

Analógia ako matematická stratégia

Analogy as Mathematical Strategy

Peter Vrábel^{*a}

*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 31 March 2017; received in revised form 13 April 2017; accepted 17 April 2017

Abstract

The mathematical strategy *analogy* is the frequently used method on problem solving and on an executing of various mathematical proofs. The possibilities usage of this strategy are analysed in various mathematical branches in the submitted contribution. The effectiveness of the method in question is illustrated via solutions of several miscellaneous mathematical problems.

Keywords: mathematical strategy, analogy, mathematical problem.

Classification: 00A35; 97C50; 97D50

Úvod

V matematike často skúmame rôzne skupiny objektov, pričom sa môže stať, že niektoré vlastnosti istej množiny objektov majú svoju analógiu (sú podobné) vo vlastnostiach inej množiny objektov. Typické príklady nájdeme hlavne v geometrii. Ak niektoré množiny objektov sú analogické, tak už nemusí byť žiadnym prekvapením, že isté vlastnosti a vzťahy v jednej skupine objektov majú svoju analógiu vo vlastnostiach a vzťahoch v druhej skupine objektov. Potom identifikáciu týchto vlastností a vzťahov získavame použitím matematickej metódy – *stratégie použitia analogického (podobného) problému*, stručne *stratégie analógiu* (Kopka [1], 2004; Polya [2], 1973; Vrábel [3], 2005).

Analógia v matematike

Analógia je istý druh podobnosti. Uvažujme napríklad priamky v rovine ako jednu množinu objektov a roviny v priestore ako druhú množinu objektov. Môžeme položiť nasledujúcu otázku: Aký je minimálny počet priamok, ktoré v rovine určujú ohraničený geometrický útvar? Zrejme jedna priamka, ani žiadne dve priamky v rovine neurčujú ohraničený rovinný útvar. Tri rôznobežné priamky neprechádzajúce jedným bodom a ležiace v jednej rovine určujú ohraničený rovinný útvar a to trojuholník. Analogicky je to s rovinami v priestore. Minimálny počet rovín, ktoré už určujú ohraničený útvar v priestore, je štyri. Štyri roviny, z ktorých žiadne dve nie sú rovnobežné a všetky štyri neprechádzajú jedným bodom, určujú štvorsten. Potom medzi trojuholníkom v planimetrii a štvorstenom v stereometrii je analógia, čo (ako uvidíme v nasledujúcej časti) vedie k analogickým vlastnostiam.

^{*}Corresponding author; email: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.1.1-7

V matematike hovoríme často o podobnosti rôznych operácií. Je to vtedy, keď sa napríklad rôzne operácie „riadia podľa tých istých pravidiel“. Napríklad sčítovanie aj násobenie reálnych čísel je komutatívne aj asociatívne. Navyše číslo 0 v operácii sčítovania hrá analogickú úlohu ako číslo 1 v operácii násobenia.

Analogickú vlastnosť môžeme nájsť aj v iných množinách objektov. Vezmime ľubovoľnú množinu A a systém všetkých jej podmnožín $\mathcal{P}(A)$. Na množine $\mathcal{P}(A)$ uvažujme dve binárne operácie: zjednotenie ($\cup$) a symetrická diferencia ($\div$). Pre každé množiny $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ platí

$$X \cup Y = Y \cup X, (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z),$$

$$X \div Y = Y \div X, (X \div Y) \div Z = X \div (Y \div Z),$$

$$X \cup \emptyset = X, X \div \emptyset = X.$$

Operácie $\cup, \div$ sú teda komutatívne aj asociatívne a prázdna množina $\emptyset$ hrá v týchto operáciách analogickú úlohu ako 0 (1) v operácii sčítanie (násobenie) reálnych čísel.

Uvažujme v rovine pevný bod S , množinu T všetkých otočení v tejto rovine so stredom v bode S a operáciu skladania otočení. Je zrejmé, že táto operácia je na množine T komutatívna aj asociatívna a otočenie o 360° hrá podobnú úlohu ako 0, 1 resp. $\emptyset$ v hore uvedených operáciách.

Analógie operácií v matematike viedli ku vzniku významných algebraických teórií, ktoré pracujú s pojmami ako sú grupoid, pologrupa, grupa, okruh a podobne.

S pojmom analógie súvisí ešte jeden matematický pojem, ktorý sa nazýva *dualita*. Postavenie operácií sčítania a násobenia reálnych čísel je v prípade distributívneho zákona rozdielne. Pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí $a(b + c) = ab + ac$, ale vo všeobecnosti neplatí rovnosť $a + (bc) = (a + b)(a + c)$. Uvedené operácie nemožno v tomto prípade zameniť, ako to bolo v prípade komutatívneho a asociatívneho zákona. Uvažujme však inú situáciu. Pre ľubovoľné množiny A, B, C platia rovnosti

$$A \Delta B = B \Delta A, (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C),$$

$$(A \Delta B) \blacksquare C = (A \blacksquare C) \Delta (B \blacksquare C),$$

kde za znaky $\Delta, \blacksquare$ môžeme dosadiť ľubovoľné z množinových operácií $\cup, \cap$. Platí však ešte viac. Nech E je ľubovoľná pevne zvolená základná množina. Komplement množiny $A \in \mathcal{P}(E)$ v základnej množine E označíme A' . Ak platí akákoľvek množinová rovnosť, v ktorej vystupujú ľubovoľné množiny z potenčnej množiny $\mathcal{P}(E)$ a len operácie zjednotenia, prieniku a komplementu, tak vzájomnou zámennou znakov operácií $\cup, \cap$ a vzájomnou zámennou množín $\emptyset, E$, dostaneme opäť pravdivú množinovú rovnosť. Operácie $\cup, \cap$ a množiny $\emptyset, E$ sú v štruktúre $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap, ', \emptyset, E)$ duálne. Uvedená štruktúra je množinový model algebraickej štruktúry, ktorá sa nazýva boolovská algebra.

V tejto súvislosti treba uviesť ešte jeden dôležitý model boolovskej algebry, nazvime ho logický. Nech $\mathcal{A}$ je množina, ktorá obsahuje všetky výrokové premenné

$$p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, \dots, p_n, q_n, r_n, s_n, \dots,$$

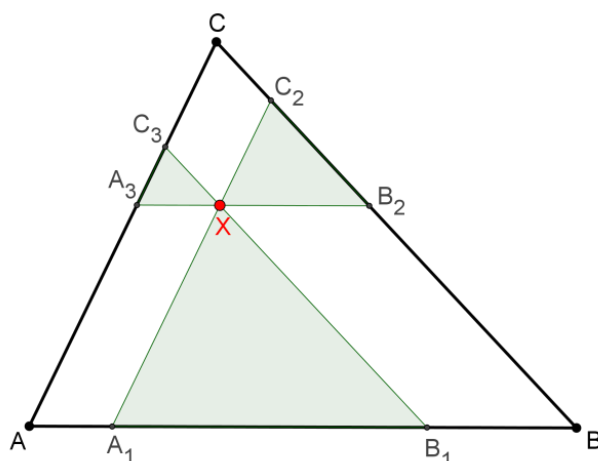
ďalej obsahuje všetky formuly výrokového počtu vytvorené z výrokových premenných pomocou logických spojok $\vee, \wedge$ a $'$ (znak negácie) a žiadne iné prvky. Označme $0 = p \wedge p'$, $1 = p \vee p'$ a interpretujme ekvivalenciu formúl výrokového počtu ako rovnosť. Ak v pravdivej rovnosti formúl vzájomne vymeníme logické spojky $\vee, \wedge$ a vzájomne vymeníme

prvky 0 a 1, tak dostaneme opäť pravdivú rovnosť. Operácie $\vee$, $\wedge$ a prvky 0, 1 sú v štruktúre $(\mathcal{A}, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ duálne.

Aplikácie stratégie analógia pri riešení problémových úloh

Problém 1. Nech X je ľubovoľný vnútorný bod trojuholníka ABC . Vedme bodom X priamky rovnobežné so stranami tohto trojuholníka. Dostaneme tri nové trojuholníky A_1B_1X , XB_2C_2 , A_3XC_3 , ktoré sú podobné trojuholníku ABC (obr.1). Nech P_1, P_2, P_3 sú po rade obsahy týchto trojuholníkov a P je obsah trojuholníka ABC . Nájdite vzťah týchto obsahov. Vyslovte analogické tvrdenie pre štvorsten.

Riešenie. Ak ľubovoľné trojuholníky $ABC, \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ sú podobné s koeficientom podobnosti $k = \frac{|\bar{A}\bar{B}|}{|AB|}$, tak ich obsahy sú v pomere k^2 .



Obrázok 1

Pre obsahy P_1, P_2, P_3, P teda platí:

$$\sqrt{\frac{P_1}{P}} = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{|A_1B_1|}{|AB|}, \quad \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{|XB_2|}{|AB|}, \quad \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{|A_3X|}{|AB|},$$

$$\frac{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{|A_1B_1| + |XB_2| + |A_3X|}{|AB|} = 1.$$

Odtiaľ vyplýva, že

$$\sqrt{P} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}.$$

Analogické tvrdenie pre štvorsten bude vychádzať z toho, že pomery objemov podobných telies s koeficientom podobnosti k sa rovná k^3 . Nech X je ľubovoľný vnútorný bod štvorstena $ABCD$. Vedme týmto bodom roviny rovnobežné so stenami štvorstena. Tieto spolu so stenami vytvárajú štyri štvorsteny, ktoré sú podobné štvorstenu $ABCD$. Označme ich objemy V_1, V_2, V_3, V_4 . Objem štvorstena $ABCD$ označme V . Potom platí

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}.$$

Problém 2. Obsah P trojuholníka sa rovná číslu $\frac{1}{2}pr$, kde p je obvod trojuholníka a r je polomer kružnice vpísanej do tohto trojuholníka. Vyslovte analogické tvrdenie pre objem štvorstena.

Riešenie. Ak S je stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC , r je jej polomer a P_1, P_2, P_3 sú po rade obsahy trojuholníkov SAB, SBC, SCA , tak

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{2}r|AB| + \frac{1}{2}r|BC| + \frac{1}{2}r|CA| = \frac{1}{2}pr,$$

kde p je obvod trojuholníka ABC .

Nech S je stred gule vpísanej do štvorstena $ABCD$, ktorý má objem V . Nech r je polomer vpísanej gule a V_1, V_2, V_3, V_4 sú po rade objemy štvorstenov $ABCS, ABDS, BCDS, ACDS$. Označme P_1, P_2, P_3, P_4 po rade obsahy trojuholníkov ABC, ABD, BCD, ACD . Potom platí:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{2}rP_1 + \frac{1}{3}rP_2 + \frac{1}{3}rP_3 + \frac{1}{3}rP_4 = \frac{1}{3}Pr,$$

kde P je povrch štvorstena.

Problém 3. Pre každé prirodzené číslo n platí $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} < 1$. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n, n > 1$, platí

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right) < 2.$$

Riešenie. Pre každé prirodzené číslo n platí :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Použijeme analogickú metódu pre súčin:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right) &= \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} \cdots \frac{n^2}{n^2-1} \\ &= \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdots \frac{n \cdot n}{(n-1)(n+1)} = \frac{2n}{n+1} < 2. \end{aligned}$$

Problém 4. Nájdite bijekciu $f: \langle a, b \rangle \rightarrow (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Analogickou metódou nájdite bijekciu $g: \langle a, \infty \rangle \rightarrow (a, \infty)$.

Riešenie. Požadované zobrazenie f nemožno určiť jedným predpisom. Treba vyčleniť z intervalu vhodnú nekonečnú množinu A a definovať vhodné prosté zobrazenia na disjunktných množinách $\langle a, b \rangle - A$, A . Položme $A = \left\{a + \frac{n-1}{n}(b-a); n \in \mathbb{N}\right\}$, označme $a_n = a + \frac{n-1}{n}(b-a)$ pre každé prirodzené číslo n . Definujme zobrazenie $f: \langle a, b \rangle \rightarrow (a, b)$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle a, b \rangle - A \\ a_{n+1}, & x = a_n \in A \end{cases}$$

Dokážme najskôr, že zobrazenie f je injekcia. Nech $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, $x_1 \neq x_2$. Stačí osobitne uvažovať prípady: $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle - A$; $x_1, x_2 \in A$; $x_1 \in \langle a, b \rangle - A, x_2 \in A$. V prvom prípade $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$. V druhom prípade $x_1 = a_m, x_2 = a_n$ pre nejaké rôzne prirodzené čísla m, n . Potom $f(x_1) = a_{m+1} \neq a_{n+1} = f(x_2)$. V poslednom prípade platí:

$f(x_1) = x_1 \in \langle a, b \rangle - A$; $x_2 = a_k$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$ a teda $f(x_2) = a_{k+1} \in A$. Keďže $(\langle a, b \rangle - A) \cap A = \emptyset$, tak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dokážeme, že zobrazenie f je aj surjekcia. Označme $A_1 = A - \{a\}$. Nech $y \in (a, b)$. Ak $y \in \langle a, b \rangle - A_1$, tak $f(y) = y$. Ak $y \in A_1$, tak $y = a_n$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom $a_{n-1} \in \langle a, b \rangle$ a $f(a_{n-1}) = a_n$.

Pri konštrukcii bijekcie $g: \langle a, \infty \rangle \rightarrow (a, \infty)$ možno použiť analógiu. Za množinu A v tomto prípade stačí vziať napríklad množinu $\{a + n - 1; n \in \mathbb{N}\}$ a definovať zobrazenie g takto:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle a, \infty \rangle - A \\ a_{n+1}, & x = a_n = a + n - 1 \in A \end{cases}$$

Dôkaz toho, že zobrazenie g je bijekcia, je praktický totožný s dôkazom v prípade zobrazenia f . Stačí iba namiesto intervalu $\langle a, b \rangle$ uvažovať interval $\langle a, \infty \rangle$ a namiesto intervalu (a, b) interval (a, ∞) .

Problém 5. Na štvorcovej šachovnici $n \times n$ je v každom poli do stĺpčekov umiestnený istý počet jednoteurových mincí takým spôsobom, ktorý je ilustrovaný na obr. 2 v prípade $n = 3$ resp. $n = 4$.

5	4	3
4	3	2
3	2	1

7	6	5	4
6	5	4	3
5	4	3	2
4	3	2	1

Obrázok 2

Celkový počet jednoteurových mincí na štvorcovej šachovnici $n \times n$ je potom n^3 .

Položme teraz na šachovnicu $n \times n$ jednoteurové mince tak, ako je na obr.3 v prípade $n = 5$.

13	12	11	10	9
11	10	9	8	7
9	8	7	6	5
7	6	5	4	3
5	4	3	2	1

Obrázok 3

Aký je pri takomto umiestnení celkový počet jednoteurových mincí na štvorcovej šachovnici $n \times n$, ak n je nepárne číslo?

Riešenie. Metóda riešenia prvého prípadu spočíva v premiestnení mincí podľa diagonály začínajúcej zľava dole ako je to ilustrované v nasledujúcej tabuľke pre $n = 4$.

7-3	6-2	5-1	4
6-2	5-1	4	3+1
5-1	4	3+1	2+2
4	3+1	2+2	1+3

V druhom prípade postupujeme analogicky, pričom vykonáme dve premiestnenia, podľa prostredného riadku a potom podľa prostredného stĺpca. Je to uvedené v nasledujúcich tabuľkách v prípade $n = 5$.

13-4	12-4	11-4	10-4	9-4
11-2	10-2	9-2	8-2	7-2
9	8	7	6	5
7+2	6+2	5+2	4+2	3+2
5+4	4+4	3+4	2+4	1+4

9-2	8-1	7	6+1	5+2
9-2	8-1	7	6+1	5+2
9-2	8-1	7	6+1	5+2
9-2	8-1	7	6+1	5+2
9-2	8-1	7	6+1	5+2

Takto je na šachovnici 5×5 celkove $5^2 \cdot 7$ jedoeurových mincí. Vo všeobecnom prípade šachovnice $n \times n$, n je nepárne prirodzené číslo, je v strede tabuľky číslo, ktoré sa pri uvedených premiestneniach nemení a rovná sa číslu $\frac{3n-1}{2}$. Preto celkový počet jedoeurových mincí umiestnených na šachovnici sa rovná číslu $n^2 \cdot \frac{3n-1}{2}$.

Niekedy metódou analógie možno dospieť k nečakaným hypotézam, ktoré potom treba potvrdiť exaktným dôkazom.

Nech $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_0 \neq 0$. Ak $c_1, c_2, \dots, c_n$ sú korene polynómu P , tak

$$P(x) = a_0 \left(1 - \frac{x}{c_1}\right) \left(1 - \frac{x}{c_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{c_n}\right),$$

$$a_1 = -a_0 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}\right).$$

Podobne pre polynóm $Q(x) = b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - \dots + (-1)^nb_nx^{2n}$, $b_0 \neq 0$, s koreňmi $d_1, -d_1, d_2, -d_2, \dots, d_n, -d_n$ platí :

$$Q(x) = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{d_1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{d_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{d_n^2}\right),$$

$$\text{teda } b_1 = b_0 \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \dots + \frac{1}{d_n^2}\right).$$

L. Euler metódou analógie dospel k myšlienke použiť vzťahy koeficientov a koreňov polynómu pre rozklad istých mocninných radov. Pre každé reálne číslo x , $x \neq 0$, platí:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots.$$

Rovnica $\frac{\sin x}{x} = 0$ má nekonečne veľa koreňov: $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \dots, n\pi, -n\pi, \dots$. L. Euler dospel k domnienke, že

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) \dots,$$

odkiaľ špeciálne vyplýva rovnosť

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \dots + \frac{1}{n^2\pi^2} + \dots,$$

teda

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots.$$

Euler najskôr testoval správnosť poslednej rovnosti na iných príkladoch a nakoniec ju exaktne dokázal.

Na druhej strane uvedená analógia medzi „konečným a nekonečným“ je skutočne zriedkavá. Ved' napríklad súčet konečného počtu reálnych čísel nezávisí od poradia sčítancov, ale konvergencia a súčet nekonečného číselného radu (teda súčet nekonečne veľa čísel) závisí od poradia členov radu. Je známe, že číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konverguje a jeho súčet sa rovná číslu $\ln 2$. Potom súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$ sa rovná číslu $2 \ln 2$. Všimnime si, že v tomto rade, teda v rade

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \dots$$

sú pre každé nepárne prirodzené číslo n dva členy s menovateľom n a to $\frac{2}{n}$ a $-\frac{1}{n}$. Pre každé párne prirodzené číslo n je v tomto rade jediný člen s menovateľom n a to $-\frac{1}{n}$. Členy tohto radu premiestnime tak, aby členy nového radu nasledovali po sebe podľa menovateľov. Dostaneme rad

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{2}{7} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots$$

Porovnaním postupností čiastočných súčtov tohto radu a radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ zistíme, že obe postupnosti majú rovnakú limitu a teda oba rady majú aj rovnaký súčet a to číslo $\ln 2$.

Záver

Stratégia *analógia* je v matematike nenahraditeľnou metódou, ktorá sa používa pri formovaní niektorých dôležitých matematických pojmov, pri dôkazoch i pri riešení rôznych problémov prakticky v každej matematickej disciplíne. V matematike je navyše celý rad pojmov, ktoré sú „symetrický“ definované. Napríklad pojem infima a suprema ohraničenej neprázdnej podmnožiny nejakej usporiadanej množiny. Preto aj celý rad tvrdení, v ktorých sa využíva infimum, má svoju analógiu v tvrdeniach so supremom. Pravda, musíme byť pri aplikácii metódy analógia opatrní a nehladať analógiu niekde, kde v skutočnosti nie je.

Literatúra

- [1] Kopka, J. 2004. *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. Ústí nad Labem: Acta Universitatis Purkynianae 101, 2004, ISBN 80-7044-604-8.
- [2] Polya, G. 1973. *How to Solve It?* Princeton, Princeton University Press, 1973.
- [3] Vrábel, P. 2005. *Heuristika a metodológia matematiky*. Nitra: FPV UKF, Edícia Prírodovedec č. 165, 2005, ISBN 80-8050-840-2.