr. *Lebesgueov*, príp. *Kurzweilov integrál* Dirichletovej funkcie na ľubovoľnom uzavretom intervale.



Obrázok 6. Schematické znázornenie grafu Dirichletovej funkcie χ

Dôvodom je jedna zo kľúčových vlastností množiny všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$: *medzi každými dvomi reálnymi číslami je aspoň jedno racionálne číslo a aspoň jedno iracionálne číslo*. Z toho dôvodu nepoužijeme *realistické zobrazenie vizualizácie*, ale použijeme iba istú formu *schematického znázornenia*, ktorá je určite veľmi nepresná a iba približne (skôr ideovo, v myšlienkovvej idealizácii) zodpovedá grafu Dirichletovej funkcie.

Napriek tomu - rešpektovaním informácie o doplnkových diarach v uvedených priamkach - môžeme s využitím *abstrakcie a idealizácie* - *schematicky znázorniť graf* tejto funkcie (pozri obr. 6). Definícia *Dirichletovej funkcie* nám ponúka niekoľko možných zovšeobecnení, ktoré budeme pracovne nazývať „*funkciami dirichletovského typu*“.

Zvoľme dve funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a definujme dve funkcie F, H takto:

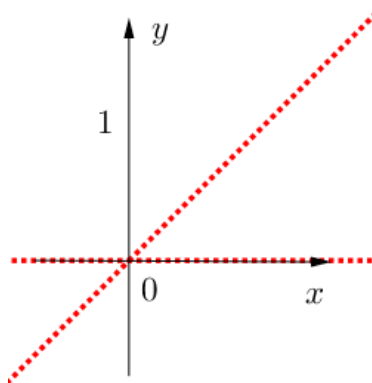
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ak } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases} \quad H(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \\ g(x), & \text{ak } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

Ľahko nahliadneme, že funkcie F, H môžeme pomocou *Dirichletovej funkcie* χ zapísať jedinou rovnicou nasledovne:

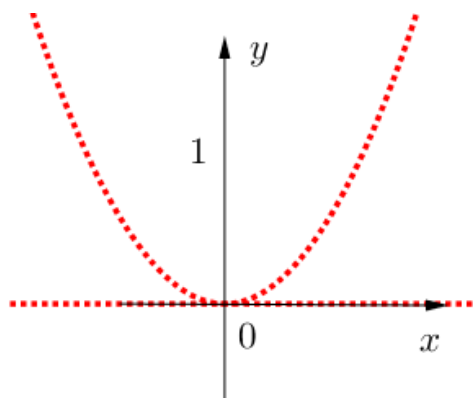
$$F: F(x) = f(x) \cdot \chi(x), \quad H: H(x) = g(x) + \chi(x)[f(x) - g(x)].$$

Vhodnom voľbou funkcie f , resp. funkcií f a g , môžeme dostať funkcie so skutočne pozoruhodnými (neštandardnými) vlastnosťami. Napríklad:

- a) Funkcia $F_1: F_1(x) = x\chi(x), x \in \mathbb{R}$ (resp. funkcia $F_2: F_2(x) = x^2\chi(x), x \in \mathbb{R}$) je definovaná na $\mathbb{R}$, ale iba v jedinom bode (v bode $x = 0$) má limitu a je spojitá (resp. je diferencovateľná) iba v tomto jedinom bode.



Obrázok 7. Schematické znázornenie grafu funkcie $F_1: y = x\chi(x)$



Obrázok 8. Schematické znázornenie grafu funkcie $F_2: y = x^2\chi(x)$

- b) Nech pričom $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú dané, navzájom rôzne reálne čísla. Potom funkcia $F_3: F_3(x) = P_n(x) \cdot \chi(x), x \in \mathbb{R}$ (resp. funkcia $F_4: F_4(x) = P_n^{k+1}(x) \cdot \chi(x), k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$), kde $P_n(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$, je príkladom funkcie, ktorá je definovaná na celej množine $\mathbb{R}$, ale je *spojitá* (resp. *k-krát diferencovateľná*) iba v bodoch $a_1, a_2, \dots, a_n$.
- c) Funkcia $F_5: F_5(x) = e^{-x} \cdot \chi(x), x \in \mathbb{R}$ (resp. funkcia $F_6: F_6(x) = e^{-x^2} \cdot \chi(x), x \in \mathbb{R}$ je príkladom funkcie, ktorá má limitu iba v bode ∞ (resp. iba v bodoch $-\infty, \infty$).
- d) Funkcia $H_1: H_1(x) = 1 + [\cos(2\pi x) - 1] \cdot \chi(x), x \in \mathbb{R}$ je definovaná na celej množine $\mathbb{R}$, ale má limitu, je spojitá a diferencovateľná iba v bodoch *množiny všetkých celých čísel* $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

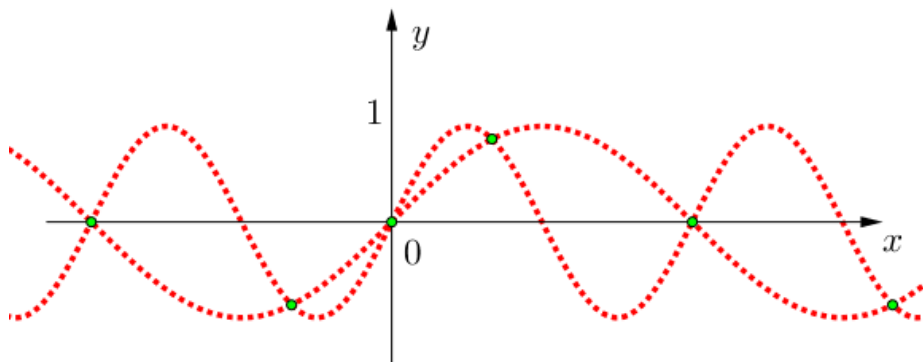
Nech $H: H(x) = g(x) + \chi(x)[f(x) - g(x)]$. Potom bezprostredným využitím našej nerealistickej vizualizácie ľahko nahliadneme, že platí:

1. Ak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, potom aj $\lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = b$.
2. Analogické tvrdenie platia aj pre jednostranné limity.
3. Nech funkcie f, g sú spojité v bode x_0 . Ak navyše $f(x_0) = g(x_0)$, potom funkcia H je spojitá v bode x_0 . Ak $f(x_0) \neq g(x_0)$, potom funkcia H nie je spojitá v bode x_0 .
4. Ak funkcie f, g majú derivácie $f'(x_0), g'(x_0)$ v bode x_0 , a ak navyše $f'(x_0) = g'(x_0) = A$, potom existuje aj derivácia $H'(x_0)$ a platí $H'(x_0) = A$. Vtedy zrejme tiež musí platiť $f(x_0) = g(x_0)$.

Príklad 1. Určte všetky body, v ktorých je funkcia

$$H_2: H_2(x) = \sin 2x + [\sin x - \sin 2x] \cdot \chi(x), x \in \mathbb{R} \text{ spojitá a diferencovateľná.}$$

Riešenie. Využitím grafov funkcií $y = \sin x, y = \sin 2x$ získame schematický graf funkcie $y = H_2(x)$. Riešením rovnice $\sin x = \sin 2x$ určíme priesečníky grafov týchto funkcií. Využitím predchádzajúcich tvrdení o funkcii H ľahko dokážeme, že funkcia H_2 je *spojitá* iba v bodoch množiny $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\mp \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, ktoré zodpovedajú priesečníkom grafov funkcií $y = \sin x, y = \sin 2x$.



Obrázok 9. Schematický graf funkcie $y = H_2(x)$.

Vzhľadom na to, že funkcia $y = H_2(x)$ môže byť *diferencovateľná* iba v tých bodoch, v ktorých sa grafy uvedených funkcií *pretínajú a súčasne* v týchto bodoch majú spoločnú dotyčnicu, je zrejmé, že funkcia H_2 nie je diferencovateľná ani v jednom bode svojho definičného oboru.

Záver

V súčasnosti v teórii vyučovania matematiky silnejú tendencie pre uznanie relevantnosti procesu vizualizácie pre vzdelávanie v matematike. Na druhej strane, v spojitosti s vizualizáciou si nemožno si nevšimnúť aj istý druh nedôvery, ktorá má korene v silnom vplyve vedeckej matematickej praxe na prax pedagogickú.

Je vhodné si totiž uvedomiť, že hoci vizualizácia hrá skutočne iba podradnú či doplnkovú úlohu vo vedeckej produkcii matematických článkov (vrátane príslušných dôkazov nových matematických viet akceptovateľných matematickou komunitou), toto určite neplatí pre matematické vzdelávanie, pretože proces vizualizácie predstavuje účinný alternatívny spôsob získavania matematických vedomostí. Porozumenie a osvojenie matematických konceptov si vyžaduje spravidla viacero reprezentácií, pričom vizuálna reprezentácia môže uľahčiť pochopenie týchto konceptov sama osebe. Vizualizácia je integrálnou súčasťou matematickej aktivity a je účinným spôsobom riešenia problémov vo vyučovaní a učení sa v matematike. I keď pravdou je, že v matematike ako vede, matematický dôkaz je považovaný za jedinou oficiálnu cestu k pravde, určite nie je nevyhnutné, a ani žiaduce, aby sa tento spôsob prenášal do vyučovania matematiky na všetkých školských úrovniach.

Naše skúsenosti s vyučovaním matematiky jednoznačne potvrdzujú, že *vizuálne potvrdenie* platnosti matematického tvrdenia v rámci vyučovacieho procesu vedie nielen k trvalejším vedomostiam študentov, ale vedie k zvyšovaniu sebadôvery vo svoje matematické schopnosti. Platí to najmä pre študentov, ktorým chýbajú dostatočné skúsenosti so *separovanými modelmi príslušných matematických objektov a situácií*.

Je vhodné si uvedomiť, že v procese vzdelávania v matematike má využívanie *abstraktného, ale aj názorného* prístupu nezastupiteľné miesto. Vizualizácia umožňuje žiakom a študentom ľahšie a trvácnejšie osvojovať si poznatky z matematiky. Prehnaným zdôrazňovaním a permanentnou aplikáciou *abstraktného prístupu* sa pre žiakov a študentov *vzdelávací proces* môže stať nudný a nezaujímavý, čo v konečnom dôsledku znamená jeho neúčinnosť a neefektívnosť.

Na druhej strane treba priznať, že nekritické argumentácie a úvahy, ktoré sa opierajú iba o geometrický názor, či zjednodušenú vizualizáciu daného matematického tvrdenia, môže u študentov *potlačiť potrebu analytického matematického dôkazu* daného tvrdenia: keďže z obrázku je to „*zrejmé a jasné*“. Akceptáciou tohto prístupu by si študenti mohli ľahko zvyknúť na povrchné myslenie typu „*vidím, teda verím*“, ktoré je už v príprave budúcich učiteľov matematiky, cudzie a neprípustné.

Literatúra

- [1] Arcavi, A. 2003. *The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics*. In Educational Studies in Mathematics. 2003, roč. 3, č. 52,
- [2] BARWISE, J. – ETCEMENDY, J. 1992. *Hyperproof: Logical Reasoning with Diagrams*. In *Proceedings of the 1992 AAAI Spring Symposium on Diagrammatic*, Stanford: AAAI, 1992, 80-84.
- [3] Fisher, R. – Malle, G. 1992. *Človek a matematika*. Bratislava, SPN 1992. ISBN 80-08-01309-5
- [4] Fulier, J. 2001. *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy*. FPV Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Nitra 2001, 176 strán, ISBN – 80-8050-418-0
- [5] Fulier, J. 2006. *Informačné technológie a aspekt vizualizácie vo vzdelávaní v matematike*. In: Acta Mathematica 9, Nitra: UKF Nitra 2006, s.51 -66, ISBN 80-8094-036-3
- [6] Fulier, J. 2008. *Prvky konstruktivismu vo vyučovaní matematickej analýzy*. In: Acta Mathematica 11, Nitra: UKF Nitra 2008, s.31 - 38, ISBN 978-80-8094-396-7
- [7] Fulier, J. – Ďuriš, V. – Frantová, P. 2007. *Systémy počítačovej algebry (CAS) vo vyučovaní matematiky*. Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Nitra 2007, 284 s.
- [8] Fulier, J. – Šedivý, O. 2001. *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*. Nitra, UKF Nitra 2001.
- [9] Gardner, M. 1994. *My Best Mathematical and Logic Puzzles*, Dover; 1994,
- [10] Guzmán, M. 2002. *The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 2002. 24 p.
- [11] Hadamard, J. 1996. *The Mathematician's Mind: The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press 1996.
- [12] Hanna, G. – Sidoli, N. 2007. Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. In *Mathematics Education* [online]. 2007, vol. 39
- [13] Hejný, M. a kol. 1989. *Teória vyučovania matematiky 2*. SPN Bratislava 1989
- [14] Hejný, M. - Kuřina, F. 2001. *Dítě, škola a matematika*. Praha, Portál, 2001, ISBN 80-7178-581-4
- [15] Nákoněčný, M. 2004. *Základy psychologie*. Praha, Academia Praha 2004.
- [16] Nelsen, R. B. 1993. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. USA: The Mathematical Association of America, 1993.
- [17] Kuřina, F. 2002. *O matematice a jejím vyučování*. In: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*. 2002, roč.31, č.1, s.1 – 8.
- [18] Kuřina, F. 2010. *Vizuální gramotnost jako složka kultury*. In: *MATEMATIKA - FYZIKA - INFORMATIKA*. Prometheus Praha, ročník XIX (2009-2010), č.1, s.1-15.
- [19] Vopěnka, P. 1989. *Rozprawy s geometrií*. Panorama, Praha 1989.
- [20] Vopěnka, P. 2004. *Vyprávění o kráse novobaročské matematiky*. Práh, Praha 2004.
- [21] Philips, L. M.- Norris, S.P. - Macnab, J.S. 2010. *Visualisation in Mathematics, reading and Science Education*, Springer 2010.

Podakovanie

Článok bol podporený grantom **KEGA 020KU – 4/2018** s názvom *Osobnosti slovenskej matematiky- životné vzory pre budúce generácie*.