AM Nitriensia

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 4, No. 1, p. 1– 6
ISSN 2453-6083

Konštrukčné úlohy o zobrazeniach

Construction Tasks about Mappings

Peter Vrábel *[a]

Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,

Received 12 March 2018; received in revised form 21 March 2018; accepted 22 March 2018

Abstract

The notion of the mapping belongs to the basis of mathematics. It is the key notion for students of mathematics on universities especially for incoming teachers of mathematics. Many students have appreciable problems with mapping operations. It is evident in situations when it needed to devise a mapping with predetermined properties. The students have difficulty deeper understanding of a composite mapping. Their knowledge does not go deep and to substance. The mathematical thinking in a work with mappings is formed by construction tasks about mappings with given properties in the paper.

Keywords: construction task, problem task, mapping

Classification: 00A35; 97C50; 97D50

Úvod

Pojem zobrazenia patrí do základov matematiky. Na strednej škole ho špeciálne nahrádza pojem funkcie, pretože sa tu viac menej uvažujú iba niektoré elementárne funkcie reálnej premennej, čo už neplatí pre matematickú olympiádu. Na vysokej škole, zvlášť pre budúcich učiteľov matematiky, je to kľúčový pojem, ktorý je používaný v každej matematickej disciplíne. Vedieť operovať so zobrazeniami patrí do základných znalostí každého, kto používa matematiku. Operovať so zobrazeniami však študentom robí značné problémy. Ešte väčšie problémy majú pri úlohách, v ktorých treba skonštruovať zobrazenie s vopred danými vlastnosťami. Príčinu treba hľadať v tom, že pojem zobrazenia a zloženého zobrazenia nemajú vžitý. Riešia (a možno ani to nie) iba rutinné úlohy o zobrazeniach, ich poznatky sú povrchné, nejdú do hĺbky a podstaty (Vrábel [2], 2005). V tomto príspevku sa snažíme formovať matematické myslenie v narábaní so zobrazeniami prostredníctvom konštrukčných úloh o zobrazeniach s danými vlastnosťami.

Základné pojmy a označenia

Relácia f, $f \subseteq A \times B$, sa nazýva zobrazenie z množiny A (množiny A) do množiny B, ak ku každému x z množiny A existuje najviac (práve jeden) prvok y z množiny B tak, že $[x, y] \in f$. Ak f je zobrazenie z množiny A do množiny B a $[x, y] \in f$, tak x nazývame vzorom k prvku y a y nazývame obrazom prvku x v danom zobrazení. Píšeme tiež, že $y = f(x)$. Množinu $\{x \in A;\ \exists y \in B\ [x, y] \in f\}$ nazývame definičný obor zobrazenia f a označujeme $D(f)$. Množinu $\{y \in B;\ \exists x \in A\ [x, y] \in f\}$ nazývame obor hodnôt zobrazenia f a označujeme $H(f)$. Ak $H(f) = B$, tak hovoríme, že f je zobrazenie z množiny A na množinu B. Zobrazenie

*Corresponding author: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.1.1-6

f množiny A do množiny B (teda ak $D(f) = A$) budeme označovať $f: A \to B$. Uvedomme si, že každé zobrazenie f z množiny A do množiny B je aj zároveň zobrazením množiny $D(f)$ na množinu $H(f)$. Zobrazenia $f: A \to B$, $g: C \to D$ sa rovnajú práve vtedy, keď $A = C$ a $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in A$. Ak zobrazenie $f: A \to B$ je prosté, tak ho nazývame injekcia. Ak pre zobrazenie $f: A \to B$ platí $H(f) = B$, tak ho nazývame surjekcia. Ak zobrazenie $f: A \to B$ je súčasne injekcia aj surjekcia, tak ho nazývame bijekcia. Ak $f: A \to B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, tak množinu $\{y \in B;\ \exists x \in X\ y = f(x)\}$ nazývame obrazom množiny X v zobrazení f a označujeme $f(X)$ a množinu $\{x \in A; f(x) \in Y\}$ nazývame vzorom množiny Y v zobrazení f a označujeme $f_{-1}(Y)$. Ak je napríklad zobrazenie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané rovnicou $y = x^2$ a $X = \langle -1,2 \rangle$, $Y = \langle 1,4 \rangle$, tak $f(X) = \langle 0,4 \rangle$ a $f_{-1}(Y) = \langle -2, -1 \rangle \cup \langle 1,2 \rangle$. Nech $f: A \to B$, $X_1, X_2 \subseteq A$, $Y_1, Y_2 \subseteq B$. Potom platia nasledujúce vzťahy (Šalát [1], 1986):

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2),\ f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2), f(X_1) - f(X_2) \subseteq f(X_1 - X_2),$$

$$f_{-1}(Y_1 \cup X_2) = f_{-1}(Y_1) \cup f_{-1}(Y_2),\ f_{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f_{-1}(Y_1) \cap f_{-1}(Y_2),$$

$$f_{-1}(Y_1) - f_{-1}(Y_2) = f_{-1}(Y_1 - Y_2).$$

Vzťahy pre zjednotenia a prieniky možno zovšeobecniť: ak $X_t \subseteq A$, $Y_t \subseteq B$, $t \in T$ (indexová množina), potom

$$f(\cup_{t \in T} X_t) = \cup_{t \in T} f(X_t),\ f(\cap_{t \in T} X_t) \subseteq \cap_{t \in T} f(X_t),$$

$$f_{-1}(\cup_{t \in T} Y_t) = \cup_{t \in T} f_{-1}(Y_t),\ f_{-1}(\cap_{t \in T} Y_t) \subseteq \cap_{t \in T} f_{-1}(Y_t).$$

Zloženým zobrazením zobrazení $f: A \to B$, $g: B \to C$ je zobrazenie $h: A \to C$, kde $h = \{[x, z] \in A \times C; z = g(f(x))\}$. Zobrazenie h budeme označovať $g \circ f$. Skladanie zobrazení je asociatívne, teda pre ľubovoľné zobrazenia $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ platí $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Zobrazenie $f: A \to A$, pre ktoré platí $f(x) = x$ pre každé $x \in A$, sa nazýva identické zobrazenie a označujeme ho id_A. Ak $f: A \to B$ je prosté, potom $\{[y, x] \in B \times A;\ [x, y] \in f\}$ je zobrazenie množiny $H(f)$ do množiny A, ktoré nazývame inverzným zobrazením k zobrazeniu f a označujeme f^{-1}. Zrejme $f^{-1} \circ f = id_A$, $f \circ f^{-1} = id_{H(f)}$.

Konštrukčné úlohy o zobrazeniach

Budeme sa zaoberať problémovými úlohami, v ktorých bude treba zostrojiť zobrazenia s vopred danými vlastnosťami. Teda nebudeme riešiť rutinné úlohy typu : Je dané zobrazenie (funkcia). Dokážte, že má takú a takú vlastnosť, prípadne vyšetrite jeho vlastnosti. Budeme často uvažovať nekonečné postupnosti, čo sú vlastne špeciálne zobrazenia množiny $\mathbb{N}$ do nejakej množiny A. Ak $f: \mathbb{N} \to A$, tak po označení $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, dostávame postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Úloha 1. Nájdite také zobrazenia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, aby $f \circ h = g \circ h$ ale $f \neq g$.

Riešenie. Pri riešení tejto úlohy si treba uvedomiť, že rozhodujúcu úlohu hrá obor hodnôt zobrazenia h i to, ako je definované zložené zobrazenie. Ak totiž $H(h) \neq \mathbb{N}$, tak prvky $\mathbb{N} - H(h)$ sa pri aplikácii zobrazení f, g nepoužijú a preto hodnoty $f(n)$, $g(n)$ môžu byť ľubovoľné. Teda napríklad, ak $h(n) = n + 2$, tak $H(h) = \{3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N} - \{1,2\}$. Stačí položiť $f(1) = f(2) = 1$, $g(1) = g(2) = 2$ a $f(n) = g(n) = n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(f \circ h)(n) = f(h(n)) = f(n + 2) = n + 2 = g(n + 2) = g(h(n)) = (g \circ h)(n),$$

teda $f \circ h = g \circ h$ ale $f \neq g$.

Väčšina študentov nevie vyriešiť úlohu 1 hlavne preto, že uvažujú iba také funkcie f, g, ktoré sú definované na celej množine $\mathbb{N}$ jedným predpisom. Schopnosti riešiť úlohu 1 by iste napomohol poznatok o krátení „sprava“ v pologrupe $(P,\circ)$, kde P označuje množinu všetkých zobrazení nejakej pevnej množiny X do X, X je aspoň dvojprvková množina, a $\circ$ je operácia zloženia zobrazení. Pre $f, g, h \in P$ totiž platí:

$$(\forall\, f, g \in P\ f \circ h = g \circ h \Longrightarrow f = g) \Leftrightarrow h \text{ je surjekcia.}$$

Nech $h: X \to X$ je surjekcia. Nech $f, g \in P$ a $f \circ h = g \circ h$. K ľubovoľnému $y \in X$ existuje také $x \in X$, že $h(x) = y$. Potom

$$f(y) = f\big(h(x)\big) = (f \circ h)(x) = (g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) = g(y),$$

teda $f = g$.

Naopak, ak h nie je surjekcia, tak postupujeme podobne ako v úlohe 1. Existuje $x_0 \in X$, ktoré nepatrí do $H(h)$. Definujme zobrazenia $f, g \in P$ takto:

$$f(x) = g(x) = x \text{ pre každé } x \in X - \{x_0\};\ f(x_0) = x_0,\ g(x_0) = x_1,\ x_1 \in X,\ x_1 \neq x_0.$$

Potom $f \circ h = g \circ h$, ale $f \neq g$.

Úloha 2. Nájdite také zobrazenia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, aby $h \circ f = h \circ g$ ale $f \neq g$.

Riešenie. V tomto prípade si treba zase uvedomiť, že rovnosť $h\big(f(n)\big) = h\big(g(n)\big)$ môže platiť aj pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré $f(n) \neq g(n)$. Môže to nastať, keď h nie je injekcia. Stačí zvoliť f, g, h napríklad takto: $f(n) = n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, $g(1) = 2$, $g(n) = n$ pre každé $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, $h(1) = h(2) = 1$, $h(n) = n$ pre každé $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$. Potom $(h \circ f)(n) = (h \circ g)(n) = 1$ pre $n = 1, 2$ a $(h \circ f)(n) = (h \circ g)(n)$ pre každé $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$, teda $h \circ f = h \circ g$, ale $f \neq g$, pretože $f(1) \neq g(1)$.

Schopnosti riešiť úlohu 2 by mohol napomôcť poznatok o krátení „zľava“ v pologrupe $(P,\circ)$, ktorú sme uvažovali za úlohou 1. Pre $f, g, h \in P$ totiž platí:

$$(\forall\, f, g \in P\ h \circ f = h \circ g \Longrightarrow f = g) \Leftrightarrow h \text{ je injekcia.}$$

Nech $h: X \to X$ je injekcia. Potom existuje inverzné zobrazenie $h^{-1}: H(h) \to X$. Nech $f, g \in P$ a $h \circ f = h \circ g$. Potom pre každé $x \in X$ platí:

$$f(x) = id_X\big(f(x)\big) = (h^{-1} \circ h)\big(f(x)\big) = h^{-1}\big((h \circ f)(x)\big) = h^{-1}\big((h \circ g)(x)\big)$$
$$= (h^{-1} \circ h)\big(g(x)\big) = id_X\big(g(x)\big) = g(x),$$

teda $f = g$.

Naopak, ak h nie je injekcia, tak postupujeme podobne ako v úlohe 2. Existujú $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, že $h(x_1) = h(x_2)$. Definujme $f, g \in P$ napríklad takto: $f = id_X$, $g(x_1) = x_2$, $g(x) = x$ pre každé $x \in X - \{x_2\}$. Potom $h \circ f = h \circ g$, ale $f \neq g$, pretože $f(x_1) \neq g(x_1)$.

Úloha 3. Nech f, g sú zobrazenia neprázdnej množiny X do množiny X a $g \circ f = id_X$. Potom f je injekcia a g je surjekcia.

Riešenie. Najskôr dokážeme nepriamo, že f je injekcia. Keby zobrazenie f nebola injekcia, tak by existovali také rôzne prvky $x_1, x_2 \in X$, pre ktoré by platila rovnosť $f(x_1) = f(x_2)$. Potom by platilo:

$$x_1 = id_X(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2$$

a to by bol spor. To, že g je surjekcia, dokážeme tiež nepriamo. Keby g nebola surjekcia, tak by existovalo také $x_0 \in X$, že pre všetky $y \in X$ by platilo $g(y) \neq x_0$. Potom ale

$$x_0 = id_X(x_0) = (g \circ f)(x_0) = g\big(f(x_0)\big) = g(y_0) \neq x_0$$

to by bol spor.

Úloha 3 dáva návod ako vyriešiť nasledujúcu úlohu.

Úloha 4. Nájdite také zobrazenia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, aby $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$, ale aby f, g neboli bijekcie.

Riešenie. Stačí vhodne zvoliť f, g tak, aby f bola injekcia, ale nebola surjekcia a g bola surjekcia, ale nebola injekcia. Tak napríklad zvoľme f, g nasledovne: $f(n) = n + 2$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Zobrazenie f je injekcia ale zrejme nie je surjekcia $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$. Vzhľadom na rovnosť $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$ je zobrazenie g jednoznačne určené pre čísla z množiny $\mathbb{N} - \{1,2\}$. Musí platiť $g(n) = n - 2$ pre každé $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$. Položme $g(1) = g(2) = 1$. Potom zrejme g je surjekcia ale nie je injekcia, pretože napríklad $g(1) = g(3)$.

Celý rad vhodných úloh možno formulovať o vzoroch a obrazoch množín.

Úloha 5. Nech $f: A \to B$, $X_1, X_2 \subseteq A$. Dokážte inklúziu $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$. Dokážte tiež, že rovnosť nastane práve vtedy, keď zobrazenie f je prosté.

Riešenie. Platí:

$$y \in f(X_1 \cap X_2) \Leftrightarrow (\exists\, x \in X_1 \cap X_2\ y = f(x))$$

$$\underset{*}{\Rightarrow} ((\exists\, x \in X_1\ y = f(x)) \wedge (\exists\, x \in X_2\ y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in f(X_1) \wedge y \in f(X_2))$$

$$\Leftrightarrow y \in f(X_1) \cap f(X_2).$$

Implikácia s hviezdičkou sa dá obrátiť, ak zobrazenie f je prosté. Ak f nie je prosté, tak existujú rôzne prvky $x_1, x_2 \in A$ tak, že $f(x_1) = f(x_2)$. Položme $X_1 = \{x_1\}$, $X_2 = \{x_2\}$. Potom $f(X_1 \cap X_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X_1) \cap f(X_2) = \{f(x_1)\}$, teda $f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2)$.

Úloha 6. Nájdite takú funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a intervaly J_1, J_2 tak, aby množina $f(J_1 \cap J_2)$ bola vlastnou podmnožinou množiny $f(J_1) \cap f(J_2)$.

Riešenie. Vieme, že máme hľadať medzi funkciami, ktoré nie sú prosté. Vhodná by bola napríklad párna funkcia. Uvažujme funkciu $y = x^2$. Stačí zvoliť napríklad intervaly $\langle -1,2 \rangle$, $\langle -2,1 \rangle$. Potom $f(\langle -1,2 \rangle \cap \langle -2,1 \rangle) = f(\langle -1,1 \rangle) = \langle 0,1 \rangle$ a $f(\langle -1,2 \rangle) \cap f(\langle -2,1 \rangle) = \langle 0,4 \rangle$.

Úloha 7. Nájdite takú funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, že ku každému reálnemu číslu a existujú práve dve čísla x_1, x_2 tak, že $f(x_1) = f(x_2) = a$.

Riešenie. Keby sa malo jednať o zobrazenie z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tak by to nebol žiaden problém. Stačilo by vziať napríklad funkciu $y = \log |x|$ pri hocijakom základe, alebo funkciu $y = \mathrm{tg}\ x$ uvažovanú napríklad na množine $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Funkcia f má byť však definovaná na celej množine $\mathbb{R}$. Prvá funkcia, nech je to pre konkrétnosť dekadický logaritmus, je k riešeniu najbližšie. Totiž pre každé reálne číslo a existujú práve dve čísla a to 10^a, -10^a, pre ktoré platí $\log |10^a| = \log |-10^a| = a$. Treba túto fukciu pravda ale vhodne korigovať. Treba ju dodefinovať v bode 0. Nech napríklad $f(0) = 0$. Tým však porušíme podmienku pre funkciu f: $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, teda funkcia f by nadobúdala hodnotu 0 až v troch bodoch. Preto musíme opravovať hodnotu v bode 1, následne v ďalších bodoch, najjednoduchšie v bodoch 2, 3, 4, ... Posunieme hodnotu v bode n na hodnotu v bode $n+1$ pre každé celé nezáporné číslo n. Teda príkladom hľadanej funkcie je funkcia f definovaná takto:

$$f(x)=\begin{cases}\log|x|, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{N}\cup\{0\}\\ \log|x+1|, & x\in\mathbb{N}\cup\{0\}\end{cases}$$

Ďalšie konštrukčné úlohy možno formulovať pre bijektívne zobrazenia.

Úloha 8. Nájdite bijekciu $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$.

Riešenie. Množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ rozložme na dve disjunktné množiny: $\mathbb{N}=\mathbb{N}_p\cup\mathbb{N}_n$, kde $\mathbb{N}_p(\mathbb{N}_n)$ označuje množinu všetkých párnych (nepárnych) prirodzených čísel; $\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}_0^-$. Ľahko zostrojíme bijekcie $f_1\colon\mathbb{N}_p\to\mathbb{N}$, $f_2\colon\mathbb{N}_n\to\mathbb{Z}_0^-$. Stačí položiť $f_1(n)=\frac{n}{2}=(-1)^n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ pre každé $n\in\mathbb{N}_p$ a $f_2(n)=-\frac{n-1}{2}=(-1)^n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ pre každé $n\in\mathbb{N}_n$, kde $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ označuje celú časť čísla $\frac{n}{2}$. Takto $f(n)=(-1)^n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ pre každé $n\in\mathbb{N}$.

Z teoretickej aritmetiky je známe, že ľubovoľný interval reálnych čísel možno bijektívne zobraziť na ľubovoľný interval. Nájsť však konkrétnu bijekciu v niektorých prípadoch nemusí byť ľahká úloha. Je to v prípadoch, keď intervaly sú rôznych typov.

Úloha 9. Nájdite bijekciu $f\colon\langle a,b\rangle\to(a,b\rangle$.

Riešenie. Nájsť takú bijekciu určenú na intervale $\langle a,b\rangle$ jedným predpisom nie je možné. Istú inšpiráciu možno nájsť v úlohe 7. Identické zobrazenie to samozrejme nie je, lebo číslo a nemá patriť do oboru hodnôt. Možno ho však korigovať zmenením hodnôt pre nekonečnú postupnosť bodov intervalu $\langle a,b\rangle$. Vyčleňme z tohto intervalu rastúcu postupnosť bodov, v ktorých zmeníme hodnotu identického zobrazenia. Napríklad uvažujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n=a+\frac{n-1}{n}(b-a)$, $n\in\mathbb{N}$. Rozdeľme interval $\langle a,b\rangle$ na dve disjunktné množiny: $A=\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}$, $\langle a,b\rangle-A$ a definujme zobrazenie f takto:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\langle a,b\rangle-A\\ a_{n+1}, & x=a_n\in A\end{cases}$$

Dokážeme, že f je príklad hľadanej bijekcie. Nech x_1,x_2 sú ľubovoľné rôzne prvky z intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom buď sú oba z $\langle a,b\rangle-A$, alebo z množiny A alebo jeden je z $\langle a,b\rangle-A$ a druhý je z A. V prvom prípade $f(x_1)=x_1\neq x_2=f(x_2)$; v druhom prípade $x_1=a_m$, $x_2=a_n$, $m\neq n$, $f(x_1)=a_{m+1}\neq a_{n+1}=f(x_2)$; v treťom prípade nech $x_1\in\langle a,b\rangle-A$, $x_2\in A$, potom $f(x_1)=x_1\in\langle a,b\rangle-A$, $f(x_2)\in A$ a $f(x_1)\neq f(x_2)$, pretože množiny $\langle a,b\rangle-A$, A sú disjunktné. Takto sme dokázali, že f je injekcia. Zobrazenie f je aj surjekcia. Ak $y\in(a,b\rangle$, tak buď $y\in(a,b\rangle-A$ alebo $y\in A-\{a\}$. V prvom prípade $f(y)=y$; v druhom prípade $y=a_n$ pre nejaké $n\geq 2$, teda $f(a_{n-1})=a_n$.

Úloha 10. Nájdite bijekciu $f\colon(-1,0\rangle\to(0,\infty)$.

Riešenie. Na začiatku nekonštruujme hľadanú bijekciu priamo. Možno ju dostať zložením viacerých jednoduchších bijekcií. Bijektívne možno „prechádzať“ postupne intervalmi $(-1,0\rangle$, $\langle 0,1)$, $(0,1)$, $(0,\infty)$:

$$f_1\colon(-1,0\rangle\to\langle 0,1),\ f_1(x)=-x;\ \ f_3\colon(0,1)\to(0,\infty),\ f_3(x)=\frac{1}{x}-1,$$

$$f_2\colon\langle 0,1)\to(0,1)\,,\qquad f_2(x)=\begin{cases}x, & x\in\langle 0,1)-\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\dots,\frac{n-1}{n},\dots\right\}\\ \frac{n}{n+1}, & x=\frac{n-1}{n}\,,n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Potom hľadaná bijekcia je zobrazenie f, kde $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

Predpis zobrazenia f nájdeme tak, že najskôr nájdeme predpis zobrazenia $f_2 \circ f_1$ a potom predpis f, $f = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$. Platí:

$$(f_2 \circ f_1)(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-1{,}0\rangle - \left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \dots, -\frac{n-1}{n}, \dots\right\} \\ \frac{n}{n+1}, & x = -\frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$(f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(x) = \begin{cases} -(\frac{1}{x} + 1), & x \in (-1{,}0\rangle - \left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \dots, -\frac{n-1}{n}, \dots\right\} \\ \frac{1}{n}, & x = -\frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Záver

Schopnosť pracovať efektívne a tvorivo so zobrazeniami sa nedá získať iba riešením rutinných úloh. Študentom robia ťažkosti hlavne zložené zobrazenia. Okrem samozrejmých základných teoretických vedomostí je potrebné samostatne riešiť problémové úlohy a zvlášť konštruovať zobrazenia s vopred danými vlastnosťami.

Literatúra

[1] Šalát, T.-Smítal, J. 1986. *Teória množín*. Bratislava: Alfa, 1986.

[2] Vrábel, P. 2005. *Heuristika a metodológia matematiky.* Nitra: FPV UKF, Edícia Prírodovedec č. 165, 2005, ISBN 80-8050- 840-2.