Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 4, No. 1, p. 13 – 18
ISSN 2453-6083

Aritmetický priemer a geometrický priemer II

Arithmetic Mean and Geometric Mean II

Marek Varga[a]

[a*]*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received 13 April 2018; received in revised form 19 April 2018; accepted 26 April 2018

Abstract

In Mathematics we define several of kinds of the numerical means. Probably most known are the arithmetic mean and geometric mean. In last paper we proved the Cauchy´s inequality in different ways, especially by differential calculus. In this article we will add other ways.

Keywords: Cauchy´s inequality, mathematical induction

Classification: E55

Úvod

Nech sú dané nezáporné reálne čísla a_1, a_2, ..., a_n. Potom reálne číslo $A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ nazývame ich aritmetickým priemerom a reálne číslo definované vzťahom $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$ nazývame ich geometrickým priemerom. Podľa tzv. Cauchyho AG – nerovnosti platí, že $A_n \geq G_n$. Platnosť tohto vzťahu sme dokázali v [1] a to predovšetkým prostriedkami diferenciálneho počtu, presnejšie hľadaním lokálnych či globálnych extrémov vhodných funkcií. Na ďalších riadkoch si ukážeme aj iné dôkazové stratégie.

Matematická indukcia

Podstatu tejto dôkazovej metódy vystihuje nasledovné tvrdenie.

Veta. *Nech $V(n)$ je výrok definovaný pre každé $n \in \mathbf{N}$. Potom výroky $V(n)$ sú pravdivé pre všetky $n \in \mathbf{N}$, ak platí:*

1° $V(1)$ je pravdivý výrok;

2° pre každé $k \in \mathbf{N}$ z pravdivosti výroku $V(k)$ vyplýva aj pravdivosť výroku $V(k+1)$.

*Corresponding author: mvarga@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.1.13-18

Musíme ešte doplniť, že v uvedenom tvare ide asi o najčastejší prípad matematickej indukcie. Vo všeobecnosti však prvý krok nemusíme nutne vykonať pre $n = 1$, môže byť vykonaný pre ľubovoľné $n_0 \in \mathbf{N}$.

Využime matematickú indukciu na dôkaz AG – nerovnosti (pozri [2]); malou zmenou je, že prvý krok vykonáme pre $n = 2$.

Z pravdivej nerovnosti $\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$ vyplýva, že $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, teda výrok platí pre $n = 2$.

Ďalej, v druhom kroku by sme pomocou indukčného predpokladu získali

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \frac{n \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + a_{n+1}}{n+1} \geq \frac{n \cdot \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + a_{n+1}}{n+1}.$$

Označme $a_1 a_2 \ldots a_n = x^{n(n+1)}$, $a_{n+1} = y^{n+1}$. Potom máme:

$$A_{n+1} - G_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}} \geq \frac{n \cdot \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + a_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}} =$$

$$= \frac{n x^{n+1} + y^{n+1}}{n+1} - x^n y = \frac{n x^{n+1} + y^{n+1} - n x^n y - x^n y}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[n x^n (x - y) - y\left(x^n - y^n\right)\right] =$$

$$= \frac{x-y}{n+1}\left(n x^n - y x^{n-1} - y^2 x^{n-2} - \ldots - y^n\right) = \frac{x-y}{n+1}\left(x^n - y x^{n-1} + x^n - y^2 x^{n-2} + \ldots + x^n - y^n\right) =$$

$$= \frac{(x-y)^2}{n+1}\left[x^{n-1} + x^{n-2}(x+y) + x^{n-3}\left(x^2 + xy + y^2\right) + \ldots + \left(x^{n-1} + x^{n-2} y + \ldots + y^{n-1}\right)\right] \geq 0,$$

čo vlastne znamená, že skutočne $A_{n+1} \geq G_{n+1}$.

Spätná indukcia

Istou formou matematickej indukcie je aj dôkaz spätnou indukciou. Jej základnú myšlienku si predstavíme v nasledovnej vete.

Veta. *Nech* $V(n)$ *je výrok definovaný pre každé* $n \in \mathbf{N}$, *pričom:*

(A) $V(n)$ *je pravdivý pre nekonečne veľa prirodzených čísel;*

(B) ak $V(k)$, *kde* $k > 1$, *je pravdivý výrok, tak aj* $V(k-1)$ *je pravdivý výrok.*

Potom $V(n)$ *platí pre všetky* $n \in \mathbf{N}$.

Aplikujme uvedenú metódu na AG – nerovnosť (pozri [3]).

Využitím vzťahu $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ (dokázaný vyššie) a indukčného predpokladu máme

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}}{2k}=\frac{1}{k}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\ldots+\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}\right)\geq\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}+\ldots+\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}}{k}\geq$$
$$\geq\sqrt[k]{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}\ldots\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}}=\sqrt[2k]{a_1a\ldots a_{2k}}\,,$$

čo znamená, že ak platí $A_k\geq G_k$, potom aj $A_{2k}\geq G_{2k}$.

Nech teraz platí AG nerovnosť pre nejaké $k\in\mathbf{N}$, tj. $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\geq\sqrt[k]{x_1x_2\ldots x_k}$, chceme ukázať, že platí aj pre $n=k-1$.

Položme $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, ..., $x_{k-1}=a_{k-1}$; $x_k=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$. Potom

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}}{k}\geq\sqrt[k]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\geq\sqrt[k]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\right)^k\geq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1}\geq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\Leftrightarrow\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\geq\sqrt[k-1]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}}\,,$$

čo sme potrebovali ukázať.

Ohraničenie určitého integrálu

Znovu si na úvod povedzme, z čoho budeme vychádzať pri tretej dôkazovej stratégii (pozri [4]).

Veta. Nech $f\in\mathcal{C}\langle a;b\rangle$, $m=\min\limits_{x\in\langle a;b\rangle}f(x)$, $M=\max\limits_{x\in\langle a;b\rangle}f(x)$. Potom $m(b-a)\leq\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M(b-a)$.

Ak túto vetu (s jednoznačnou geometrickou interpretáciou) aplikujeme na funkciu $f(x)=\frac{1}{x}$ na intervale $\langle a;b\rangle$, pričom $0<a<b$, dostávame (1) $\frac{b-a}{b}\leq\ln\frac{b}{a}\leq\frac{b-a}{a}$ ♦.

Prepíšme teraz vzťah $A_n\geq G_n$ do tvaru $(A_n)^n\geq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$. Navyše, dané čísla a_j ($j=1,2,\ldots,n$) možno usporiadať tak, aby pre nejaké $k\in\mathbf{N}$ platilo (2) $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_k\leq A_n\leq a_{k+1}\leq a_{k+2}\leq\ldots\leq a_n$.

♦ Iným spôsobom, ako dokázať túto nerovnosť, je využiť Lagrangeovu vetu o strednej hodnote pre funkciu $F(x)=\ln x$ na uvedenom intervale.

Pomocou (1) a (2) dostaneme

$$\frac{A_n - a_1}{A_n} + \frac{A_n - a_2}{A_n} + \ldots + \frac{A_n - a_k}{A_n} \le \ln\frac{A_n}{a_1} + \ln\frac{A_n}{a_2} + \ldots + \ln\frac{A_n}{a_k},$$

resp. (3) $\dfrac{kA_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)}{A_n} \le \ln\dfrac{(A_n)^k}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$.

Zo vzťahov (1) a (2) tiež máme

$$\ln\frac{a_{k+1}}{A_n} + \ln\frac{a_{k+2}}{A_n} + \ldots + \ln\frac{a_n}{A_n} \le \frac{a_{k+1} - A_n}{A_n} + \frac{a_{k+2} - A_n}{A_n} + \ldots + \frac{a_n - A_n}{A_n},$$

resp. (4) $\ln\dfrac{a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_n}{(A_n)^{n-k}} \le \dfrac{(a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n) - (n-k)A_n}{A_n}$.

Ľavá strana (3) a pravá strana (4) je rovnaký výraz, preto platí $\ln\dfrac{a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_n}{(A_n)^{n-k}} \le \ln\dfrac{(A_n)^k}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$, čiže (vďaka monotónnosti funkcie $y = \ln x$) získavame zápis $\dfrac{a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_n}{(A_n)^{n-k}} \le \dfrac{(A_n)^k}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$, odkiaľ už dostávame AG nerovnosť.

Nerovnosti reálnych čísel

~~A~~G nerovnosť sme vyššie dokázali už viacerými spôsobmi, ale predsa len pokúsme sa minimalizovať našu námahu a využiť elementárnejšie stratégie. Skúsme teraz využiť nasledovnú lemu (pozri [5]).

Lema. *Nech sú dané reálne čísla* $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3$; $0 \le y_1 \le y_2 \le y_3$. *Potom* $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \ge x_1y_k + x_2y_l + x_3y_m \ge x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1$; *kde* k, l, m *je ľubovoľná kombinácia čísel 1, 2, 3.*

Začnime tým, že zadané čísla a_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ usporiadame podľa veľkosti, preznačme potom $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$.

Definujme teraz čísla tvaru $\dfrac{a_1}{G_n}$, $\dfrac{a_1a_2}{{G_n}^2}$, ..., $\dfrac{a_1a_2 \ldots a_n}{{G_n}^n} = 1$ a tiež čísla k nim prevrátené, tj. $\dfrac{G_n}{a_1}$, $\dfrac{{G_n}^2}{a_1a_2}$, ..., $\dfrac{{G_n}^n}{a_1a_2 \ldots a_n} = 1$.

Ak zovšeobecníme uvedenú lemu, tak najmenšiu možnú hodnotu súčtu súčinov dvojíc čísel z prvej skupiny a z druhej skupiny dostaneme, ak vynásobíme po rade najväčšie prvky z prvej skupiny s najmenšími prvkami z druhej skupiny. Preto (hoci nedokážeme porovnať navzájom čísla $\frac{a_1}{G_n}$, $\frac{a_1 a_2}{G_n^{\ 2}}$, ..., $\frac{a_1 a_2 ... a_n}{G_n^{\ n}}$; najväčšiemu z nich zrejme odpovedá najmenšia prevrátená hodnota atď.) môžeme písať

$$n = \frac{a_1}{G_n}\frac{G_n}{a_1} + \frac{a_1 a_2}{G_n^{\ 2}}\frac{G_n^{\ 2}}{a_1 a_2} + ... + \frac{a_1 a_2 ... a_n}{G_n^{\ n}}\frac{G_n^{\ n}}{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1}{G_n}\cdot 1 + \frac{a_1 a_2}{G_n^{\ 2}}\frac{G_n}{a_1} + ... + \frac{a_1 a_2 ... a_n}{G_n^{\ n}}\frac{G_n^{\ n-1}}{a_1 a_2 ... a_{n-1}},$$

resp. $n \leq \frac{a_1}{G_n} + \frac{a_2}{G_n} + ... + \frac{a_n}{G_n}$, odkiaľ už vyplýva, že $G_n \leq A_n$.

Euklidova veta

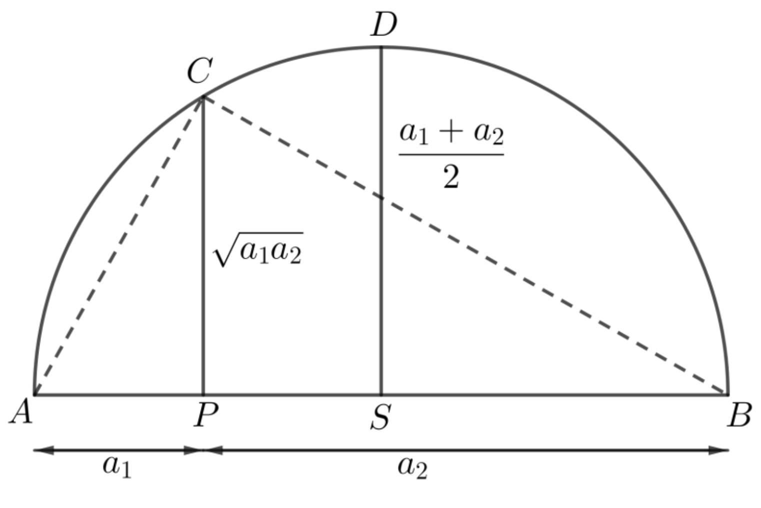
Posledný dôkaz sa možno nie celkom hodí k predošlému textu, keďže ho vykonáme len pre prípad dvoch čísel. Avšak pri hľadaní jednoduchších dôkazov sa prirodzene dostávame aj ku geometrii, ktorá nám pomôže svojou názornosťou. Využijeme Euklidovu vetu o výške.

Veta. Obsah štvorca zostrojeného nad výškou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika zostrojeného z oboch úsekov prepony, tj. $v^2 = c_a \cdot c_b$.

Využime označenia z obr. 1. Zostrojme Tálesovu kružnicu so stredom v bode *S* nad priemerom *AB*, trojuholník *ABC* je potom pravouhlý. Podľa Euklidovej vety o výške potom platí, že $v^2 = |PC|^2 = |AP|\cdot|PB| = a_1 \cdot a_2$, čiže $v = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$.

Avšak táto hodnota nie je väčšia ako polomer kružnice, tj. $v \leq |SD| = \frac{a_1 + a_2}{2}$.

Spojením týchto faktov dostávame $\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$, resp. rešpektujúc naše doterajšie značenie platí $G_2 \leq A_2$.



Obrázok 1

Záver

V matematike poznáme viacero druhov priemerov z n nezáporných reálnych čísel a_j. Okrem už spomenutých, môžeme pridať harmonický priemer H_n, či kvadratický priemer K_n. Pritom platí $H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$. V článku sme ukázali rôznymi technikami platnosť prostredného vzťahu, pričom sme sa snažili o istú rozmanitosť – použili sme matematickú indukciu (ako jeden zo základných typov dôkazov ma tematike), vlastnosti určitých integrálov, vlastnosti reálnych čísel a operácie násobenia, či napokon sme si situáciu zjednodušili a preniesli do dvojrozmernej roviny. Na každom type dôkazu sa dá oceniť jeho istá matematická krása, či už ho považujeme za príliš zložitý či príliš jednoduchý. Zároveň môžeme dúfať, že čitateľ (študent matematiky) si tam nájde ten „svoj“ obľúbený.

Literatúra

[1] Varga, M., Michalička P. Arithmetic Mean and Geometric Mean. *AMN*, Vol. 2, No. 2, ISSN: 2453-6083, p. 43 – 48, DOI: 10.17846/AMN.2016.2.2.43-48

[2] Varga, M.: Úvod do diferenciálneho počtu, UKF Nitra, 2015, 143 s.

[3] https://brilliant.org/discussions/thread/proof-of-the-arithmetic-mean-geometric-mean/ (cit. 15. 3. 2018)

[4] Berkolajko S.: Integral pomogajet dokazať neravenstvo Koši. *Kvant* č. 8/1979, ISSN 0130-2221, s. 26

[5] Pinter L., Chegedyš J.: Uporjadočennyje nabory čisel i neravenstva, *Kvant* č. 12/1985, ISSN 0130-2221, s. 14 – 16.