

Analýza žiackych riešení vybraných úloh zameraných na zlomky

An Analysis of The Pupils' Solutions of Selected Tasks Focused on Fractions

Lucia Klimentová^{a*}

^{a} Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 4 October 2017; received in revised form 9 October 2017; accepted 11 October 2017

Abstract

In our article we focused on selected tasks from specially developed fraction test which authors are Marilena Pantziara and George Philippou. These tasks are focused on measure subconstruct of fractions together with the notions of equivalence, comparison and addition of fractions. The aim of the article was to analyze the pupils' solutions in the light of the correct solutions. We found out that the most problematic tasks was the tasks focused on measure subconstruct of fractions. It implies that the teaching the fractions through the number line probably absent in Slovak schools. The research was realized in May and June 2017. The research sample consist of 930 ninth graders from 35 lower secondary schools in Slovakia, mostly from Nitra, Lučenec and Nové Zámky.

Keywords: fractions, measure subconstruct, order and equivalence of fractions, addition of fractions

Classification: C30, F40

Úvod

Zlomky patria k jednému z najproblematickejších tematických celkov vo vyučovaní matematiky. Dokazujú to aj mnohé slovenské, české, ale aj zahraničné štúdie, ktoré poukazujú na problémy s porozumením pojmu zlomok. Čo je však príčinou nízkeho porozumenia zlomkov žiakmi zostáva otázne.

V praxi sa často stretávame s tým, že napriek tomu, že žiaci ovládajú pravidlá pre počítanie so zlomkami, pri úlohe, ktorá obsahuje neštandardnú situáciu zostávajú bezradní. Znamená to, že poznatky sú uložené iba ako pamäťové stopy bez vzťahu ku už vytvorenej štruktúre vedomostí. Hejný a kol. (1987) uvádza, že vo vyučovaní zrejme nedošlo k rozvoju žiakovho myslenia a vybudovanie predstavy o zlomku. Poznanie, ku ktorému žiak dospel, je verbálne a formálne.

Metódou poznávania je porozumenie, ktoré znamená obsiahnutie súvislostí, vzťahov, zmyslu a podstaty problému. (Hartl, Hartlová, 2010)

V práci sme sa zamerali práve na analýzu porozumenia zlomku ako miery, relácií usporiadania a rovnosti zlomkov a operácie sčítania zlomkov u žiakov 9. ročníka základných škôl. Taktiež sme analyzovali žiacke riešenia z pohľadu ich správnosti.

Špeciálne zostavený test zameraný na zlomky

Autormi špeciálne vyvinutého testu, ktorý je zameraný na zlomky a prepojený so Sfardovej teóriou reifikácie sú cyperskí výskumníci Marilena Pantziara a George Phillipou (2012). Tento test sme preložili do slovenského jazyka a podľa výsledkov predvýskumu sme ho prispôbili podmienkam slovenských základných škôl. Test pozostáva z 21 úloh, ktoré sú usporiadané v siedmych skupinách označených číslami 1,2,3,4,5,6,7, ktoré postupne predstavujú rôzne interpretácie pojmu zlomok a v troch stĺpcoch označených písmenami A, B, C, ktoré predstavujú jednotlivé štádiá Sfardovej teórie reifikácie (napr. úloha B2 znamená že ide o úlohu zameranú na zlomok ako časť celku na úrovni štádia kondenzácie).

Podľa Sfardovej teórie reifikácie, môžeme vnímanie zlomku klasifikovať na troch úrovniach konceptualizácie poznatkov o zlomku.

Prvou úrovňou je štádium interiorizácie, kde ide o vykonávanie matematických úkonov na nižšej úrovni. Práve to umožňuje spomenúť si na matematické úkony aj bez ich aktuálneho pôsobenia.

Druhou úrovňou je štádium kondenzácie, v ktorom ide o využívanie komplikovanejších postupov, utvrdzovanie učiva ako celku, žiaci majú vytvorené vlastné schémy a myšlienkové postupy, majú nejakú predstavu o koncepte.

Poslednou, treťou, úrovňou je štádium reifikácie (zhmotnenia), ktoré odzrkadľuje schopnosť vytvoriť si plnohodnotnú predstavu, ide o porozumenie na základe vlastných možností a spozorovanie vzťahov medzi reprezentáciami (Sfard, 1991).

Sfardová tiež uvádza, že v teórii reifikácie jednotlivé štádiá na seba nadväzujú, t.j. bez predchádzajúceho dosiahnutia nižšieho štádia nie je možné dosiahnuť vyššie štádium.

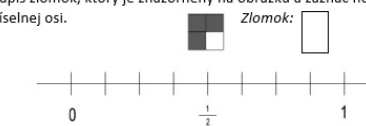
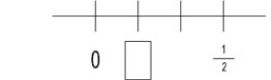
Prvé tri trojice úloh v teste sú zamerané na porozumenie zlomku ako časti celku. Štvrtá trojica úloh je zameraná na zistenie úrovne porozumenia pri ponímaní zlomku ako miery. V piatej, šiestej a siedmej trojici úloh sa stretávame s reláciami rovnosť a porovnávanie zlomkov a s operáciou sčítania zlomkov v tomto poradí.

Niektoré úlohy sú založené na postupoch krok za krokom, čo znamená vykonať v istom poradí početné operácie a určiť zlomok. Iné sú založené na konceptuálnom ale aj procedurálnom porozumení danému pojmu (Pantziara, Philippou, 2012).

Pre potreby nášho výskumu sme sa zamerali iba na položky v riadkoch 4 – 7.

Popis jednotlivých testových položiek

Trojica úloha (A4 , B4, C4) (viď obr. 1) je zameraná na porozumenie zlomku ako miery.

A4 Zaznač zlomok $\frac{3}{5}$ na číselnej osi. 	B4 Zapiš zlomok, ktorý je znázornený na obrázku a zaznač ho na číselnej osi.  Zlomok:	C4 Doplň správne číslo do okienka na číselnej osi. 
---	---	---

Obr.: 1 Trojica úloh zameraná na pochopenie zlomku ako miery

Úloha A4 (Hannula, 2003) bola navrhnutá na zistenie porozumenia zlomku ako miery. Táto úloha je charakteristická pre štádium interiorizácie, „riešenie môže byť vykonané prostredníctvom mentálnych reprezentácií“ a číselná os je reprezentantom mentálnych objektov korešpondujúcich s mentálnymi operáciami (Ni, 2001). Úlohou žiakov je zaznačenie daného zlomku ($\frac{3}{5}$) buď ako číslo alebo prostredníctvom intervalu na predtlačenej číselnej osi. Žiaci si musia uvedomiť, že číselná os je rozdelená na 5 častí, pretože hľadáme pätiny, a že jeden dielik na číselnej osi predstavuje vzdialenosť $\frac{1}{5}$ od počiatočného bodu, teda od 0. Tiež si musia uvedomiť, že číslo 1 môžu zapísať v tvare $\frac{5}{5}$.

Úloha B4 je zameraná na zistenie schopnosti žiakov kombinovať rôzne myšlienkové procesy a prechádzať z jednej reprezentácie zlomku do inej, čo je typické pre štádium kondenzácie (Pantziara, Philippou, 2012). Žiaci musia najskôr zistiť z modelu zlomku o aký zlomok ide. Táto úloha má dve správne riešenia. Prvé správne riešenie je, ak žiaci určia zlomok $\frac{3}{4}$, druhým správnym riešením je zlomok $\frac{1}{4}$, keďže nebolo určené, ktorá časť, šedá alebo biela, reprezentuje zlomok. Následne na to majú žiaci zaznačiť tento zlomok na predtlačenej číselnej osi, buď prostredníctvom čísla alebo intervalu. Znázornenie zlomku na predtlačenej číselnej osi je však náročnejšie, pretože daná os je rozdelená na 8 dielikov a majú znázorniť „štvrtiny“. Musia si teda uvedomiť, aký je vzťah medzi osminami a štvrtinami.

Úspešnosť riešenia úlohy C4 závisí od toho, či žiaci vnímajú zlomok ako objekt, t.j. statickú štruktúru, ktorú vedia oddeliť od ostatných procesov a súčasne majú osvojené vlastnosti rovnosť, hustota, usporiadanie a veľkosť zlomkov. Ide o štádium reifikácie (Pantziara, Philippou, 2012).

Žiaci majú do vyznačeného okienka na predtlačenej číselnej osi napísať správny zlomok. Táto úloha je však zložitejšia, nakoľko daný interval nepredstavuje rozpätie od 0 po 1 ale od 0 po $\frac{1}{2}$. Jediným riešením tejto úlohy je $\frac{1}{6}$. Žiaci by mohli danú úlohu riešiť dvomi spôsobmi. Prvým spôsobom by si uvedomili, rovnosť $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Druhým spôsobom by bola úvaha, že daný interval by si rozdelili na tri časti a vykonali nasledovnú úpravu $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$.

Ďalšia trojica úloh (A5, B5, C5) (viď obr. 2) je zameraná na porozumenie relácii rovnosť zlomkov.

A5	Doplň do zlomku správny čitateľ. $\frac{1}{5} = \frac{\square}{20}$	B5	Zakrúžkuj jeden z piatich kruhov, ktorý znázorňuje rovnaký zlomok, ako je znázornený na obdĺžniku. Vysvetli prečo.  Vysvetlenie:	C5	Traja kamaráti si objednali pizzu. Boris zjedol $\frac{4}{16}$ svojej pizze. Andrej zjedol $\frac{3}{12}$ svojej pizze. Koľko kúskov zo svojej pizze zjedol Karol, keď vieme, že každý z kamarátov zjedol rovnakú časť pizze? Výsledok zakresli do obrázku a zapíš zlomkom.  Odpoveď:
----	--	----	---	----	--

Obr.: 2 Trojica úloh zameraná na reláciu rovnosť zlomkov

Úloha A5 sa zaoberá rovnosťou zlomkov a vyžaduje iba jednoduchú aplikáciu rutinného postupu (Pantziara, Philippou, 2012). Ide o rozšírenie zlomku číslom 4.

V úlohe B5 musia žiaci porovnať medzi dvomi rôznymi reprezentáciami zlomku a uvažovať o rovnosti zlomkov, čo je charakteristické pre štádium kondenzácie. (Pantziara, Philippou, 2012) Najskôr určia zlomok, ktorý je znázornený tzv. čokoládovým modelom zlomku, následne na to musia nájsť rovnaký zlomok, ktorý je znázornený tzv. koláčovým modelom zlomku, ktorý však nie je vopred rozdelený na časti. Dôležitú úlohu tu zohráva aj vizuálne vnímanie a odhad.

Úloha C5 je zameraná na rovnosť zlomkov a pôvodne vyžadovala, aby žiaci vedeli použiť premennú x v kontexte danej úlohy (Pantziara, Philippou, 2012). Modelovanie prostredníctvom premennej x sa pre žiakov základných škôl ukázalo ako príliš náročné, preto sme danú úlohu pozmenili tak, že žiak musel zapísať zlomkom a vyznačiť na predtlačení obrázok, akú časť pizze zjedol Karol.

Ďalšia trojica úloh (A6, B6, C6) (viď obr. 3) je zameraná na porozumenie relácii porovnávanie zlomkov.

A6	Zakrúžkuj väčší zlomok. $\frac{5}{9} \quad \frac{2}{9}$	B6	Vysvetli, prečo je zlomok $\frac{4}{7}$ je väčší ako $\frac{3}{14}$. Vysvetlenie:	C6	Napiš zlomok, ktorý je väčší ako $\frac{1}{7}$ a menší ako $\frac{1}{6}$. Vysvetli. Vysvetlenie:
----	--	----	---	----	--

Obr.: 3 Trojica úloh zameraná na reláciu porovnávanie zlomkov

Úloha A6 je zameraná na porovnanie dvoch zlomkov s rovnakým menovateľom použitím rutinných postupov (Pantziara, Philippou, 2012).

Úloha B6 pôvodne zahŕňala porovnanie dvoch zlomkov s rôznymi menovateľmi použitím dvoch rôznych spôsobov (Pantziara, Philippou, 2012). Táto úloha sa však v predvýskume ukázala ako problematická, nakoľko danú úlohu vyriešilo iba 0,6% študentov a faktorová záťaž tejto úlohy bola 5,30. Za problém sme považovali formuláciu zadanie tejto úlohy, a preto sme zadanie preformulovali nasledovne: „Vysvetli, prečo je zlomok $\frac{4}{7}$ väčší ako $\frac{3}{14}$ “. Sledovali sme, akým spôsobom budú žiaci porovnávať dané zlomky. Veríme, že flexibilita použitá v prístupoch začína v štádiu kondenzácie.

Úloha C6 je zameraná na nájdenie zlomku medzi dvomi kmeňovými zlomkami s po sebe idúcimi menovateľmi. Úspešnosť pri riešení tejto úlohy závisí od toho, či sú žiaci schopní

pochopiť každý zo zlomkov ako objekt, a či každý chápe pojmu hustota usporiadania racionálnych čísel (Pantziara, Philippou, 2012).

Posledná trojica úloh (A7, B7, C7) (obr. 3) je zameraná na porozumenie operácii sčítanie zlomkov.

A7	Sčítaj zlomky a výsledok zapíš v základnom tvare. $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} =$ Základný tvar:	B7	Sčítaj zlomky. $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} =$	C7	Súrodenci Janka a Miško dostali balíček cukríkov. Janka zjedla $\frac{1}{3}$ zo všetkých cukríkov a Miško zjedol $\frac{3}{5}$ zo všetkých cukríkov. a) Akú časť zo všetkých cukríkov zjedli spolu? b) Aká časť cukríkov zostala v balíčku? a) Spolu zjedli cukríkov. b) V balíčku zostalo cukríkov.
----	---	----	---	----	--

Obr.: 4 Trojica úloh zameraná na operáciu sčítanie zlomkov

Úloha A7 je zameraná na súčet dvoch zlomkov s rovnakým menovateľom (Pantziara, Philippou, 2012).

Úloha B7 je zameraná na súčet dvoch zlomkov s rôznymi menovateľmi. Táto úloha je charakteristická pre štádium kondenzácie, pretože žiaci musia vykonať postup úpravy na spoločného menovateľa, teda nejde o priamočiaru operáciu. To zahŕňa porozumenie pojmu zlomok a kombináciu rôznych procesov ako je napr. rovnosť zlomkov. Iné štúdie ukázali, že žiaci môžu použiť pri riešení tejto úlohy aj konceptuálny prístup (Pantziara, Philippou, 2012).

Úloha C7 pôvodne pozostávala z troch čiastkových úloh. Prvá úloha bola spojená so sčítaním zlomkov s rôznymi menovateľmi, v druhej časti mali žiaci nakresliť (graficky znázorniť – vymodelovať) tento proces sčítavania zlomkov a v poslednom kroku majú žiaci vymyslieť slovnú úlohu, ktorá by obsahovala sčítanie dvoch daných zlomkov. Tieto tri časti úlohy C7 preverujú schopnosť žiakov riešiť úlohy na sčítavanie zlomkov dvojakým spôsobom – ako numerický proces (algoritmus sčítania) a ako prácu s objektmi – znázorňovanie procesu sčítania na modeloch a vyjadrenie procesu sčítania slovnou formuláciou a vzťahmi medzi objektmi. (Pantziara, Philippou, 2012)

Pri overovaní testov u žiakov siedmeho a ôsmeho ročníka sme zistili, že žiaden zo žiakov nevedel vymyslieť slovnú úlohu. Jedným z dôvodov je aj to, že na slovenských základných školách sa nekladie dôraz na tvorenie slovných úloh, ale na ich riešenie. Žiaci teda nie sú zvyknutí tvoriť slovné úlohy, a preto sme sa rozhodli toto zadanie pozmeniť. Sformulovali sme slovnú úlohu, ktorú mali žiaci vyriešiť. Taktiež tu ide o vyjadrenie procesu sčítania slovnou formuláciou a vzťahmi medzi objektmi.

Metodológia

Vo februári a v marci 2016 sme realizovali predvýskum, v ktorom sme chceli overiť, či je daný test vhodný použiť v podmienkach slovenských škôl. Na základe použitia rôznych štatistických metód sme zistili, že daný test zameraný na zlomky môžeme považovať za dostatočne dôveryhodný nástroj a s malými úpravami ho môžeme použiť aj v podmienkach slovenských škôl. (Švecová et al., 2017)

Ďalším krokom bolo overenie úspešnosti riešenia jednotlivých úloh na základných školách a s tým súvisiaci výber výskumnej vzorky.

Tematický celok *Zlomky, početové výkony so zlomkami, kladné racionálne čísla* je podľa Štátneho vzdelávacieho programu zaradený do siedmeho ročníka základných škôl. Vzhľadom na to sme si ako výskumnú vzorku zvolili žiakov siedmeho ročníka základných škôl.

Daný test sme na základe výsledkov predvýskumu upravili a overili v apríli 2017 na výskumnej vzorke žiakov siedmeho ročníka ZŠ Bernolákova v Šuranoch. Podľa výsledkov testu a následnej diskusie sme zistili, že žiaci siedmeho ročníka ešte nemajú upevnené učivo o zlomkoch, pretože v teste zlyhávali aj v najľahších úlohách. V diskusii uviedli, že zlomky sa učili už v priebehu októbra a novembra a zabudli ako ich počítať.

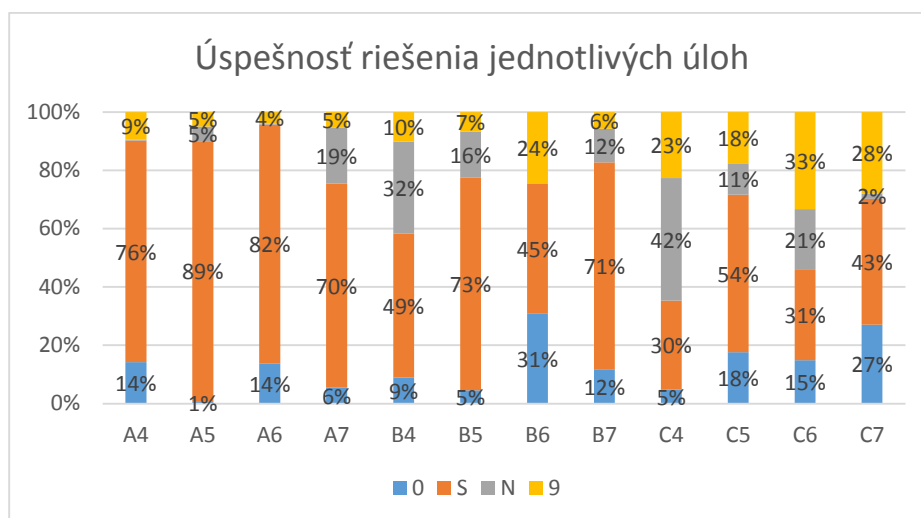
Následne na to sme daný test overovali aj u žiakov ôsmeho ročníka ZŠ Bernolákova v Šuranoch, nakoľko žiaci v ôsmom ročníku si opakujú a upevňujú už nadobudnuté vedomosti o zlomkoch. Zistili sme, že síce žiaci ôsmeho ročníka dosahovali o niečo lepšie výsledky ako žiaci siedmeho ročníka, stále nemajú úplne utvrdené vedomosti o zlomkoch, keďže jadrom učiva matematiky ôsmeho ročníka sú záporné čísla.

Vzhľadom na to sme si aj po diskusii s učiteľmi z praxe ako základný súbor zvolili žiakov deviateho ročníka základnej školy. Výskum sme realizovali v máji - júli 2017, teda v čase, keď žiaci deviateho ročníka mali absolvované Testovanie 9 a absolvované prijímacie pohovory na strednú školu. Nakoľko sa žiaci na Testovanie 9 pripravujú zopakovaním učiva druhého stupňa základnej školy, môžeme očakávať, že títo žiaci budú mať zopakované, osvojené a zapamätané poznatky o zlomkoch a racionálnych číslach, a tak môžeme skúmať závislosti vyplývajúce z výskumných otázok. Testu sa nakoniec zúčastnilo 35 z 39 oslovených základných škôl z Nových Zámkov, Šurian, Nitry, Lučenca, Trenčianskej Turnej, Trenčianskeho Jastrabia, Žiliny, Zlatých Moraviec, Palárikova, Liptovského Mikuláša, Bánova, Lazian, Branču, Haligoviec, Alekšinie a Čeladíc. Výskumnú vzorku tvorí spolu 930 žiakov 9. ročníka základných škôl v uvedených mestách.

Interpretácia výsledkov

Základné informácie o úspešnosti riešenia jednotlivých úloh sú uvedené v grafe 1. Riešenia jednotlivých úloh sme kodovali nasledovným spôsobom. Ak sa žiaci pokúšali danú úlohu vyriešiť, ale nedospeli k žiadnemu výsledku, prideliť sme kód 0, v prípade správnej odpovede sme prideliť kód S, v prípade nesprávnej odpovede sme prideliť kód N a v prípade, že žiak danú úlohu neriešil, prideliť sme kód 9.

Z uvedeného grafu 1 vyplýva, že medzi najmenej náročné úlohy patria úlohy A5, A6, nakoľko majú najlepšiu percentuálnu úspešnosť správnych odpovedí. Postupne sa percentuálna úspešnosť správnych odpovedí znižuje a zvyšuje sa percentuálne zastúpenia nesprávnych odpovedí a odpovedí, v ktorých sa žiaci nedopracovali k žiadnemu výsledku. Ide hlavne o úlohy A4, A7, B5, B7. Úlohy B4, B6, C5 a C7 vyriešilo približne iba 50% žiakov. Najťažšími úlohami boli úlohy C4 a C6, ktoré vyriešilo približne iba 30% žiakov. Zaujímavý je aj postreh, že medzi úlohy, ktoré žiaci najčastejšie neriešili patria úlohy B6, C4, C5, C6 a C7. S výnimkou úlohy B6 ide o úlohy na úrovni štádia reifikácie, čo znamená, že by mali byť najzložitejšie. Vo všetkých úlohách museli žiaci využiť hlbšie poznatky o zlomkoch, nešlo o úlohy, v ktorých sa využije iba naučené pravidlo. Dôvodom nižšej úspešnosti riešenia úloh C5 a C7 mohol byť aj fakt, že dané úlohy mali dlhšie slovné zadanie. Pri úlohách B6 a C6 mohol problém nastať preto, lebo od žiakov sme žiadali aj vysvetlenie riešenia.



Graf 1: Úspešnosť riešenia jednotlivých úloh

Záver

V článku sme sa zamerali analýzu porozumenia zlomku ako miery, relácií usporiadania a rovnosti zlomkov a operácie sčítania zlomkov u žiakov 9. ročníka základných škôl. Taktiež sme analyzovali žiacke riešenia z pohľadu ich správnosti.

Zistili sme, že úlohy A5 a A6 boli pre žiakov príliš jednoduché (úspešnosť vyššia ako 80%). Ide o úlohy na úrovni štádia interiorizácie, teda by mali byť najmenej náročné.

Ďalšiu skupinu o niečo náročnejších úloh, ktoré vyriešilo približne 70% žiakov tvoria úlohy A4, A7, B5 a B7. Ide o úlohy na úrovni štádia interiorizácie a kondenzácie.

Tretiu skupinu úloh, ktoré vyriešilo približne 50% žiakov tvoria úlohy B4, B6, C5 a C7. Ide o úlohy na úrovni štádia interiorizácie a reifikácie.

Ako najťažšie sa ukázali úlohy C4 a C6 na úrovni štádia reifikácie. Predpokladá sa, že tieto úlohy boli pre žiakov zložité, pretože nejde o štandardné školské úlohy vyskytujúce sa v učebniciach a v pracovných zošitoch, ktoré žiaci používajú v škole.

Zaujímavé je aj zoskupenie jednotlivých úloh. Výskum Švecová (et al., 2017) ukázal, že niektoré úlohy tvoria akési štádium prechodu medzi jednotlivými štádiami. Predpokladáme, že z toho dôvodu môžeme pozorovať medzistupne po sebe idúcich úrovni aj na našej výskumnej vzorke.

Za významné považujeme aj zistenia, že medzi úlohy, ktoré študenti najčastejšie neriešili patria úlohy B6, C4, C5, C6 a C7, ktoré sú s výnimkou úlohy B6 všetky na úrovni štádia reifikácie. Príčiny prečo žiaci dané úlohy neriešili mohli byť napr. to, že zadanie bolo príliš dlhé, v úlohe sme žiadali riešenie zdôvodniť a pod. Problém mohol byť aj v prístupe vyučujúceho k vyplňaniu daného testu, ale aj v prístupe žiakov, ktorý test ignorovali, alebo vyplňali iba úlohy, nad ktorými sa nemuseli hlbšie zamýšľať.

Taktiež z percentuálnej úspešnosti riešení jednotlivých úloh môžeme vidieť, že najviac nesprávnych odpovedí uviedli žiaci v úlohách B4 a C4, ktoré predstavujú umiestnenie zlomku na číselnej osi.

Práca s číselnou osou v súvislosti so zlomkami v podmienkach slovenských škôl zrejme absentuje. Číselná os by však mala byť zahrnutá do vyučovacieho procesu, nakoľko ide o jednu z interpretácií zlomku. Žiaci by si teda mohli vytvoriť komplexnejší obraz o zlomkoch a racionálnych číslach, čím by sa prispelo ku skvalitneniu vyučovania daných konštruktov.

PodĎakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou projektov UGA -> VII/9/2017 - *Diagnostika vzťahu osobnej potreby štruktúry a riešenia úloh so zlomkami* a VEGA: *Vplyv osobnej potreby štruktúry a psychodidaktických aspektov na rozvoj matematických kompetencií*.

Literatúra

- Hannula, M. S. (2003). Locating Fraction On a Number Line. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Honolulu, s. 17–24. ISSN: 0771-100X
- Hartl, P., Hartlová, H. (2010). *Velký psychologický slovník*. Praha: Portál.
- Hejný, M. (1987). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN.
- Ni, Y. (2001). Semantic Domains Of Rational Numbers And The Acquisition Of Fraction Equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, roč. 26, s. 400–417. ISSN 0361-476X
- Pantziara M.C. Philippou G. (2012). Levels Of Students' "Conception" Of Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, roč. 79, s. 61–83. ISSN: 1573-0816
- Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, roč. 22, s. 1–36. ISSN: 1573-0816
- Švecová, V., Pavlovičová G., Rybanský Ľ., Klimentová L. (2017). *Reifikácia zlomkov vo vzťahu k osobnej potrebe štruktúry*. Wolters Kluwer: Praha.