Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 2, p. 28 – 34
ISSN 2453-6083

Matematické kompetencie žiakov pri riešení otvoreného geometrického problému

Pupil´s Mathematical Competencies in Solving Geometrical Open Problem

Kristína Bulková[a*] – Soňa Čeretková[a]

[a*]*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 30 September 2016; received in revised form 18 October 2016; accepted 18 October 2016

Abstract

For mapping of development and level of key competencies of students in mathematics, particularly competencies: analysing situations, revaluation possible strategies of solving and choice and description of original solving process, are appropriate open mathematical problems. For solving open problems, requiring mathematical inquiring, students do not use customary techniques or simple application of standard algorithms. Assessment of solution of open tasks and mathematical inquiring also requires nonstandard approach of assessor. In this paper it is proposed a concept of observing a solving process of students and assessment of specific aspects of open mathematical problem solving. Solutions are demonstration of higher level of mathematical thinking of students in geometry. The proposed system of rubrics (tables of assessment) indicates revealed demonstrated mathematical competencies of students in assessed solving process. Rubrics were compiled with the aim on assessment of mathematical knowledge of students based on performance standard according to State Education Programme of Slovak Republic.

Keywords: mathematical competencies, mathematical open problem, rubric (table of assessment)

Classification: F90

Úvod

Snahou učiteľa matematiky by malo byť podporovanie rozvoja znalostí a schopností u každého žiaka; nielen naučiť žiakov základné vedomosti, ale postupne zvyšovať ich úroveň. Vo vyučovaní matematiky sú známe rôzne aktivizujúce metódy, pomocou ktorých je možné podporiť záujem žiakov o matematiku, s cieľom zvýšiť úroveň matematického myslenia. Avšak môže byť náročné sledovať postupné zlepšovanie u každého žiaka osobitne. Cieľom príspevku je navrhnúť rubriky, na základe ktorých je možné v riešiteľskom postupe geometrického problému pozorovať a analyzovať jednotlivé úrovne matematických kompetencií a vedomostí žiaka.

Ako teoretický základ bola využitá van Hieleho schéma úrovní porozumenia geometrii. Každej definovanej úrovni boli pridelené náležité matematické kompetencie, ktoré je následne možné identifikovať v riešiteľskom postupe žiakov.

[*]Corresponding author; email: kristina.bulkova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.2.28-34

Pre prehľadnejšie pozorovanie matematických kompetencií bol využitý inovovaný Štátny vzdelávací program (iŠVP, 2015), ktorý vymedzuje obsah vzdelávania a výkonový štandard v matematike pre žiakov gymnázií.

Teoretické východiská

„Geometria je nástrojom pre štúdium axiomatických systémov, médiom pre prezentáciu reálneho sveta a vizualizáciu matematických myšlienok." (Handbook for Teachers, 1992, s. 23). Geometrické objekty sa nachádzajú všade okolo nás a geometria je už od počiatku vývoja ľudského vzdelania nevyčerpateľným zdrojom pre tvorbu a riešenie matematických problémov. Podstata geometrie tak dáva možnosť pre učiteľov využívať úlohy, vďaka ktorým vidia žiaci spojenie matematiky s reálnym svetom, aj prostredníctvom otvorených matematických problémov.

Pre hodnotenie úrovne porozumenia geometrii je nevyhnutné brať do úvahy mnoho aspektov; od základných znalostí až po prácu s axiomatickými systémami. Usinskin (1982, s. 3–7) uvádza van Hieleho schému piatich úrovní porozumenia geometrii. Žiaci na počiatočnej úrovni sa rozhodujú len na základe vnímania, nie zdôvodňovania. Poznajú základné názvy útvarov a rozoznávajú ich len na základe ich vzhľadu. V druhej úrovni už vedia určiť vlastnosti jednotlivých útvarov, prípadne ich pomenovať. Avšak to, či sa jedná o postačujúcu alebo nutnú vlastnosť k popísaniu útvaru, je žiak schopný rozlíšiť až na tretej úrovni. Na základe chápania vzájomných vzťahov v geometrii je potom žiak schopný odôvodniť svoj postup, respektíve obhájiť dôkaz riešenia, neformálnou argumentáciou. V nasledujúcej úrovni už žiak dokáže skonštruovať dôkaz, pričom využíva získané vedomosti o postačujúcich a nutných podmienkach a znalosti axióm a definícií. Dôkaz sporom a nepriamy dôkaz vie žiak skonštruovať na najvyššej úrovni ovládania geometrických poznatkov. Na najvyššej úrovni je žiak schopný vytvárať a porovnávať matematické axiomatické systémy.

Rovnako tak aj matematická kompetencia sa prejavuje v rôznych stupňoch a pozostáva zo schopností a ochoty používať matematické spôsoby myslenia. Matematické spôsoby myslenia sa prejavujú v uplatňovaní logického a priestorového myslenia a prezentácie matematických vedomostí v nich, prostredníctvom vzorcov, modelov, diagramov, grafov a tabuliek (Blaško, 2010, s. 44).

Štátny pedagogický ústav (ŠPÚ) uvádza v iŠVP (2015, s. 2), pre predmet matematika, definíciu matematickej kompetencie, ktorú stanovil Európsky parlament, ako schopnosť rozvíjať a aplikovať matematické myslenie pre riešenie rôznych problémových situácií v každodennom živote. Existuje viacero náhľadov pre rozdelenie matematických kompetencií. Štruktúra kompetenčného modelu, ktorú v príspevku predstavujeme, bola zostavená na základe štúdia viacerých výskumov a neskôr aplikovaná do výchovno-vzdelávacieho procesu hodín matematiky. Lukáč a Sekerák (2001, s. 61) vymedzili dvanásť kategórií schopností, ktoré by mal žiak počas štúdia matematiky na gymnáziu nadobudnúť, a to: matematické myslenie a usudzovanie, pojmy, fakty, tvrdenia a postupy v matematike, využitie symbolických, formálnych a technických vyjadrení a operácií, znázornenie a popísanie matematických objektov a situácií, položenie otázky, na základe ktorej nasleduje vymedzenie problému a jeho riešenie, matematické modelovanie, matematická argumentácia a dokazovanie, používanie pomôcok, komunikácia, práca s informáciami, kompetencie týkajúce sa postojov a hodnotového systému, personálne a interpersonálne kompetencie.

Zostavenie rubrík

Aktivizujúce metódy vyučovania matematiky využívajú zadávanie otvorených matematických problémov. Očakávaným výstupom riešenia otvorených matematických problémov by pre učiteľa nemal byť len fakt, že žiaci dokážu problémy vyriešiť. Pri riešení otvorených úloh a problémov nie je automaticky jasný postup riešenia resp. nacvičený algoritmus, ale žiak by mal k riešeniu pristupovať tvorivo. Preto je dôležité pozorovať a analyzovať, ktorým smerom sa matematické myslenie pri riešení otvorených matematických problémov u žiakov rozvíja. Pri hodnotení žiackych riešení tak nie je najdôležitejšia iba správnosť výsledku. Rovnaký podiel na posúdení úspešného či vyhovujúceho riešenia má i cesta, ktorou sa žiaci v riešení uberali. V slovne opísanom postupe riešenia je možné sledovať, aké matematické nástroje žiaci využívajú.

Vhodným prostriedkom na posúdenie úrovne vedomostí žiaka a hodnotenie prejavených matematických kompetencií v riešení otvoreného matematického problému je tzv. rubrika, ktorá má formu hodnotiacej tabuľky. Pojem rubrika na hodnotenie je relatívne novým pojmom v teórií vyučovania matematiky. Brookhart (2013) definuje rubriku ako ucelený súbor kritérií na prácu študentov, na základe ktorých popisuje jednotlivé stupne matematických kompetencií žiakov. V rámci Slovenskej republiky je systém rubrík opísaný v dizertačnej práci *Meranie kvality matematického vzdelávania – rubriky na meranie kvality formatívneho hodnotenia* (Hubeňáková, 2016, s. 25 - 26). Spôsob zostavenia rubrík sa v stĺpcoch odvíja od úrovne zvládnutia hodnoteného atribútu a v riadkoch sú sledované už konkrétne hodnotené atribúty, v tomto prípade matematické kompetencie.

V Tabuľke 1 je uvedená rubrika úrovní matematických kompetencií, ktoré sú priradené k príslušnej úrovni van Hieleho schémy.

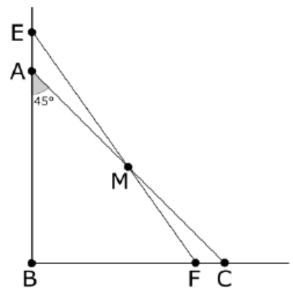
***Tabuľka 1**: Rubrika úrovní matematických kompetencií*

Van Hieleho schéma	KOMPETENCIE	st.
VIZUALIZÁCIA	používanie pomôcok práca s informáciami	1
ANALÝZA	matematické pojmy, fakty, tvrdenia a postupy použitie symbolického, formálneho a technického vyjadrovania a operácií	2
ABSTRAKCIA	znázorňovanie a popisovanie matematických objektov a situácií, prezentácia matematické myslenie a usudzovanie	3
DEDUKCIA	matematická argumentácia, dôkaz položenie otázky, vymedzenie problému a jeho riešenia	4
AXIOMATIZÁCIA	matematické modelovanie	5

Súťaž Matematický B-deň a otvorené problémy z matematiky pre žiakov gymnázia

Od roku 2011 sa na Slovensku koná každoročne tímová súťaž v riešení otvorených matematických problémov Matematický B-deň. V spolupráci s Freudenthalovým inštitútom predstavuje súťaž Matematický B-deň formu začleňovania objavného vyučovania matematiky do povedomia. Súťažný tím sa skladá z troch alebo štyroch žiakov. Hlavnou myšlienkou súťaže je riešenie otvoreného matematického problému, preukázanie matematického myslenia v tzv. matematickom skúmaní, samozrejme, na úrovni vedomostí z matematiky, ktoré sú požadované na gymnáziu. Riešenia musia jednotlivé tímy spísať jasne a zrozumiteľne pre každého čitateľa (PRIMAS, 2012). Ukážka je zo zadania, ktoré bolo použité v súťaži Matematický B-deň 2015. V rámci Slovenskej republiky sa do minuloročného kola súťaže zapojilo 138 žiakov z 13 gymnázií v Nitre, Banskej Bystrici, Sučanoch, Bratislave, Košiciach, Žiline, Poprade a Michalovciach.

Úloha: Daný je rovnoramenný trojuholník *ABC*; bod *M* je stred strany *AC*. Bod F leží medzi vrcholmi *B* a *C* trojuholníka *ABC* vo vnútri strany *BC*. Priamka *FM* pretína priamku, na ktorej leží strana *AB* v bode *E* (Obrázok 1). Dokážte, že úsečka *EF* je dlhšia ako úsečka (strana trojuholníka) *AC*. (Matematický B-deň, 2015).



***Obrázok 1**: Zadanie úlohy„Trojuholníková geometria“*

Pre hodnotenie riešení úloh a problémov, ktoré žiaci v súťaži Matematický B-deň vytvoria, je možné zostaviť konkrétnu rubriku na posúdenia a analýzu úrovne vedomostí z geometrie a geometrického myslenia. Opisy jednotlivých úrovní boli vybrané z iŠVP, Požiadavky na vedomosti a zručnosti žiaka gymnázia. Opisy zodpovedajú príslušnej téme vo vyučovaní geometrie. Úrovne rešpektujú kompetencie podľa Tabuľky 1.

***Tabuľka 2**: Rubrika úrovní prejavených vedomostí žiakov*

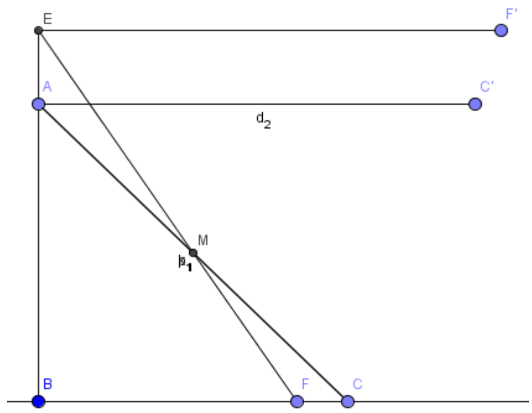
	TROJUHOLNÍKOVÁ GEOMETRIA (ZADANIE 1)	st.
VIZUALIZÁCIA	Žiaci pracovali s náčrtom. Žiaci vedeli pomenovať základné útvary.	1
ANALÝZA	Žiaci vymenovali vlastnosti pravouhlého trojuholníka. Žiaci vedeli uviesť znenie Pytagorovej vety a goniometrické vzťahy v pravouhlom trojuholníku. Žiaci vedeli určiť, či sú dva trojuholníky zhodné alebo podobné.	2
ABSTRAKCIA	Žiaci použili vlastnosti zhodnosti a podobnosti vo výpočtoch a pri odvodzovaní ďalších vzťahov. Žiaci používali geometriu pravouhlého trojuholníka na výpočet veľkosti uhlov a dĺžky strán. Žiaci vysvetlili dôkaz na základe neformálnej argumentácie.	3
DEDUKCIA	Žiaci využili znalosti aj z iných oblastí matematiky Žiaci vedeli dokázať pravdivosť s príslušnou matematickou argumentáciou. Žiaci aplikovali základný druh dôkazu.	4
AXIOMATIZÁCIA	Žiaci uviedli matematický dôkaz založený na základe vytvorených predpokladov. Žiaci vyhodnocovali matematické závery, na základe ich predošlého skúmania.	5

Na základe takto zostavených rubrík môžeme nahliadnuť, na akej úrovni boli prejavené kompetencie v geometrickom myslení v riešení otvoreného problému, a zároveň porovnať vedomosti žiakov s požiadavkami, ktoré definuje iŠVP.

Ukážka využitia rubrík pri hodnotení žiackych riešení úlohy

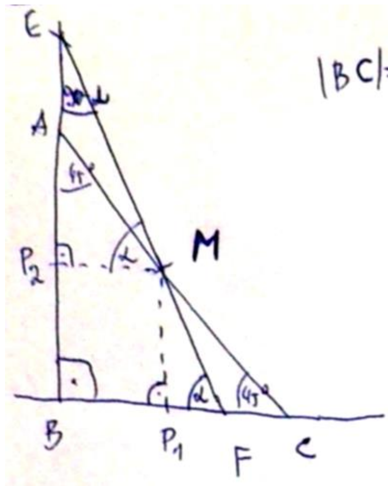
Schopnosť dokázať matematické tvrdenie v sebe zahŕňa matematické kompetencie, ktoré dokazujú vyššiu úroveň matematického myslenia. Zadanie zo súťaže Matematický B-deň2015 (Úloha viď. vyššie) má požiadavku vytvoriť geometrický dôkaz. Žiaci vo svojich riešeniach využili rôzne postupy, z ktorých boli pre porovnanie vybrané odlišné riešenia.

Riešenie *A* žiaci opísali nasledujúcou logickou úvahou: *„Nakreslíme si obrázok podľa zadania. Cieľom úlohy je dokázať, že úsečka EF je dlhšia, než úsečka AC. Jeden zo spôsobov, akým by sa dala úloha riešiť, je otáčať bod F okolo bodu E a bod C okolo A, a to do takej pozície, aby boli obe úsečky vodorovne. Z toho vidíme, ktorá úsečka je dlhšia, a to EF."* Pre grafické znázornenie riešenia (Obrázok 2) žiaci využili program Geogebra.



***Obrázok 2**: Riešenie A úlohy„Trojuholníková geometria"*

Riešitelia *B* (Obrázok 3) riešili úlohu pomocou symbolického zápisu, matematickou argumentáciou a využitím znalostí o trigonometrii, goniometrických funkcií pravouhlého trojuholníka a Pytagorovej vety.



***Obrázok 3**: Riešenie B úlohy „Trojuholníková geometria"*

Bod *M* je stredom prepony trojuholníka *ABC*, čo ponúklo žiakom možnosť ďalej uvažovať o stredných priečkach MP_2 a MP_1. Trojuholník *ABC* je rovnoramenný, a tak platí:

$$M \equiv A \div C \implies BP_1 = P_1C = BP_2 = P_2A = \frac{a}{2}.$$

Ďalej uvažovali dva pravouhlé trojuholníky P_2ME a P_1FM. Trojuholníky majú zhodný uhol α, pretože uhly $\sphericalangle P_2ME$ a $\sphericalangle P_1FM$ sú súhlasné. Dĺžku úsečky *FE* vyjadrili ako súčet dĺžok prepôn trojuholníkov P_2ME a P_1FM, a tie vyjadrili na základe sínusu a kosínusu uhla α v pravouhlom trojuholníku nasledovne:

$$|FE| = |MF| + |ME| = \frac{a}{2} \times \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

Takto odvodenú dĺžku úsečky postavili väčšiu ako dĺžku prepony trojuholníka *ABC*, vyjadrenú vo všeobecnom tvare pomocou Pytagorovej vety. Po porovnaní vyjadrených dĺžok úsečiek uviedli na záver diskusiu o riešení v intervale, ktorý je pre správne riešenie úlohy vyhovujúci.

Diskusia

Porovnaním uvedených riešení so zostavenými rubrikami môžeme pozorovať prejavené kompetencie žiakov pri dokazovaní geometrického problému, ako aj identifikovať, či poznatky zodpovedajú iŠVP pre vyučovanie matematiky na gymnáziách.

Tím študentov pri riešení *A* zvolil konštruktívny typ dôkazu s využitím rotácie úsečky okolo bodu. Jedná sa o nápaditý a jednoduchý spôsob, ako ukázať správnosť tvrdenia. Avšak v ich postupe riešenia nie je zjavná schopnosť matematickej argumentácie. Inými slovami, aj napriek preukázaniu schopnosti vnímať súvislosti medzi matematickými objektmi a ich vlastnosťami, využili pri svojom opise riešenia neformálnu argumentáciu. Napríklad namiesto vyjadrenia *„úsečky sú vodorovne“* bolo potrebné aby použili formuláciu *„úsečka je rovnobežná s ramenom trojuholníka“*. Možno teda určiť, že na základe prejavených kompetencií v riešení zadania, žiaci tímu *A* dosahujú tretiu úroveň chápania geometrie. Dôkaz zadania v riešení *B* je matematická argumentácia postavená na odvolávaní sa na platné matematické vety a vlastnosti objektov, s ktorými žiaci pracovali. Na riešení je zrejmé, že žiaci sú si vedomí potreby matematického myslenia a usudzovania a vzájomnej prepojenosti vzťahov a vlastností objektov. V tomto prípade žiaci prejavili kompetencie rozvinuté na úrovni dedukcie, úroveň štyri.

Vzhľadom na opis kompetencií podľa Tabuľky 2, je na citovaných a analyzovaných žiackych riešeniach *A* a *B* vybranej úlohy, možné pozorovať rôzne stupne uplatňovania vedomostí získaných na hodinách matematiky.

Je potrebné podotknúť, že matematické kompetencie neboli v riešeniach *A* a *B*, sledované u jednotlivca, ale v rámci žiackych tímov. Pre komplexnejšie zhodnotenie skupinovej spolupráce pri riešení problému by bolo potrebné sledovať aj vzájomnú interakciu a komunikáciu medzi členmi tímu.

Záver

Význam sledovania a analýzy riešiteľského postupu žiakov pri riešení otvoreného matematického problému v geometrii je výzvou pre každého hodnotiteľa. Pre učiteľa, ktorý je zvyčajne primárnym hodnotiteľom žiakovho výkonu v matematike, je podstatné vedieť, na akej úrovni majú žiaci rozvinuté vedomosti a zručnosti.

Schopnosť dokázať matematické tvrdenie je ukazovateľom vyššej úrovne matematického myslenia. Sledovanie jednotlivých krokov v riešeniach žiakov vie učiteľovi dopomôcť k určeniu nedostatkov a medzier vo vedomostiach. Tabuľka 1 a Tabuľka 2 sú originálne nástroje vytvorené pre hodnotenie a analýzu žiackych riešení a predstavujú pilotný pokus v uvedenej problematike.

Pre učiteľov v praxi teda môžu uvedené rubriky pomôcť k sledovaniu vývoja matematických kompetencií žiakov. Na základe iŠVP a rešpektovaním zoradených matematických kompetencií je možné zostaviť podobné rubriky aj pre iné tematické celky, či špeciálne otvorené matematické problémy.

Literatúra

Brookhart, S. M. (2003). *How to Create and Use Rubrics for Formative Assessment and Grading*. Bauergard St.: ASCD. ISBN 978-1-4166-1507-1. Dostupné na internete: http://www.ascd.org/publications/books/112001/chapters/What-Are-Rubrics-and-Why-Are-They-Important%C2%A2.aspx

Blaško, M. (2010). *Úvod do modernej didaktiky I. (Systém tvorivo-humanistickej výučby)*. Košice: Katedra inžinierskej pedagogiky Technickej univerzity. ISBN 978-80-553-0462-5.

Hubeňáková, I. (2016) *Meranie kvality matematického vzdelávania – rubriky na meranie kvality formatívneho hodnotenia* [Dizertačná práca]. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa.

Lukáč, S., Sekerák, J. (2001). *Interaktívne vzdelávacie aktivity stimulujúce rozvíjanie kľúčových kompetencií* [in] Matematika Informatika Fyzika: didaktický časopis učiteľov matematiky, informatiky, fyziky. 36 (XIX), Prešov: Metodicko – Pedagogické centrum. Dostupné na internete: http://www.mcpo.sk/downloads/Publikacie/MIF/MIF36.pdf

Matematický B-deň (2015). Primas for Constantine The Philosopher University in Nitra. Dostupné na internete: www.primas.ukf.sk/download/bday/Mathematics%20B-day_2015_EN_for_SK.pdf

Mathematics Teacher Preparation in Calfornia (1992). Standards of Quality and Effectiveness for Subject Matter Programs. *Handbook for Teacher Educators and Program Reviewers*. California: Commission on Teacher Credentialing. Dostupné na internete: http://www.ncte.org/library/NCTEFiles/Groups/CEE/NCATE/HandbookReviewers_712.pdf

PRIMAS (2012) *Matematický B-day*. Primas for Constatine The Philosopher University in Nitra. Dostupné na internete: http://www.primas.ukf.sk/bday.html

Štátny pedagogický ústav (2015): *Inovovaný Štátny vzdelávací program* (Matematika – gymnázium so štvorročným a päťročným vzdelávacím programom. Bratislava: ŠPÚ. Dostupné na internete: www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_g_4_5_r.pdf

Usiskin, Z. (1982) *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*, Chicago, University of Chicago.