

Stratégie riešenia vybraných úloh krajského kola Matematickej olympiády v kategórii Z9 v školskom roku 2016/2017

Strategy for Solving Selected Problems of the Regional Round of the Mathematical Olympiad in the Z9 Category in the School Year 2016/2017

Júlia Záhorská ^{a*} – Jozef Fulier ^b

^{a,b} *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received 3 april 2017; received in revised form 13 April 2017; accepted 24 April 2017

Abstract

In this article, we focus on the need to motivate pupils in mathematical studies by organizing competitions and encouraging them to join competitions. We present a list of current mathematical competitions currently organized in Slovakia. Approximately 15-year-old pupils have the opportunity to compete in the Z9 category of the Mathematical Olympiad. We analyze strategies for solving two problems of the regional round of the 66th year of RR MO Z9 (KK MO Z9) in the Nitra region and we are processing the success rate for these tasks in this round.

Keywords: motivation, mathematical competition, Mathematical Olympiad, strategy for solving

Classification: B60, C20, C30, U40

Úvod

Jedným z cieľov matematického vzdelávania na druhom stupni ZŠ je, aby žiaci nadobudli schopnosť používať matematiku vo svojom budúcom živote a rozvíjali svoje logické a kritické myslenie. Zároveň sa učia argumentovať, komunikovať a spolupracovať v skupine pri riešení problému. Spoznávajú matematiku ako súčasť ľudskej kultúry a dôležitý nástroj pre spoločenský pokrok. Nadobúdajú zároveň ďalšie matematické zručnosti a schopnosti pri spracovávaní textov a vzťahov, nielen matematických. Dôraz sa kladie na matematizáciu reálnej situácie a interpretáciu výsledkov. [1]

Po zavedení školskej reformy do praxe v roku 2008 sa vo výchovno-vzdelávacom procese na všetkých stupňoch vzdelávania realizovalo značné množstvo zmien. Príprava a realizácia ďalších zmien je opäť aktuálna.

Názory učiteľov na pozitívny, či negatívny dopad na žiakov sa rôzni. Čo sa týka vzdelanostnej úrovne, v medzinárodnom meraní pätnásťročných žiakov PISA, zaznamenávame „trend mierne klesajúceho výkonu v matematickej gramotnosti“ od roku 2003. V matematickej

*Corresponding author; email: jzahorska@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.1.15-22

gramotnosti bol výkon slovenských žiakov v roku 2015 (podobne ako v PISA 2012), štatisticky významne nižší ako priemer krajín OECD. [2]

Ako sa ďalej uvádza v [3], žiaci majú nedostatočné vedomosti a zručnosti z geometrie, majú problémy s objavovaním vzťahov medzi rôznymi veličinami a problémy s interpretáciou výsledkov.

Riešenie je podľa autorov v používaní inovatívnych metód a foriem vyučovania, v zaradovaní problémov z bežného života na učenie sa a tvorivé hľadanie riešení.

V tomto kontexte je významným prvkom, ktorým možno motivovať žiakov k zvýšeniu záujmu o vyučovanie matematiky a riešenie matematických problémov, organizovanie a realizácia matematických súťaží. Prehľad aktuálnych matematických súťaží, ktoré sú v súčasnosti organizované na Slovensku, prinášame v ďalšej časti príspevku. Približne 15 – roční žiaci majú možnosť zapojiť sa do súťaže Matematická olympiáda v kategórii Z9. Zaujali nás stratégie riešenia dvoch úloh krajského kola 66. ročníka KK MO Z9 v Nitrianskom kraji, ktoré analyzujeme a spracovávame úspešnosť riešení úloh uvedeného kola.

Matematické súťaže na Slovensku pre žiakov 2. stupňa ZŠ

Na Slovensku sa koná viacero matematických súťaží, ktorých cieľom je podporiť záujem žiakov o matematiku, napomôcť vyhľadávaniu talentov a podpore ich rastu a rozšíriť matematické vedomosti žiakov. Tieto súťaže prispievajú k popularizácii matematiky a sú cenným zdrojom informácií potrebných ku skvalitňovaniu výchovno-vzdelávacieho procesu pre učiteľov.

Ďalej uvádzame stručný prehľad matematických súťaží a v nich jednotlivých kategórií, ktoré sú určené pre žiakov nižšieho sekundárneho vzdelávania:

- a) *Matematická olympiáda* (MO) je určená žiakom základných škôl, osemročných gymnázií a žiakom stredných škôl. Organizuje sa v domácom, školskom, okresnom, krajskom a celoštátnom kole. Víťazi najvyššej kategórie (kategórie A) môžu postúpiť na Medzinárodnú matematickú olympiádu (IMO).
Pre základné školy sú určené kategórie Z5 – Z9, ktoré sa organizujú v domácom a okresnom kole, kategória Z9 končí krajským kolom. Nie je pre žiakov spoplatnená. [4]
- b) *Pytagoriáda* (PYT) je matematická súťaž, v ktorej okrem správnosti vypočítaných príkladov rozhoduje aj čas, za ktorý žiaci vypočítajú dané úlohy. Výsledné hodnotenie sa skladá z bodov za správnosť a z bodov za čas využitý na riešenie úloh.
Súťaž je organizovaná v kategóriách pre 1. stupeň ZŠ (3. a 4. ročník) a pre 2. stupeň ZŠ v kategóriách P5 (školské a okresné kolo) až P8 (školské, okresné a celoštátne kolo). Za účasť v súťaži žiaci neplatia. [5]
- c) *Pangea* je matematická súťaž pre 7. až 9. ročník ZŠ a 1. až 3. ročník SŠ s cieľom prepojiť a porovnať znalosti žiakov a študentov v rôznych krajinách celého sveta. Na piatom ročníku v roku 2016 sa zúčastnilo viac ako 63 000 žiakov zo Slovenska.
Najúspešnejší riešitelia súťaže zo stredných škôl získajú možnosť štúdia na niektorých fakultách niektorých univerzít v Bratislave bez absolvovania prijímacích skúšok. Účasť nie je spoplatnená. [6]
- d) *Matematický klokan* je najväčšia medzinárodná matematická súťaž na svete určená pre žiakov 1. ročníka základnej školy až posledného ročníka strednej školy.

Žiaci 2. stupňa ZŠ môžu súťažiť v kategóriách Školák 5, Školák 6, Benjamín 7, Benjamín 8 a Kadet 9. V roku 2016 súťažilo v 58 krajinách sveta celkom 5 999 174 žiakov. Účasť v súťaži je spoplatnená. [7]

- e) *GENIUS MATEMATICUS* je medzinárodná matematická online súťaž určená pre žiakov od 8 rokov, pri ktorej môžu zábavnou formou riešiť veľmi zaujímavé a netradičné matematické úlohy z každodenného života (50 úloh v trvaní 40 minút s dohľadom koordinátora).
Pre 2. stupeň ZŠ sú určené kategórie 04, 03 a 02, za účasť v súťaži sa platí. [8]
- f) *MAKS* je matematická súťaž pre 2. stupeň ZŠ v kategóriách MAKS 5 až MAKS 9. Žiaci prostredníctvom koordinátora po zaplacení tzv. štartovného zasielajú vyriešené úlohy na vyhodnotenie (na riešenie majú viac ako 3 týždne, vyberajú si štyri z piatich úloh). Počas školského roka je 8 kôl, žiaci môžu pracovať aj vo dvojiciach. [9]
- g) V súťaži *EXPERT* (celoslovenská vedomostná súťaž pre 6. ročník ZŠ až posledný ročník SŠ) si môžu súťažiaci vybrať z ôsmich tém dve. Téma Mozgolamy je zameraná na matematiku a určená pre všetky vekové kategórie. Obsahuje logické hádanky, postupnosti, zaujímavé slovné úlohy, úlohy zamerané na kombinačné a pojmové myslenie.
Pre 2. stupeň základnej školy sú určené kategórie EXPERT 6 - EXPERT 9. Za účasť sa platí. [10]
- h) *Logická olympiáda* je celoslovenská súťaž určená pre žiakov základných škôl a 8 - ročných gymnázií do 15 rokov so všeobecným intelektovým nadaním. Súťaž je realizovaná (od roku 2013) v školských kolách a celoslovenskom finále v Prešove. Pozostáva zo 4 oblastí: matematický - priestorový - logický úsudok a verbálne myslenie. [11]

Matematická olympiáda – krajské kolo v kategórii Z9 v školskom roku 2016/2017

V školskom roku 2016/2017 sa krajského kola v kategórii Z9 v Nitrianskom kraji zúčastnilo 41 žiakov základných škôl a prvého ročníka gymnázií. Ich výsledky možno hodnotiť ako veľmi rôznorodé.

V článku sa podrobnejšie venujeme prvým dvom úlohám, ktoré nás zaujali nielen zadaním, ale hlavne stratégiami žiackych riešení. Vyhodnotili sme riešenia 27 riešiteľov, ktoré boli v slovenskom jazyku. Riešenia v maďarskom jazyku sme nevyhodnocovali. Všetky uvádzané výsledky sa týkajú riešiteľov z Nitrianskeho kraja.

1. **úloha:** *Michaela a Jana dnes obe majú narodeniny, dokopy majú 84 rokov. Pritom Michaela má dvakrát viac rokov, ako mala Jana, keď Michaela mala toľko rokov, koľko má Jana dnes. Koľko rokov má Michaela a koľko Jana?* [12]

V riešeníach, ktoré uviedla autorka úlohy, nachádzame tieto možnosti:

- zostavenie a riešenie lineárnej rovnice s jednou neznámou, ktorá vyjadruje vek Jany v minulosti,
- zostavenie a riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi, ktoré vyjadrujú vek Jany aj Michaely v minulosti,
- riešenie úsudkom (postupné skúšanie možností) vychádzajúce z poznatku, že Michaela má vek vyjadrený párnym číslom a súčet vekov je 84 rokov.

Tabuľka 1: Stratégie riešenia v žiackych riešeniach 1. úlohy

	Počet riešiteľov	Úplné riešenie	Neúplné riešenie	Maximálny počet bodov	Získaných bodov spolu
Zostavenie a riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi	3	2	1	18	16
Zostavenie a riešenie sústavy troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi	4	4	0	24	24
Použitie štyroch neznámych pri vyjadrení vzťahov a dokončenie úsudkom	1	0	1	6	4
Riešenie úsudkom s využitím neznámych v zápise úlohy	5	1	4	30	22
Riešenie úsudkom	14	1	13	84	45

Komentár k údajom v *Tabuľke 1*: Za úlohu mohol riešiteľ získať maximálne 6 bodov. Štvrtý a piaty stĺpec tabuľky slúži na porovnanie počtu bodov, ktoré mohli riešitelia získať a koľko v skutočnosti získali, aby čitateľ vedel posúdiť neúplnosť riešení.

Najčastejšie nedostatky boli v nedostatočnom, nesprávnom alebo chýbajúcom zdôvodnení, že ide o jediné riešenie úlohy. Tri riešenia úsudkom boli úplne nesprávne. Zaujímavé boli riešenia jedného riešiteľa, z ktorých bolo zrejmé, že bol pripravovaný na súťaž individuálne a postupy riešení, zdôvodnenia i závery boli na vysokej úrovni.

2. úloha: *Pred Janom sedeli tri zahalené princezné a Jano mal za úlohu zistiť, ktorá z nich je Zlatovláška.*

Princezná v prvom kresle povedala: „V treťom kresle Zlatovláška nesedí.“

Princezná v druhom kresle povedala: „Ja Zlatovláška nie som.“

Princezná v treťom kresle povedala: „Ja som Zlatovláška.“

Zázračná muška Janovi prezradila, koľko princezien klamalo. Až s touto radou dokázal Jano odhaliť pravú Zlatovlášku. Ktorá z princezien bola Zlatovláška? [12]

V riešeniach, ktoré uviedla autorka úlohy nachádzame tieto možnosti:

- rozbor všetkých prípadov, ktoré by nastali, ak by Zlatovláška sedela postupne v jednotlivých kreslách,
- rozbor ôsmich možností podľa pravdivosti, resp. nepravdivosti jednotlivých výrokov.

Prvým z uvedených spôsobov riešili úlohu dvaja riešitelia, každý získal plný počet bodov. Jeden riešiteľ zostavil tabuľku pravdivostných hodnôt pre tri jednoduché výroky a správnym

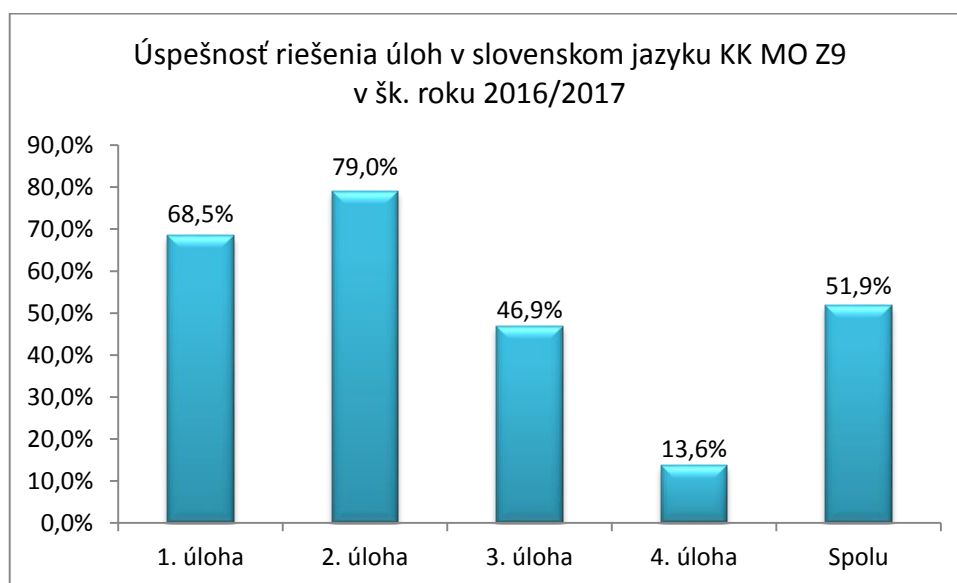
uvedením dôvodov vedúcich k správne riešeniu tiež získal plný počet bodov. Ostatní riešitelia uvažovali druhým z vyššie uvedených spôsobov riešenia úlohy, nie vždy však dostatočne zdôvodnili jednoznačnosť riešenia. Uvažovali, čo sa stane, ak klame jedna, dve alebo všetky tri princezné, ale nevylúčili možnosť, že všetky tri súčasne hovoria pravdu. Úspešnosť riešení týchto dvoch úloh uvádzame v nasledujúcom grafe a pre zaujímavosť sme pridali aj úspešnosť riešení zvyšných dvoch úloh, ktorých znenie uvádzame.

3. úloha: *Veliteľ zvolal ostatných obrancov hradu a rozhodol, ako sa rozdelia o svoju odmenu:*

„Prvý si vezme jeden dukát a sedminu zvyšku, druhý si vezme dva dukáty a sedminu nového zvyšku a tak ďalej. Teda n -tý obranca si vezme n dukátov a k tomu ešte sedminu zo zvyšného množstva dukátov, pokiaľ nejaké budú.“

Takto sa podarilo rozdeliť všetky dukáty a pritom všetci obrancovia dostali rovnako. Koľko obrancov sa delilo o odmenu? [12]

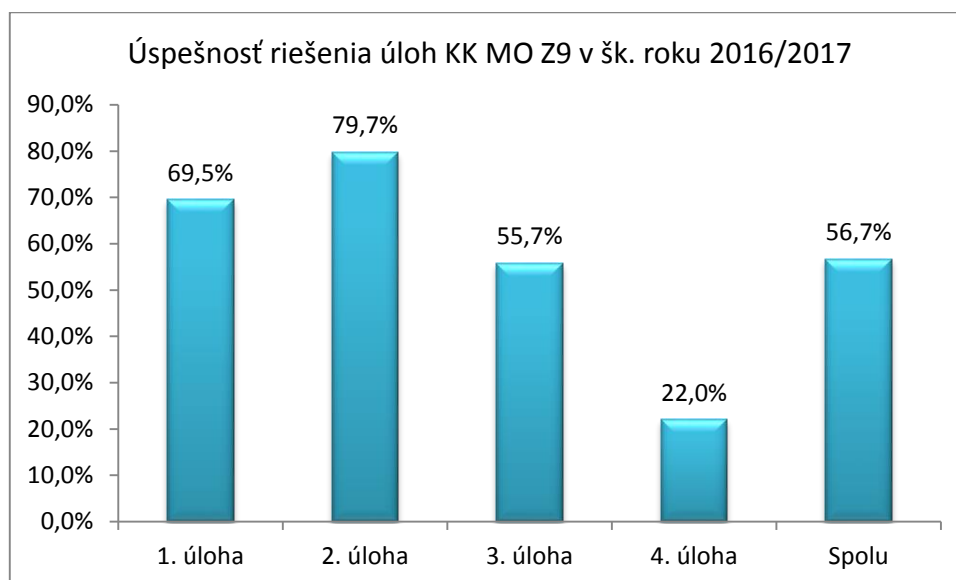
4. úloha: *V rovnoramennom trojuholníku ABC je základňa AB dlhá 6 cm a uhol BCA má veľkosť 45° . Vypočítajte polomer kružnice opísanej tomuto trojuholníku. [13]*



Graf 1 Úspešnosť riešenia všetkých úloh KK MO Z9 v slovenskom jazyku

Z grafu 1 vidieť, že ďalšie úlohy boli riešené menej úspešne, pričom rozdiel v úspešnosti je značný. Domnievame sa, že prvé dve úlohy boli náročné na porozumenie a logické spracovanie textu. Riešitelia sa potom ešte ako – tak „potrápili“ s riešením tretej úlohy (textovo bola tiež náročná na porozumenie a spracovanie). To bol možno jeden z dôvodov prečo sa drvivá väčšina súťažiacich vôbec nezaoberala riešením poslednej – štvrtej úlohy, resp. na riešenie tejto úlohy im nezostal dostatok času. Dokumentuje to skutočnosť, že napriek tomu, že táto úloha (z hľadiska kategorizácie úloha geometrická) nebola veľmi náročná, vzhľadom na učivo druhého stupňa ZŠ, predsa len až 21 riešiteľov (z 27 riešení v slovenskom jazyku) nezískalo za riešenie tejto úlohy ani bod.

Nasledovný graf (Graf 2), ktorý uvádzame na porovnanie, znázorňuje úspešnosť všetkých riešení (41) všetkých úloh v slovenskom i maďarskom jazyku.



Graf 2 Úspešnosť riešenia všetkých úloh KK MO Z9 v slovenskom i maďarskom jazyku

Keďže sme mali možnosť dať riešiť prvé dve úlohy budúcim učiteľom matematiky (trinástim študentom 3. ročníka učiteľstva akademických predmetov v kombinácii s matematikou) zaujímalo nás, či budú rozdiely vo voľbe stratégií riešenia. Naše zistenia sú nasledovné:

- v riešení prvej úlohy vo všetkých prípadoch využili zostavenie a riešenie sústavy dvoch alebo troch lineárnych rovníc s dvomi alebo tromi neznámymi,
- v riešení druhej úlohy traja študenti urobili rozbor všetkých prípadov, ktoré by nastali, ak by Zlatovláska sedela postupne v jednotlivých kreslách a ostatní riešili rozborom ôsmich možností podľa pravdivosti, resp. nepravdivosti jednotlivých výrokov.

Záver

Ako sme už naznačili v úvode, jednou z ciest, ako podporovať záujem žiakov o matematiku, je účasť v matematických súťažiach a to v takých, kde môžu súťažiť nielen výrazné matematické talenty, ale aj žiaci, ktorých matematika „baví“.

Podľa nášho názoru sa s účasťou žiakov v matematických súťažiach spájajú viaceré problémy. Jedným z nich je platba za účasť v súťaži. Niektoré školy riešia účasť svojich žiakov na takto spoplatnených súťažiach úhradou platby zo zdrojov rodičovského združenia, niekedy si účasť hradia jednotlivci. Možno by stálo za pozornosť zvážiť podporu väčšieho množstva matematických súťaží z prostriedkov ministerstva školstva SR.

Jednoznačne najkomplexnejšou matematickou súťažou je Matematická olympiáda, ktorá je najstaršou predmetovou olympiádou v SR, v súčasnosti (školský rok 2016/2017) prebieha už 66. ročník. Táto olympiáda sa stala vzorom pre všetky ostatné predmetové olympiády v SR. V súčasnosti je evidovaných už 16 olympiád, treba však priznať, že viaceré z nich sú iba istou formou predmetových súťaží, ktoré sú od ideálu MO veľmi vzdialené. Napriek dlhodobej histórii MO je možné nájsť aj v organizácii tejto komplexnej matematickej súťaže slabšie miesta. Jedným z nich je, že kategórie Z5 až Z9 MO nemajú *školské kolá*. Znamená to, že úspešné absolvovanie domáceho kola MO uvedených kategórií zväčša postačuje na postup

do *okresného kola MO* príslušnej kategórie MO. Toto spôsobuje netriviálne problémy, pretože pri riešení domáceho kola MO sa nemôže vylúčiť vplyv či dokonca priame vypracovanie riešenia úloh domáceho kola MO ambicióznymi rodičmi, staršími súrodencami, spolužiakmi či dokonca aj samotnými učiteľmi matematiky, ktorí chcú, aby sa ich zverenci dostali na okresné kolo MO. Jednoducho povedané, v prípade, že počet úspešných riešiteľov domáceho kola prevyšuje kapacitu okresného kola MO, tento postup nezaručuje, že do okresného kola sa dostanú tí najlepší. Okresné komisie MO samozrejme o tomto probléme vedia a pri rozhodovaní o tom, koho vyberú do okresného kola MO zavádzajú ďalšie kritériá, ktoré by im umožnili čo najspravodlivejší výber súťažiacich do okresných kôl MO, napríklad horné obmedzenie počtu vybraných žiakov z jednej školy, či zohľadnenie histórie úspešnosti žiakov z danej školy, prezretie a posúdenie všetkých riešení úloh domáceho kola MO všetkých uchádzačov o okresné kolo a nasledovný výber tých najlepších, a pod. Bohužiaľ ani jedno z týchto dodatočných kritérií nezaručuje, že na okresné kolo MO sa dostanú všetci tí, ktorí si to za svoju prácu či talent zaslúžia. Kritická situácia je najmä v najvyššej kategórii MO na základnej škole, v kategórii Z9. Táto kategória je špecifická jednak v tom, že súťažiaci v tejto kategórii môžu postúpiť až do krajského kola MO, ale najmä tým, že riaditelia stredných škôl zohľadňujú výsledky súťažiacich v tejto kategórii MO (a nie celkom nevýznamne - čo je určite správne) v prijímacom konaní záujemcov o štúdium na ich škole. Preto je záujem žiakov 9. ročníka ZŠ o zapojenie sa do riešenia úloh kategórie Z9 MO pomerne veľký. Toto je určite potešujúci fakt pre všetkých, ktorým matematická gramotnosť žiakov našich škôl a osud matematickej olympiády nie je ľahostajný: od učiteľov matematiky, od členov okresných, krajských komisií MO až po celoštátnu komisiu MO, SKMO. Zostáva však tiež podozrenia, že aj napriek enormnej snahe sa môže stať, že výber na okresné kolo MO bude nespravodlivý. Zdá sa nám, že jediným možným riešením je zavedenie školského kola MO aj pre kategóriu Z9 MO, kde budú žiaci riešiť úlohy samostatne a pod dozorom učiteľov matematiky, rovnako ako je to vo vyšších kategóriách MO, v kategóriách C, B a A.

Literatúra

- [1] ŠPÚ. (2015). *Štátny vzdelávací program. Matematika – nižšie stredné vzdelanie*. Dostupné: <http://www.statpedu.sk>
- [2] MŠVVaŠ SR, NÚCEM, OECD. (2016). *PISA 2015. Prvé výsledky výskumu 15-ročných žiakov z pohľadu Slovenska*. Dostupné: <http://www.nucem.sk/>
- [3] MŠVVaŠ SR, NÚCEM.(2016). *Testovanie T9-2016. Priebeh, výsledky a analýzy*. Bratislava. Dostupné: <http://www.nucem.sk/>
- [4] Matematická olympiáda. Dostupné: <https://www.iuventa.sk/sk/Olympiady/Olympiady-a-sutaze/MO/66-rocnik-MO-2016-2017.alej>
- [5] Pytagoriáda. Dostupné: <https://www.iuventa.sk/sk/Olympiady/Olympiady-a-sutaze/PYT.alej>
- [6] Pangea. Dostupné: <http://www.pangea-sutaz.sk/>
- [7] Matematický klokan. Dostupné: <http://matematickyklokan.sk/>
- [8] GENIUS MATEMATICUS. Dostupné: <http://www.geniuslogicus.eu/sutaze-pre-vsetkych/0014/>

[9] MAKS. Dostupné: <http://maks.sk/>

[10] EXPERT. Dostupné: <http://sutazexpert.sk/>

[11] Logická olympiáda. Dostupné: <http://www.logickaolympiada.sk/o-su-azi.html>

[12] Volfová, M. (2017). *66. ročník Matematickej olympiády 2016/2017. Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9*. Dostupné: <https://www.iuventa.sk/>

[13] Růžičková, L. (2017). *66. ročník Matematickej olympiády 2016/2017. Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9*. Dostupné: <https://www.iuventa.sk/>