

Krátky pohľad na historické riešenia starovekých geometrických úloh

Brief Look at History of Solution of Geometric Problems of Antiquity

Timotej Šumný^a

^a*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 19 September 2017; received in revised form 5 October 2017; accepted 17 October 2017

Abstract. In history of Mathematics many examples and tasks have been occurred which motivate mathematician to progressive research and developing further mathematical branches. Through an analysis of literary sources published in the Czech and Slovak Republic over the past century this paper presents a brief look at this kind of tasks like are famous geometric problems of antiquity.

Keywords: Euclidean construction, angle trisection, circle squaring, cube duplication, constructible polygon

Classification: A20, A50

Úvod

V histórii matematiky sa objavili mnohé geometrické problémy, ktoré svojou náročnosťou ovplyvnili rozvoj matematiky po mnohé stáročia. K týmto úlohám patrili hlavne klasické úlohy, akými boli duplicita kocky, kvadratura kruhu, trisekcia uhla, konštrukcia pravidelných mnohoúhelníkov a rektifikácia kružnicového oblúka. Ukázalo sa, že problém ich riešenia úzko súvisel s dovtedy zaužívanou geometrickou tradíciou, kde sa vyžadovalo zostrojiť riešenie ako čisto euklidovskú konštrukciu.

Poznamenávame, že pod euklidovskou konštrukciou sa rozumela (a rozumie) taká geometrická konštrukcia, ktorá sa dá realizovať len pomocou kružidla a lineára (pravítka bez vyznačenej mierky). Ukázalo sa, že technická prax bolo nútená uspokojiť s približnými konštrukciami. Hoci mnohé riešenia viedli k približnej konštrukcii, kde odchýlka v presnosti bola menšia ako hrúbka tuhy ceruzky, úlohy stále dávali podnet k ďalšiemu bádaniu a k hľadaniu iného, exaktnejšieho riešenia.

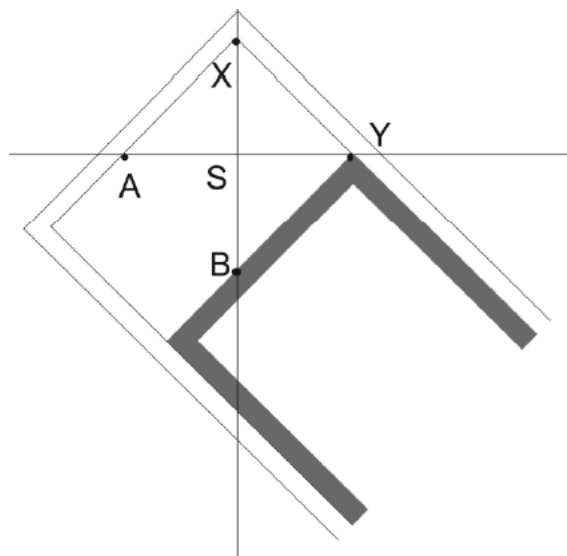
V tomto článku podáme stručný prehľad o domácej i zahraničnej literatúre, ktorá sa venuje riešeniu problematiky niektorých, vyššie uvedených, historických úloh.

Rôzne prístupy k riešeniu

Ako sme už spomenuli, klasické grécke problémy (duplicita kocky, kvadratura kruhu, trisekcia uhla, konštrukcia pravidelných n -uholníkov, rektifikácia kružnicového oblúka) sú úlohy historické. O ich didaktickom význame ako silnej motivácii pojednáva kniha (Hejný, 1989). Ide o čitateľovi najdostupnejšiu publikáciu, kde sa píše: „*Klasické problémy po mnohé stáročia motivovali, usmerňovali a testovali rozvoj matematiky. Preto ich pomenujeme strategické. ...Strategický motív plní v žiakovej psychike dve funkcie: podnecuje záujem žiaka*

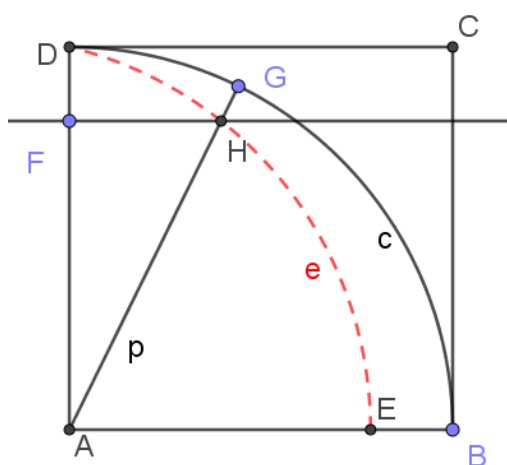
*Corresponding author; email: timotej.sumny@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.2.32-37

a ukazuje mu smer.“ Napríklad v uvedenej literatúre sa uvádza riešenie problému duplicity kocky pomocou dvoch špeciálnych, do seba zapadajúcich posuvných rámov, tzv. **križiaka**.



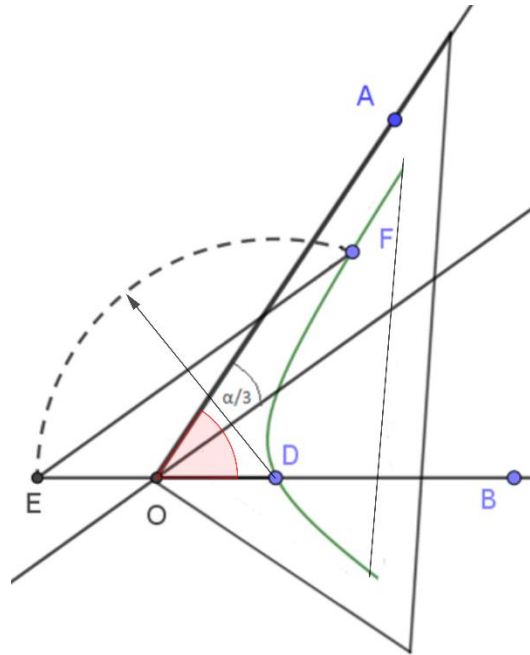
Obrázok 1. Riešenie problému duplicity kocky pomocou križiaka podľa (Hejný, 1989)

V uvedenej publikácii nájde čitateľ aj riešenie problému trisekcie uhla. Uvádza sa, že asi v 4. st. pred. n. l. Hippias navrhol krivku, tzv. kvadratix, pomocou ktorej je možné vykonať trisekciu uhla i kvadratúru kruhu.



Obrázok 2. Kvadratix a jeho konštrukcia podľa Hippiasa

Zaujímavé riešenie trisekcie uhla nájdeme v práci (Langr, 1912), v ktorej autor rieši trisekciu ostrého uhla pomocou špeciálneho pravítka. V tomto prípade pravítko (lineár) nahrádza trojuholníkovým pravítkom s uhlami 90° , 60° , 30° a špeciálnym výrezom, ktorý umožňuje konštrukciu rovnoosej hyperboly. V článku sa uvádza postup, ako je možné pomocou tohto špeciálneho pravítka uskutočniť trisekciu ľubovoľného uhla.



Obrázok 3. Riešenie problému trisekcie ostrého uhla podľa (Langr, 1912)

Zaujímavá je publikácia (Seifert, 1951), kde nájdeme riešenie problému trisekcie uhla α založené na algebraicko-geometrickej metóde. Riešením je zostrojenie úsečky, ktorej dĺžka je koreňom algebraickej rovnice 3. stupňa

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0, \text{ kde } \operatorname{tg} \alpha = x, \operatorname{tg}(3\alpha) = a$$

odvodeného cez vzorec

$$\operatorname{tg}(3\alpha) = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{\alpha}{3}$$

História ukázala, že algebra má „silný nástroj“ na riešenie v podobe algebrizácie geometrickej úlohy. Samotná algebraicko-geometrická metóda je jednou zo štandardných metód riešenia geometrických úloh.

Historický pohľad na problém riešenia gréckych úloh algebraicko-geometrickou metódou nájde čitateľ v práci (Čižmár, 2009).

V práci (Kvazs, 2007) autor popisuje dôkazy neriešiteľnosti niektorých problémov v zmysle euklidovských konštrukcií a jeho postup korešponduje s historickým vývojom podobným tomu, ako Descartes postupoval v diele Geometria (Descartes, 1637).

Základná myšlienka vychádza z toho, že konštrukcia súčtu, rozdielu, súčinu a podielu dvoch úsečiek, ako aj konštrukcia odmocniny dĺžky známej úsečky tvorí algebraické pole. Samotný bod považujeme za konštruovateľný, ak vieme určiť obe jeho súradnice.

Ak pre prvky množiny $P_0 = \{A[0,0], B[0,1]\}$ použijeme konečný počet konštrukcií akými sú zostrojenie priamky určenej dvoma bodmi, zostrojenie kružnice, určenej stredom a bodom, potom priesečníky všetkých kružníc a priamok pomocou sú tiež body konštruovateľné.

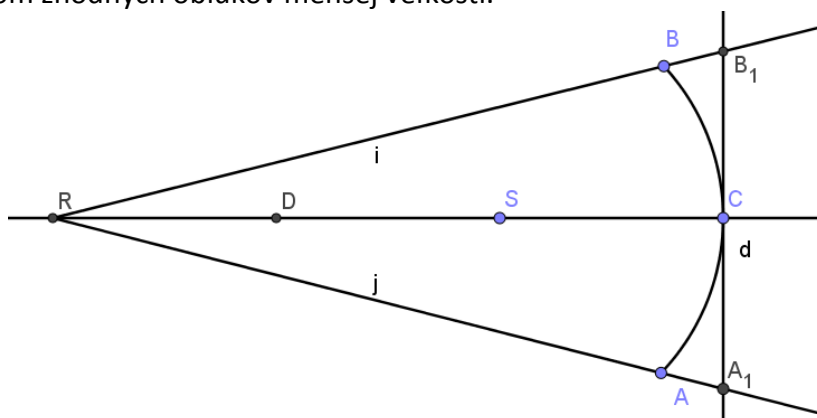
Z toho vyplýva, že geometrická konštrukcia je vlastne postupnosť rozširovania východzieho poľa. Ide o riešenie sústavy

$$ax + by = c$$

$$(x - d)^2 + (y - e)^2 = r^2.$$

Konštruovateľné body sú teda body, ktoré majú racionálne súradnice alebo sú kvadratickým rozšírením poľa racionálnych čísel.

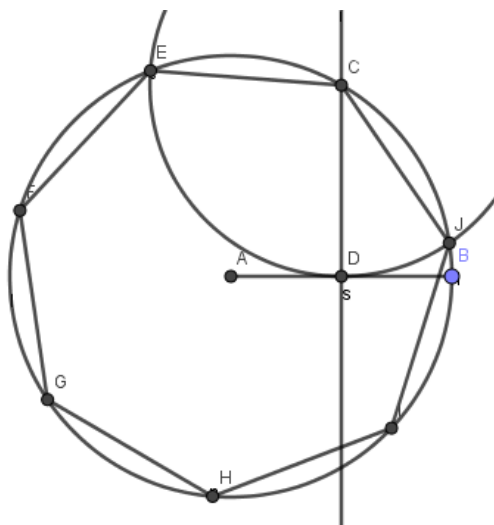
K najznámejším riešeniam jedného z problémov – rektifikácii kružnice – patrí tzv. Sobotkova rektifikácia kružnicového oblúka, ktorá sa zaraďuje medzi približné konštrukcie. V knižke (Štalmášek, 1959) sa uvádza konštrukcia úsečky, ktorá má rovnakú dĺžku ako kružnicový oblúk. Odchýlka je najviac 0,005 polomeru oblúka, pričom túto hodnotu nadobúda pri oblúku so stredovým uhlom $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Ak rektifikujeme oblúk väčší ako $\frac{\pi}{6}$ je vhodné ho rozdeliť na viac navzájom zhodných oblúkov menšej veľkosti.



Obrázok 4. Sobotkova konštrukcia rektifikácie kružnicového oblúka

Ako sme uviedli v úvode, technická prax vyžadovala konštrukcie pravidelných mnohoúhelníkov (súčiastky strojov a pod.) a uspokojila sa s približnými konštrukciami pomocou kružidla a pravítka.

Jednoduché postupy nájdeme napríklad vo viacerých učebniciach technického kreslenia alebo v dostupných učebných textoch, ako napr. (Holoubek, 1995).



Obrázok 5. Konštrukcia pravidelného 7 - uholníka podľa (Holoubek, 1995) .

Poznamenávame, že v zahraničnej literatúre nájdeme z posledného obdobia prevažne učebné texty, ktoré poukazujú na euklidovské konštrukcie, klasické grécke úlohy a algebraizáciu geometrie.

Ide najmä o publikácie (Hogben, 2004), (Klein, 1894), (Gleason, 1988), či dôveryhodné internetové zdroje ako Wolfram MathWorld.

Napr. v Reddy, 2015 sa uvádza aproximácia π a jej význam pre riešenie problému kvadratury kruhu a duplicity kocky. Pomocou nerovnosti

$$\pi = \frac{\text{obvod kružnice}}{\text{priemer kružnice}} > \frac{\text{obvod vpísaného mnohouholníka do kružnice}}{\text{priemer kružnice}}$$

autor určuje

$$\pi \approx \frac{14 - \sqrt{2}}{4}$$

a taktiež využíva nerovnosť na riešenie problému duplicity kocky. Odvádza pri tom približnú hodnotu

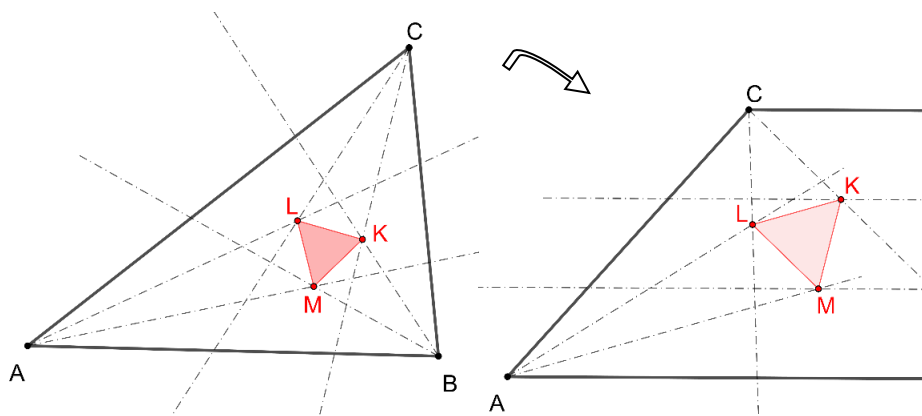
$$\sqrt[3]{2} \approx \frac{\sqrt{89 + 5\pi^2 - 42\pi}}{2}$$

Záver

Konštrukcie geometrických útvarov patria k dôležitej časti matematiky a jej využitia pre technickú prax. Mnohé úlohy svojou náročnosťou podnietili rozvoj približných konštrukcií, ale aj ponúkli otázku, či existuje postup pre euklidovskú konštrukciu útvaru. Prepojením geometrie a algebry bolo možné odvodiť podmienky, kedy je úloha riešiteľná euklidovskou konštrukciou. Pri úlohách, ktoré sa ukázali ako euklidovsky neriešiteľné sa začali vyvíjať postupy, ktorými síce dostaneme približné, ale na tolerovanú odchýlku, postačujúce riešenie.

Rozvojom výpočtovej techniky a počítačovej grafiky sa mnohé úlohy stávajú elementárnymi. Napríklad pomocou dynamického geometrického softvéru nie je problém vytvoriť pravidelný n-uholník so zanedbateľnou odchýlkou od rozmerov „ideálneho“ geometrického útvaru. To je zrejme dôvod, prečo sa novšie učebné texty zamerané na približné konštrukcie, vyskytujú zriedka.

V úvode sme poznamenali, že historické grécke úlohy mali významný vplyv na rozvoj geometrie a domnievame sa, že aj dnes predstavujú významný motivačný impulz. Príkladom je známa Morleyova veta o rovnostrannom trojuholníku. Pomocou dynamických geometrických programov sa dá nielen pekne demonštrovať, ale aj zovšeobecniť tak, ako naznačuje obr. 6.



Obrázok 6. Zovšeobecnenie známej Morleyho vety. Zdroj <https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/Morley.shtml>

Podakovanie

Článok je podporovaný projektom UGA - VII/18/2017 *Analýza metód riešenia geometrických úloh smerujúcich ku zostaveniu kubickej rovnice*.

Literatúra

- [1] HEJNÝ, Milan, et al. *Teória vyučovania matematiky 2*. SPN, 1989.
- [2] LANGR, Josef. Trisekce úhlu zvláštním pravítkem. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, 1912, 41.4: 617-620 Dostupné na: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/122083/CasPestMatFys_041-1912-4_10.pdf. Citované online: 10.9.2017
- [3] SEIFERT, Ladislav. Kubické a bikvadratické problémy. *Kubické a bikvadratické problémy*, 1951, 11-100. 5
- [4] ČIŽMÁR, Ján. Aproximatívne geometrické konštrukcie. *Zborník zo sympózia o počítačovej geometrii SCG 2009*
- [5] ČIŽMÁR, Ján. *Geometrická algebra v praxi*. ActaFac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2009, no. 13, pp. 3-9
- [6] KVASZ, Ladislav. Vznik algebraickej symboliky. *Dva dny s didaktikou matematiky*, 2007
- [7] KVASZ, Ladislav. Kapitoly z dejín algebry. Dostupné na: <http://www.matika.sk/archiv/kvasz/Dejalg/Cast7/Part7-1.htm> Citované online: 10.9.2017
- [8] DESCARTES, René: *Geometrie*. Oikymenh, Praha, 2010, 106 strán
- [9] ŠTALMAŠEK, Ján. *Geometrické konštrukcie*. Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1959.
- [10] GÁBOROVÁ, Petra. *Technické kreslenie*, Dostupné na: <http://www.tek.chytrak.cz/konstrukcie.htm> Citované online: 10.9.2017
- [11] HOLOUBEK, Vojtech. *Technické kreslenie pre 3. roč. SOU–mechanik strojov a zariadení*. ALFA SNTL, 1995.
- [12] HOGBEN, Leslie. LAMPHIER, Lesley: *Geometric Contruction*, Iowa State University MSM Creative Component Fall 2004. 2004.
- [13] KLEIN, Felix; BEMAN, Wooster Woodruff; SMITH, David Eugene. *Famous problems of elementary geometry: the duplication of the cube, the trisection of an angle, the quadrature of the circle (1894)*. Courier Corporation, 2003.
- [14] GLEASON, Andrew M. Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon. *Amer. Math. Monthly*, 1988, 95.3: 185-194.
- [15] WEISSTEIN, Eric W. "Geometric Construction." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/GeometricConstruction.html>
- [16] REDDY, Sarva Jagannadha. *Doubling the cube in terms of the new Pi value (A geometric construction od cube equal to 2.)* IJESRT 2015
- [17] Morley Triangle. Cut-the-knot. Dostupné na : <https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/Morley.shtml>. Citované online: 10.9.2017