

O rôznych typoch indukcií v matematike

On Various Types of Inductions in Mathematics

Peter Vrábel^{*a}

*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A.
Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 29 September 2017; received in revised form 12 October 2017; accepted 12 October 2017

Abstract

Three principles of inductions hold in mathematics: mathematical induction, ordinal induction and induction in continuum. There are two equivalent principles of the mathematical induction. Didactic aspects the application of these equivalent principles are examined in the paper.

Keywords: mathematical induction, continuum, equivalent principle.

Classification: 00A35; 97C50; 97D50

Úvod

V matematike platia tri princípy indukcií. Je to princíp matematickej indukcie, princíp transfinitnej indukcie a princíp indukcie v kontinuu (Šalát [1], 1986). Na tieto princípy potom prirodzene nadväzujú po rade metóda dôkazu matematickou indukciou (známa aj zo strednej školy), transfinitná indukcia a metóda dôkazu indukciou v kontinuu. Princíp transfinitnej indukcie platí v dobre usporiadaných množinách a princíp indukcie v kontinuu platí v husto a spojitou usporiadaných množinách bez najmenšieho a najväčšieho prvku. Keďže žiadna usporiadaná množina nemôže byť súčasne dobre aj husto usporiadaná, tak tieto princípy vo všeobecnosti nesúvisia. Množina prirodzených čísel $\mathbb{N}$ resp. $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, s obvyklým usporiadaním sú dobre usporiadané množiny, preto princíp matematickej indukcie je špeciálnym prípadom princípu transfinitnej indukcie. Na druhej strane pri exaktnom (nie intuitívnom) dôkaze toho, že množina $\mathbb{N}$ je dobre usporiadaná množina, sa nevyhneme použitiu princípu matematickej indukcie. V tomto príspevku sa budeme zaoberať predovšetkým didaktickými aspektmi používania metódy dôkazu matematickou indukciou, predovšetkým použiteľnosťou jej dvoch variant.

Teoretické východiská

Nech $\mathbb{Z}$ označuje množinu všetkých celých čísel a $\mathbb{Z}_k = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq k\}$, kde k je nejaké pevné celé číslo. Uvedme teraz používané princípy indukcie v matematike.

PMI 1. Nech $M \subseteq \mathbb{Z}_k$, pričom platí:

- (1) $k \in M$;
- (2) Ak $n \in M$, potom aj $n + 1 \in M$.

Potom $M = \mathbb{Z}_k$.

^{*}Corresponding author; email: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.2.1-6

PMI 2. Nech $M \subseteq \mathbb{Z}_k$, pričom platí:

- (3) $k \in M$;
- (4) Ak $n \in \mathbb{Z}_k$ a $m \in M$ pre každé $m \in \mathbb{Z}_k$, $m < n$, tak aj $n \in M$.

Potom $M = \mathbb{Z}_k$.

Poznámka 1. Princípy PMI 1 a PMI 2 sú ekvivalentné. Pre každú množinu M , $M \subseteq \mathbb{Z}_k$, podmienky (1), (2) platia práve vtedy, keď platia podmienky (3), (4). Zrejme z platnosti (3), (4) vyplýva platnosť (1), (2). Platí aj naopak. Ak by výrok (4) neplatil, tak by existovalo také celé číslo n , $k < n$, že $m \in M$ pre každé $m < n$, ale $n \notin M$. Vezmime zo $\mathbb{Z}_k$ najmenšie číslo s takouto vlastnosťou. Nech je to n_0 . Potom $n_0 - 1 \in M$ a $n_0 \notin M$, teda neplatí (2).

PTI. Nech A je dobre usporiadaná množina a $\emptyset \neq M \subseteq A$, pričom platí:

- (5) Najmenší prvok množiny A patrí do množiny M .
- (6) Ak $y \in A$ a $x \in M$ pre každé $x \in A$, $x < y$, tak aj $y \in M$.

Potom $M = A$.

Poznámka 2. Všimnime si, že predpoklad (3) v PMI 2 ((5) v PTI) vyplýva z predpokladu (4) ((6)). Totiž ak napríklad v (4) za n zvolíme k , tak triviálne platí $m \in M$ pre každé $m < k$, pretože $\{m \in \mathbb{Z}_k; m < k\} = \emptyset$. Podobne to je v prípade predpokladu (5) v PTI. Iná je situácia v prípade použitia uvedených viet. Vtedy platnosť (3) resp. (5) treba overiť, pretože obyčajne sa inak postupuje pri overení (4) resp. (6) pre ostatné prvky množiny $\mathbb{Z}_k$ resp. A .

PIK. Nech K je kontinuum a $M \subseteq K$. Nech platí:

- (7) Existuje také $\alpha \in K$, že $\xi \in M$ pre každé $\xi \in K$, $\xi < \alpha$.
- (8) Ak $\beta \in K$ a $\xi \in M$ pre každé $\xi \in K$, $\xi < \beta$, tak existuje také $\gamma \in K$, $\gamma > \beta$, že $\xi \in M$ pre každé $\xi \in K$, $\xi < \gamma$.

Potom $M = K$.

Dôkazy všetkých uvedených princípov indukcií možno nájsť napríklad v publikácii Šalát [1]. Dôležitým príkladom kontinua je množina reálnych čísel $\mathbb{R}$ s obvyklým usporiadaním.

Z uvedených princípov vyplývajú prirodzeným spôsobom metódy dôkazov pomocou uvedených indukcií. Jedná sa o dôkazy tvrdení v tvare všeobecného výroku $\forall x \in X \mathcal{V}(x)$, kde $\mathcal{V}(x)$ je výroková funkcia definovaná na množine X , pričom X je množina $\mathbb{Z}_k$ alebo dobre usporiadaná množina A , prípadne kontinuum K . Stačí potom dokázať, že množina M , určená rovnosťou

$$M = \{x \in X; \mathcal{V}(x)\},$$

má v prípade $X = \mathbb{Z}_k$ vlastnosti (1), (2) alebo vlastnosti (3), (4); v prípade $X = A$ vlastnosti (5), (6) alebo nakoniec v prípade $X = K$ má vlastnosti (7), (8). Aplikácie metódy dôkazu indukciou v kontinuu sú smerované predovšetkým do matematickej analýzy (Vrábel [2], 2002).

Veta 1. Nech $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. Označme $M_\varepsilon = (-\infty, \varepsilon) \cap M$ pre ľubovoľné $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Nech výroková funkcia $\mathcal{V}(x)$ definovaná na množine M má tieto vlastnosti:

- (9) Existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, že $M_\alpha \neq \emptyset$ a pre každé $x \in M_\alpha$ platí $\mathcal{V}(x)$.
- (10) Ak pre každé $x \in M_\beta$ platí $\mathcal{V}(x)$ pre nejaké $\beta \in \mathbb{R}$, tak existuje také $\gamma \in \mathbb{R}$, že $\beta < \gamma$ a pre každé $x \in M_\gamma$ platí $\mathcal{V}(x)$.

Potom pre každé $x \in M$ platí $\mathcal{V}(x)$.

Dôkaz. Prevedieme nepriamo. Nech by existoval taký prvok $x_0 \in M$, že by výrok $\mathcal{V}(x_0)$ bol nepravdivý. Potom množina B , $B = \{x \in M; \mathcal{V}(x) \text{ je nepravdivý výrok}\}$, by bola neprázdna. Z predpokladu (9) vyplýva, že množina B je zdola ohraničená, teda existuje infimum tejto množiny, označme ho β . Potom pre každé $\xi \in M_\beta$ platí $\mathcal{V}(\xi)$. Z predpokladu (10) vyplýva, že existuje také $\gamma \in \mathbb{R}$, že $\beta < \gamma$ a pre každé $x \in M_\gamma$ platí $\mathcal{V}(x)$. Potom ale $\inf B \geq \gamma > \beta$, čo je spor.

Poznámka 3. Ak vo vete 1 za množinu M vezmeme množinu $\mathbb{Z}_k$, tak dostávame matematickú indukciu ako dôsledok vety 1 a teda aj dôsledok PIK, pretože princíp PIK je ekvivalentný so spojitým usporiadaním množiny $\mathbb{R}$ (Vrábek [2], 2002).

Didaktické aspekty metódy dôkazu matematickou indukciou

Predovšetkým si treba uvedomiť, že nie každé tvrdenie tvaru $\forall x \in \mathbb{Z}_k \mathcal{V}(x)$ je vhodné alebo možné dokazovať matematickou indukciou. Uvedme na to príklady.

Problém 1. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} < 2.$$

Riešenie. Matematickou indukciou to nepôjde. Použijeme metódu teleskopického súčtu. Takým je totiž súčet $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$, pretože pre každé prirodzené číslo k platí:

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Potom po dosadení dostávame:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{(n+1)!} < 2. \end{aligned}$$

Problém 2. Dokážte, že každé prirodzené číslo n má nenulový násobok, ktorého dekadický zápis obsahuje len cifry 0, 9.

Riešenie. Dôkaz matematickou indukciou ani v tomto prípade nefunguje. Uvažujme pre prirodzené číslo n čísla $1, 10, 10^2, \dots, 10^n$. Medzi týmito $n+1$ číslami existujú aspoň dve, ktoré majú po delení číslom n rovnaký zvyšok. Ak sú to čísla $10^r, 10^s, r > s$, tak $10^r = na + k, 10^s = nb + k, a > b, 0 \leq k < n$. Potom $10^r - 10^s = n(a - b)$ a $10^r - 10^s$ je požadovaného tvaru.

Problém 3. Dokážte, že ľubovoľná $(n+1)$ – prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ obsahuje dve nesúdeliteľné prirodzené čísla.

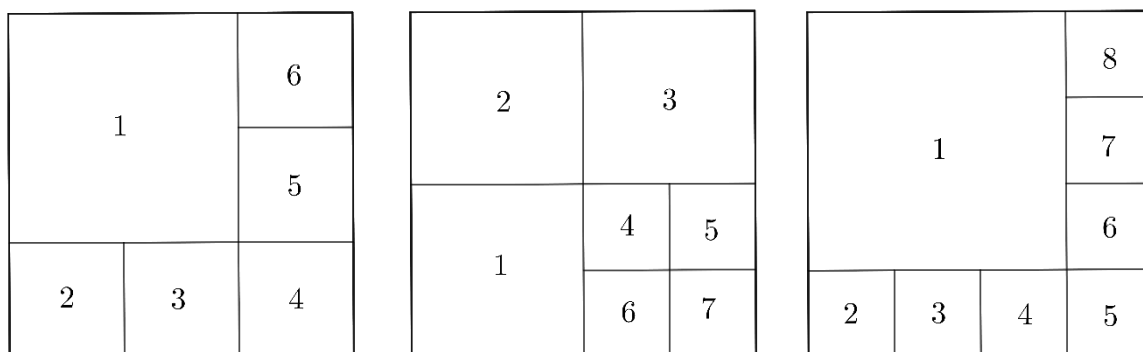
Riešenie. Pre každé prirodzené číslo k platí, že čísla $k, k+1$ sú nesúdeliteľné. Ukážeme, že ľubovoľná $(n+1)$ – prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ obsahuje aspoň jednu dvojicu po sebe idúcich čísel (tvrdenie A). Využijeme Dirichletov princíp. Dva prvky z $(n+1)$ – prvkovej podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ padnú do niektorej z n množín $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$. To ale znamená, že sú to po sebe idúce prirodzené čísla $2k-1, 2k$.

Poznámka 4. Pri riešení problému 3 sme použili stratégiu predposledného kroku, teda sme dokázali tvrdenie A, z ktorého už priamo vyplýva to, čo sme mali dokázať. Pravda tento predposledný krok možno čiastočne previesť aj matematickou indukciou. Pre $n = 1$ tvrdenie A platí, pretože dvojprvková podmnožina množiny $\{1, 2\}$ je práve táto množina. Nech A platí pre nejaké prirodzené číslo n . Vezmime ľubovoľnú $(n + 2)$ – prvkovú podmnožinu $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, a_{n+2}\}$ množiny $\{1, 2, \dots, 2n, 2n + 1, 2n + 2\}$. Predpokladajme už, že $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} < a_{n+2}$. Ak $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ je podmnožinou množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$, tak využijeme indukčný predpoklad. V opačnom prípade $a_{n+1} = 2n + 1$ a následne $a_{n+2} = 2n + 2$. Teda tvrdenie A platí aj pre $n + 1$.

Je viacero iných problémov, ktoré sa riešia použitím Dirichletovho princípu namiesto matematickej indukcie i keď sa zdanlivo zdá, že by sa mohla použiť. Napríklad je to aj nasledujúci problém: Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n ľubovoľná $(n + 1)$ – prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ obsahuje dve čísla, z ktorých jedno delí druhé (riešenie možno nájsť aj v publikácii Vrábek [3], 2005).

Problém 4. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n , $n \geq 6$, platí, že ľubovoľný štvorec môžeme rozrezať na n štvorcov, z ktorých niektoré môžu mať rovnaké dĺžky strán.

Riešenie. Indukčný predpoklad, že pre pevné prirodzené číslo n , $n \geq 6$, možno ľubovoľný štvorec rozrezať na n štvorcov, nedáva žiaden návod ani východisko na dôkaz podobného tvrdenia pre prirodzené číslo $n + 1$. Totiž minimálny počet štvorcov, na ktorý je možno rozrezať ľubovoľný štvorec, je štyri. To ale už dáva istý návod, ako by sme mohli postupovať. Ak vieme rozrezať štvorec na n štvorcov, tak ho vieme rozrezať na $n + 3$ štvorcov. Stačí jeden z n štvorcov nahradiť štyrmi rovnakými štvorcami, na ktoré ho rozrežeme. Potom však vieme rozrezať štvorec aj na $n + 6$, $n + 9$, všeobecne na $n + 3k$, k je ľubovoľné nezáporné celé číslo (to už ľahko dokážeme pomocou PMI1 vzhľadom na k). Teraz si uvedomme, že každé prirodzené číslo n , $n \geq 6$, sa dá jednoznačne vyjadriť v jednom z tvarov $6 + 3k$, $7 + 3k$, $8 + 3k$, kde k je nejaké nezáporné celé číslo. Totiž $n = 6 + (n - 6)$, $n - 6 = 3k + r$, $r \in \{0, 1, 2\}$. Ak $r = 0$, tak $n = 6 + 3k$; ak $r = 1$, tak $n = 7 + 3k$; nakoniec ak $r = 2$, tak $n = 8 + 3k$. Na základe predchádzajúcej úvahy stačí teda dokázať tvrdenie pre $n \in \{6, 7, 8\}$. Rozrezanie štvorcov požadovaným spôsobom v týchto prípadoch je na nasledujúcom obrázku.



Porovnajme teraz účinnosť dôkazu matematickou indukciou na základe princípov PMI 1 a PMI 2. Tieto princípy sú síce ekvivalentné ale matematická indukcia na základe PMI 2 je univerzálnejšia. Teda existujú situácie, keď napríklad výrok $\forall n \in \mathbb{N} \mathcal{V}(n)$ dokážeme

pomocou PMI 2, ale pomocou PMI 1 to nejde alebo je to komplikovanejšie. Uvedme na to príklady.

Problém 5. Každé prirodzené číslo väčšie ako 1 možno vyjadriť v tvare súčinu nejakých prvočísel.

Riešenie. Pre $n = 2$ tvrdenie platí, pretože jedno prvočíslo pokladáme tiež za súčin prvočísel. Nech každé prirodzené číslo menšie ako nejaké pevné prirodzené číslo n ($n \geq 3$) možno vyjadriť v tvare súčinu niektorých prvočísel. Dokážeme, že aj číslo n možno takto vyjadriť. Stačí uvažovať, že číslo n je zložené. Potom $n = ab$, $1 < a < n$, $1 < b < n$. Na čísla a, b sa už vzťahuje indukčný predpoklad, teda $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, $b = p_{k+1} \cdot p_{k+2} \cdot \dots \cdot p_m$, $k < m$, $p_1, p_2, \dots, p_m$ sú prvočísla. Potom $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m$.

Poznámka 5. Dokázať tvrdenie v probléme 5 pomocou PMI 1 sa nedá. Uvedené tvrdenie je čiastočným výsledkom vety, ktorá sa v minulosti nazývala základná veta aritmetiky: Každé prirodzené číslo n väčšie ako 1 sa dá jediným spôsobom vyjadriť v tvare

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ sú prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sú prirodzené čísla. Jednoznačnosť uvedeného vyjadrenia sa nedokazuje matematickou indukciou.

Problém 6. Nech z je prirodzené číslo väčšie ako jedna. Každé prirodzené číslo možno jediným spôsobom vyjadriť v tvare

$$(11) \quad a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

kde $k, a_k, a_{k-1}, \dots, a_0$ sú celé nezáporné čísla, $a_k \neq 0$, $0 \leq a_i < z$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Riešenie. Obe časti dôkazu tvrdenia (existencia aj jednoznačnosť) je výhodnejšie urobiť pomocou PMI 2. Najskôr teda dokážeme, že každé prirodzené číslo možno v tvare (11) vyjadriť. Pre $n = 1$ tvrdenie platí: $a_0 = 1$, $k = 0$. Predpokladajme, že každé prirodzené číslo menšie ako nejaké pevné prirodzené číslo n ($n \geq 2$) sa dá vyjadriť v tvare (11). Dokážeme, že aj číslo n sa dá vyjadriť v tvare (11). Zo známej vety o delení so zvyškom vyplýva existencia takých nezáporných celých čísel b, c , že $n = zb + c$, $0 \leq c < z$. Ak $b = 0$, tak $n = c$ a teda $k = 0$, $a_0 = n$. Ak $b \neq 0$, tak číslo b je prirodzené číslo menšie ako n a na základe indukčného predpokladu ho možno vyjadriť v tvare

$$b = d_k z^k + d_{k-1} z^{k-1} + \dots + d_1 z + d_0, d_k \neq 0, 0 \leq d_i < z, i = 0, 1, \dots, k.$$

Potom $n = zb + c = d_k z^{k+1} + d_{k-1} z^k + \dots + d_1 z^2 + d_0 z + c$. Stačí položiť $a_0 = c$, $a_1 = d_0$, $a_2 = d_1, \dots, a_k = d_{k-1}$, $a_{k+1} = d_k$.

Teraz dokážeme jednoznačnosť vyjadrenia (11). Pre $n = 1$ tvrdenie platí, pretože okrem vyjadrenia $a_0 = 1$, $k = 0$, iné neexistuje. Nech jednoznačnosť vyjadrenia platí pre každé prirodzené číslo menšie ako nejaké prirodzené číslo n ($n \geq 2$). Dokážeme, že aj n sa dá v tvare (11) vyjadriť jediným spôsobom. Nech

$$n = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0 = b_s z^s + b_{s-1} z^{s-1} + \dots + b_1 z + b_0,$$

kde a_i, b_j vyhovujú daným podmienkam vyjadrenia (11). Z vety o delení so zvyškom vyplýva, že

$$n = z(a_k z^{k-1} + a_{k-1} z^{k-2} + \dots + a_1) + a_0 = zA + a_0, 0 \leq a_0 < z,$$

$$n = z(b_s z^{s-1} + b_{s-1} z^{s-2} + \dots + b_1) + b_0 = zB + b_0, 0 \leq b_0 < z.$$

Vyjadrenie $n = zq + r$, $0 \leq r < z$, je možné iba jediným spôsobom, preto $A = B$ a $a_0 = b_0$. Ale $A < n$ a preto ho z indukčného predpokladu už možno jediným spôsobom vyjadriť v tvare (11). Preto $k = s$ a $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Odtiaľ už vyplýva, že aj pre n existuje jediné vyjadrenie v tvare (11).

Poznámka 6. Tvrdenie v probléme 6 je kľúčové pre jednoznačné vyjadrenie každého prirodzeného čísla v tzv. z -adickej pozičnej sústave.

Záver

Predovšetkým vo výučbe matematiky sa kvôli jednoduchšej indukčnej podmienke častejšie využíva dôkaz matematickou indukciou založený na princípe PMI 1 ako ten, ktorý je založený na PMI 2. Z hľadiska univerzálnosti je však PMI 2 účinnejší. Pri zachovaní predpokladu (3) môžeme podmienku (4) ekvivalentne nahradiť nasledujúcou podmienkou: ak $n \in \mathbb{Z}_k$ a $m \in M$ pre každé $m \in \mathbb{Z}_k$, $m \leq n$, tak aj $n + 1 \in M$.

Literatúra

- [1] Šalát, T. – Smítal, J. 1986. *Teória množín*. Bratislava: Alfa, 1986.
- [2] Vrábel, P. 2002. *O dôkazovej technike v elementárnej analýze využívajúcej princíp indukcie v kontinuu*. In: Acta Math. 5, FPV UKF, Nitra, 2002, 91-97, ISBN 80-8050-562-4.
- [3] Vrábel, P. 2005. *Heuristika a metodológia matematiky*. Nitra: FPV UKF, Edícia Prírodovedec č. 165, 2005, ISBN 80-8050- 840-2.