Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 2, p. 19 – 27
ISSN 2453-6083

Riešenie úloh spojitého úrokovania pomocou softvéru GeoGebra

Solving the Tasks of Continuous Compound Interest by Using Software GeoGebra

Janka Drábeková [a] – Martina Grófová

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Economics and Management, Slovak University of Agriculture in Nitra, Tr. A. Hlinku 2, SK-949 76 Nitra,*

Received 29 September 2016; received in revised form 13 October 2016; accepted 14 October 2016

Abstract

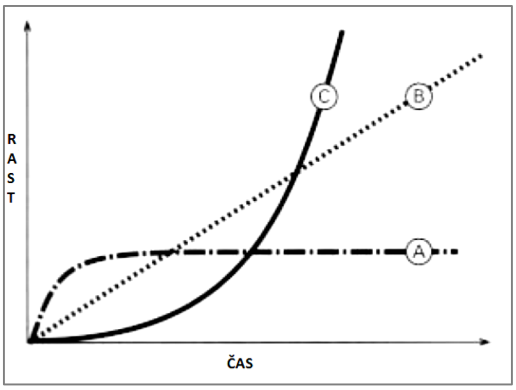
We can use exponential function to model a wide variety of real-world phenomena. The curve represents exponential growth, it grows very slowly in the beginning, then accelerates continually faster and finally grows in an almost vertical fashion. In the physical realm, this growth pattern usually occurs where there is sickness, often leading to death. In the economic systems, this exponential growth has wide application. Thinking in dimensions exponential models is absolutely necessary in today's economic world. The paper deals with the solution of selected economic problems - growth of money at continuous compound interest. We created the interactive figures by software GeoGebra. We pointed out the undisputed connection between mathematics and economics. The students of the Slovak University of Agriculture in Nitra can benefit from such teaching materials in the Learning Management System Moodle.

Keywords: exponential growth, continuous compound interest, economic applications, GeoGebra.

Classification: I10, R20, U70

Úvod

Podľa Kennedy (2006) rozoznávame tri druhy rastu (obrázok 1). Krivka A predstavuje vzor fyzického rastu v prírode. Podľa nej rastie naše telo, rastliny, zvieratá. V prvej časti je rast veľmi rýchly, neskôr sa spomaľuje, až napokon v určitej optimálnej veľkosti fyzikálny rast zastane.



Obrázok 1

*Corresponding author; email: janka.drabekova@uniag.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.2.19-27

Krivka B reprezentuje lineárny rast. Napr. viac strojov vyprodukuje viac tovaru, viac uhlia vyprodukuje viac energie atď. Systémy riadiace sa lineárnym vývojom sú relatívne jednoduché a predvídateľné. Krivka C znázorňuje exponenciálny rast. Tento rast by mohol byť opísaný ako presný opak krivky A. Na začiatku, systém rastie veľmi pomaly, ale neskôr sa rast stáva rýchlejším a nakoniec ide takmer kolmo hore. Pri živých organizmoch takáto forma rastu nastane zvyčajne v prípade choroby alebo smrti. V ekonomickej sfére má však takýto exponenciálny vývoj široké uplatnenie a uvažovanie v dimenziách exponenciálnych modelov je pre dnešný svet nevyhnutné. Prostredníctvom exponenciálnych modelov, vieme určiť ekonomické ukazovatele ako je inflácia, vývoj cien, rast dlhu, či naopak spotrebu dôležitých surovín (Kučák, 2012).

Exponenciálny rast

Exponenciálny rast patrí medzi základné exponenciálne modely. Ak absolútna miera rastu $Q'(t)$ je priamo úmerná funkčnej hodnote danej funkcie $Q(t)$ s kladnou konštantou úmernosti k, pričom $Q(0)=Q_0$, tak môžeme písať (Grinčová, 2012):

$$\frac{dQ}{dt}=k\,Q\,.$$

Riešením takejto diferenciálnej rovnice so začiatočnou podmienkou, dostaneme pomocou separácie premenných, rovnicu funkcie exponenciálneho rastu:

$$Q(t)=Q_0\cdot e^{kt},\ k>0, Q_0>0, \text{ kde}$$

Q_0 - je začiatočná hodnota kapitálu,

$Q(t)$ - je budúca hodnota kapitálu,

t - je dĺžka úrokového obdobia,

k - je ročná úroková sadzba.

Jedna z najdôležitejších vlastností exponenciálneho rastu je, že aj keď sa „začína pomaly“, s postupom času sa jeho rýchlosť zvyšuje až šokujúcim spôsobom. Exponenciálny rast je teda veľmi silný nástroj (Kennedy, 2006). Neustály rast si vyžaduje aj súčasný ekonomicko-hospodársky systém. Jedná sa o exponenciálny rast obyvateľstva, exponenciálny rast monetárnej bázy, či požiadavky na niekoľkopercentný hospodársky rast ročne. Tieto javy sú však z dlhodobého hľadiska neudržateľné, pretože trendy, ktoré sa vyvíjajú exponenciálne, sú nestabilné (Smith, 2010).

Spojité úrokovanie

Exponenciálne modely, ako sme už vyššie spomínali, majú široké uplatnenie v ekonomickej praxi. My sme sa v článku zamerali na využitie exponenciálneho rastu pri spojitom úrokovaní.

Proces úročenia, pri ktorom sa úrokovanie uskutočňuje v časových intervaloch blížiacich sa k nule, t.j. počet konverzií v roku rastie do nekonečna ($n\to\infty$), sa nazýva spojité úrokovanie (Molnárová, 2012; Pirč, Grinčová, 2008). Výslednú hodnotu investovaného kapitálu vypočítame:

$$Q(t)=\lim_{n\to\infty}\left[Q_0\cdot\left(1+\frac{k}{n}\right)^{nt}\right]=Q_0\cdot e^{kt}, \text{ kde}$$

Q_0 - je začiatočná hodnota kapitálu,

$Q(t)$ - je budúca hodnota kapitálu,

t - je dĺžka úrokového obdobia,
k - je ročná úroková sadzba,
n - je počet úrokových periód (konverzií) za rok,
$\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n$ - je úročiteľ (za jeden rok).

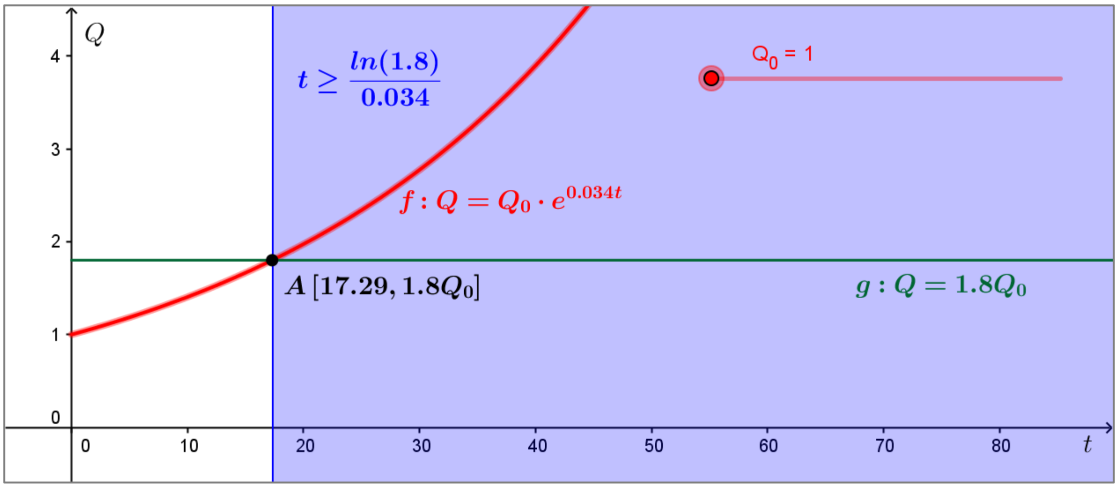
Na základe tohto modelu vieme určiť budúcu hodnotu investovaného kapitálu či najvýhodnejší úrok. Poznanie týchto matematických vzťahov je v dnešnej dobe veľmi žiaduce. Pomocou nich sa vieme zorientovať vo veľmi širokej ponuke bánk.

Vybrané aplikácie riešené pomocou softvéru GeoGebra

V tejto časti uvedieme niekoľko príkladov, pri riešení ktorých sme využili softvér GeoGebra. Ide o ekonomické aplikácie exponenciálneho rastu, ktoré nám umožnia spojiť matematickú analýzu a ekonómiu pomocou riešenia jednoduchých problémov spojitého úrokovania. V príkladoch neuvažujeme o zdanení úrokov. Pri tvorbe úloh sme sa inšpirovali literatúrou od autorov Barnet et al. (2008), Grinčová (2012), Molnárová (2012), Pirč & Grinčová (2008).

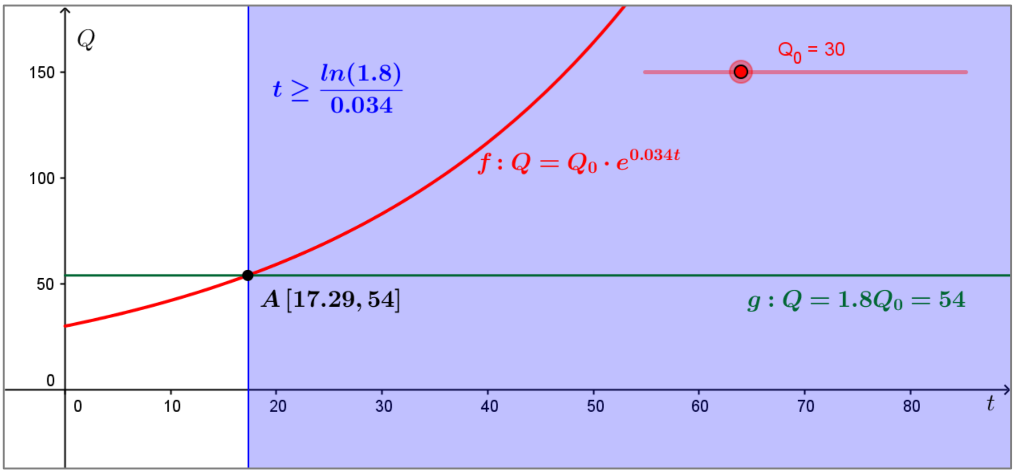
Príklad 1

Sporiteľ sa rozhodol vložiť sumu Q_0 do banky, ktorá poskytuje pri spojitom úrokovaní nominálnu úrokovú mieru 3,4% p.a. Zistime, za aký čas sporiteľovi vzrastie táto suma aspoň 1,8-krát.
Riešenie: Matematicky vyjadríme sumu, hodnotu budúceho kapitálu, ktorá je aspoň 1,8-krát väčšia ako vklad: $Q \geq 1{,}8 \cdot Q_0$. Do vytvorenej nerovnice dosadíme funkciu exponenciálneho rastu $Q = Q_0 \cdot e^{0{,}034t}$ a vyjadríme premennú t: $Q_0 \cdot e^{0{,}034t} \geq 1{,}8 \cdot Q_0 \Rightarrow t \geq \dfrac{\ln 1{,}8}{0{,}0034}$ (Obrázok 2)



Obrázok 2

Pri hľadaní riešenia pomocou softvéru GeoGebra, keďže nepoznáme Q ani Q_0, využijeme nástroj „posuvník". Vytvoríme v nákresni objekt, pomocou ktorého môžeme meniť hodnoty čísla, v našom prípade hodnoty Q_0. Na obrázku 2 je riešenie úlohy ak $Q_0 = 1$. Zo súradníc bodu $A \in f \cap g$ vieme vysloviť záver. Sporiteľovi vzrastie vložená suma aspoň 1,8-krát o 17 a pol roka. Ak by sme vytvorený materiál uložili ako interaktívnu prezentáciu, študenti pomocou posuvníka môžu sledovať ako sa mení obrázok pri zmenách hodnôt Q_0. Napríklad na obrázku 3 je riešenie úlohy ak $Q_0 = 30$.



Obrázok 3

Príklad 2

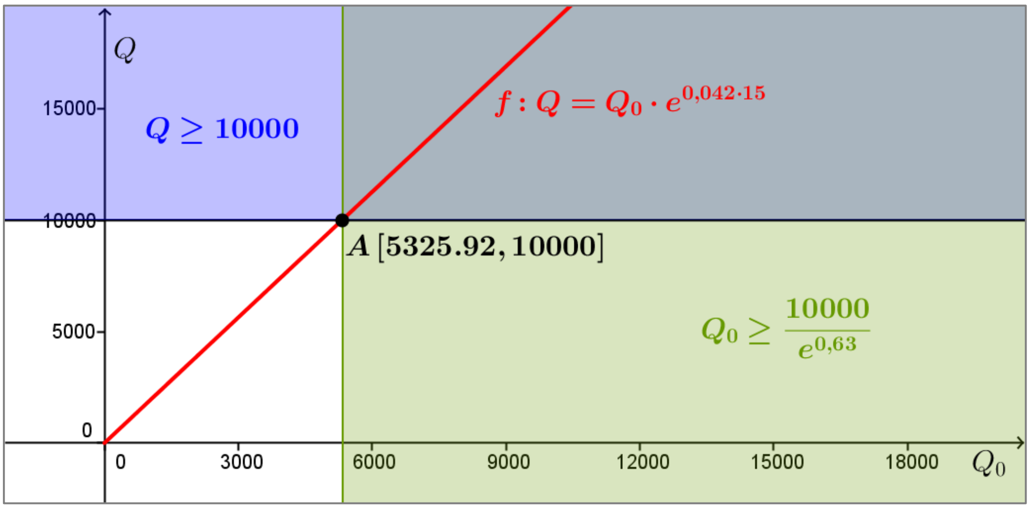
A) Akú sumu peňazí musí vložiť sporiteľ do banky, ak chce mať o 15 rokov na danom účte minimálne 10 000€ ?

B) Vyjadrite vzťah medzi vkladanou hodnotou kapitálu a dĺžkou úrokového obdobia pri očakávanej hodnote budúceho kapitálu 10 000€.

Vklad bude dlhodobo spojito úrokovaný nominálnou úrokovou mierou 4,2% p.a.

Riešenie:

A) Do funkcie exponenciálneho rastu dosadíme údaje zo zadania úlohy a dostaneme funkciu vyjadrujúcu vzťah medzi pôvodnou hodnotou vkladu a budúcou hodnotou vloženého kapitálu po 15 rokoch: $Q = Q_0 \cdot e^{0,042 \cdot 15}$. Keďže na účte chceme mať minimálne 10 0000€, počítame nerovnicu: $Q \geq 10\,000 \Rightarrow Q_0 \cdot e^{0,042 \cdot 15} \geq 10\,000 \Rightarrow Q_0 \geq \frac{10\,000}{e^{0,63}}$.

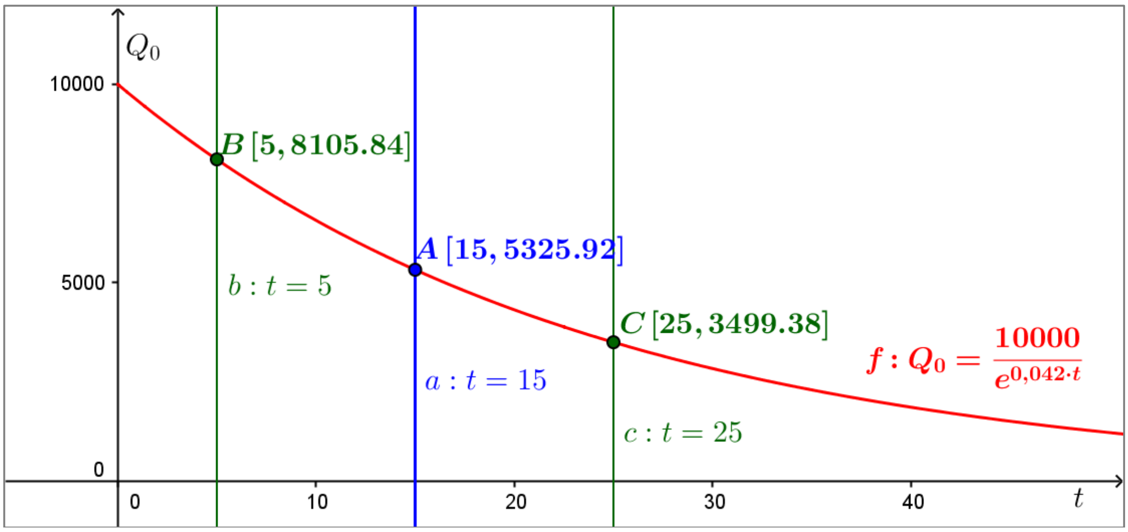


Obrázok 4

Pri grafickom riešení úlohy (Obrázok 4) vidíme, že aj keď sme na vyjadrenie funkcie reprezentujúcej vzťah medzi pôvodnou hodnotou vkladu a budúcou hodnotou vloženého kapitálu využili exponenciálny model rastu, tento vzťah pri danej úrokovej sadzbe aj danej dĺžke úrokového obdobia nemá exponenciálny charakter. Grafom takejto funkcie pri daných vstupných údajoch je priamka. Ak chceme nájsť riešenie, zobrazíme v GeoGebre graf funkcie

$Q = Q_0 \cdot e^{0,042 \cdot 15}$ a riešenie nerovníc $Q \geq 10\ 000$, $Q_0 \geq \frac{10\ 000}{e^{0,63}}$. Výsledok príkladu odčítame zo súradníc bodu A. Ak chce mať sporiteľ o 15 rokov na danom účte minimálne 10 000€, musí vložiť do banky minimálne 5 326€.

B) Aby sme vyjadrili vzťah medzi vkladanou hodnotou kapitálu a dĺžkou úrokového obdobia, do funkcie exponenciálneho rastu $Q = Q_0 \cdot e^{0,042 \cdot t}$ dosadíme hodnotu budúceho kapitálu $Q = 10000$ € a vyjadríme Q_0: $Q_0 = \frac{10000}{e^{0,042 \cdot t}}$ (obrázok 5).



Obrázok 5

Z grafickej interpretácie (Obrázok 5) vidíme, že vzťah medzi vkladanou hodnotou kapitálu a dĺžkou úrokového obdobia má exponenciálny charakter. Funkcia je klesajúca. Výslednú sumu 10 000€ získame za nižšiu vkladanú sumu pri dlhšej dobe úrokovania. Napríklad pri 5 rokoch úrokovania musíme vložiť na daný účet 8106€ ale pri 25 rokoch úrokovania nám stačí vložiť sumu 3500€ (obrázok 5).

Príklad 3

Akú sumu peňazí musí vložiť sporiteľ do banky, ak chce mať o 220 dní zisk 60€?

A) Vklad bude spojito úrokovaný s nominálnou úrokovou mierou 2,5%.

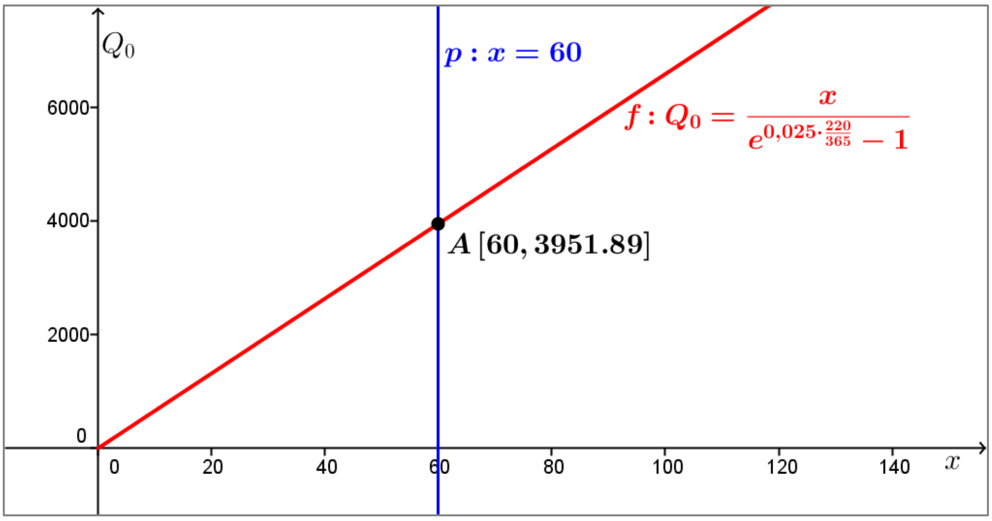
B) Sporiteľ bude musieť vložiť vyššiu alebo nižšiu sumu, ak vzhľadom na obdobie úrokovania kratšie ako jeden rok, banka využíva na výpočet exaktnú metódu jednoduchého úrokovania s ročnou úrokovou mierou 2,5%?

Riešenie:

A) Keďže vklad bude spojito úrokovaný, využijeme model exponenciálneho rastu podobne ako v príkladoch uvedených vyššie. Vyjadrime vzťah medzi ziskom x a vloženou sumou Q_0:

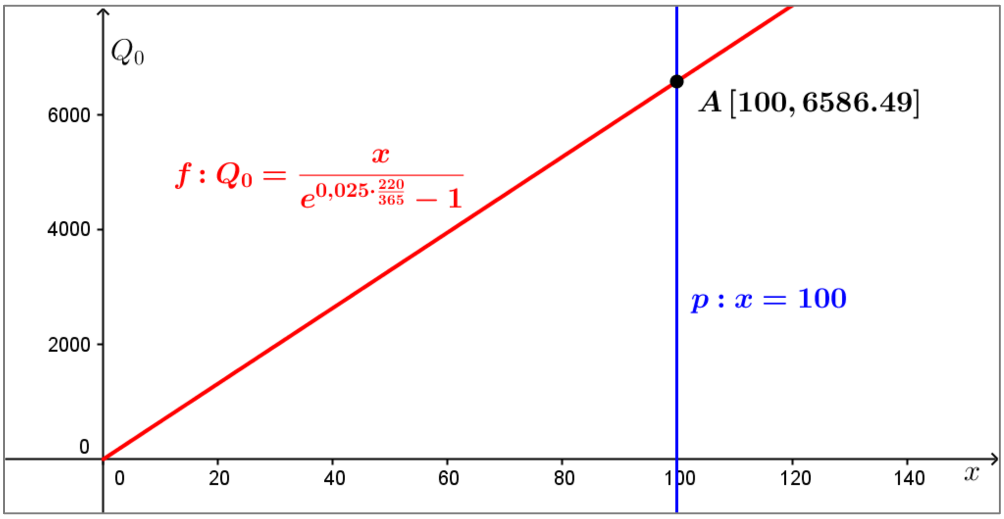
$$Q = Q_0 + x \Rightarrow Q_0 + x = Q_0 \cdot e^{0,025 \cdot \frac{220}{365}} \Rightarrow Q_0 \doteq \frac{x}{e^{0,015} - 1} \quad \text{(Obrázok 6)}$$

Riešenie pomocou softvéru GeoGebra môžeme získať napríklad ako prienik grafu funkcie $f : Q_0 = \frac{x}{-1 + e^{0,025 \cdot \frac{220}{365}}}$ a priamky $p : x = 60$. Vidíme, že vzťah medzi ziskom a vloženou sumou nemá exponenciálny charakter, ale ide o priamu úmernosť, ktorú graficky charakterizuje priamka. Zo súradníc bodu $A \in f \cap p$ vieme vysloviť záver. Ak chce mať sporiteľ o 220 dní zisk 60€, musí na účet, ktorý je spojito úrokovaný s nominálnou úrokovou mierou 2,5% vložiť 3952€.



Obrázok 6

Ak by sme vytvorený materiál uložili ako interaktívnu prezentáciu, študenti môžu „pomocou uchopenia a pohybu priamky“ $p : x = 60$ sledovať, ako sa mení veľkosť vkladu pri zmenách očakávaného zisku pri nezmenenej dobe úročenia (220 dní). Napríklad na obrázku 7 je riešenie úlohy, ak $p : x = 100$.

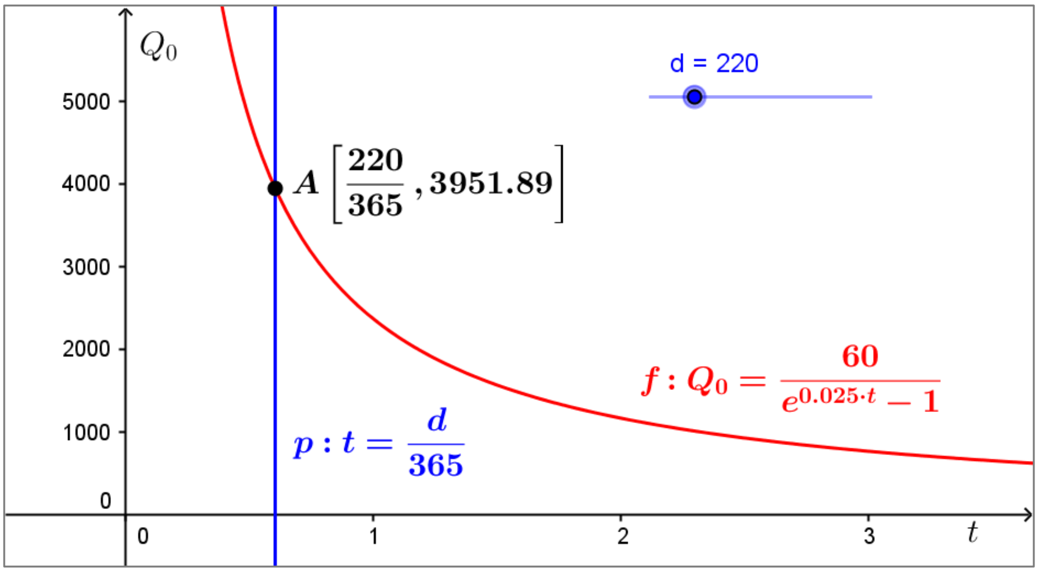


Obrázok 7

Riešenie môžeme získať aj nasledovným spôsobom. Vyjadrime vzťah medzi vloženou sumou Q_0 a dĺžkou úročeného obdobia t pre zisk 60€:

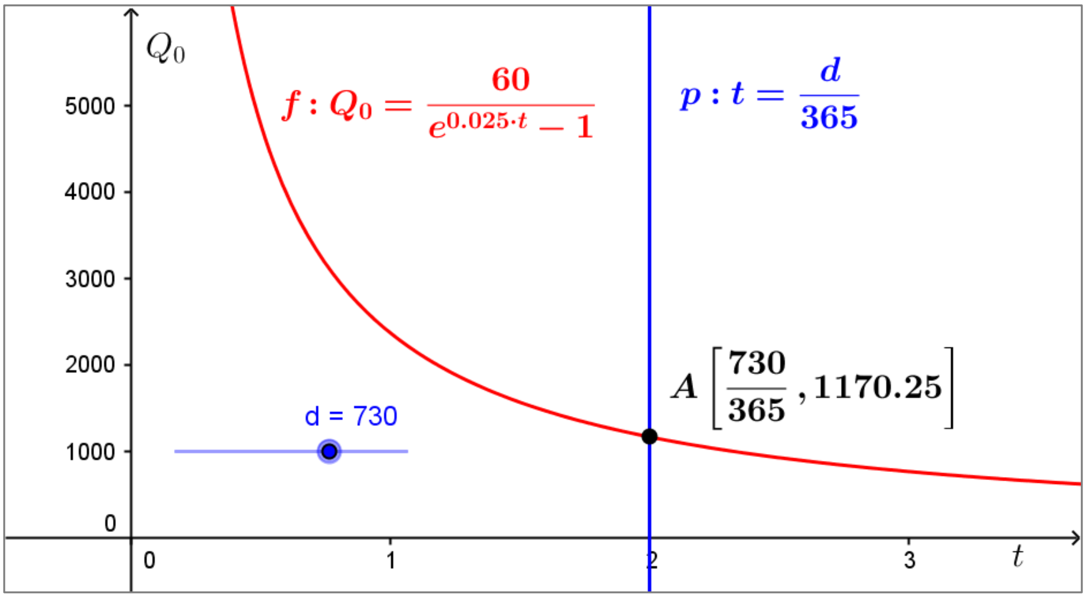
$$Q = Q_0 + 60 \Rightarrow Q_0 + 60 = Q_0 \cdot e^{0,025 \cdot t} \Rightarrow Q_0 = \frac{60}{e^{0,025t} - 1} \text{ (Obrázok 8)}$$

Zobrazíme graf funkcie $f : Q_0 = \frac{60}{e^{0,025t} - 1}$. Táto funkcia má exponenciálny charakter a je klesajúca, pretože čím je kratšia doba úrokovania, tým musí byť vklad vyšší. Keďže premennú t chceme sledovať v počtoch dní a nie v rokoch, použijeme nástroj posuvník, napríklad v rozsahu 0 až 1095, teda rozsah počtu dní troch rokov. Riešenie nájdeme ako prienik grafu funkcie f a priamky $p : t = \frac{d}{365}$. Zo súradníc bodu $A \in f \cap p$ vieme vysloviť záver.



Obrázok 8

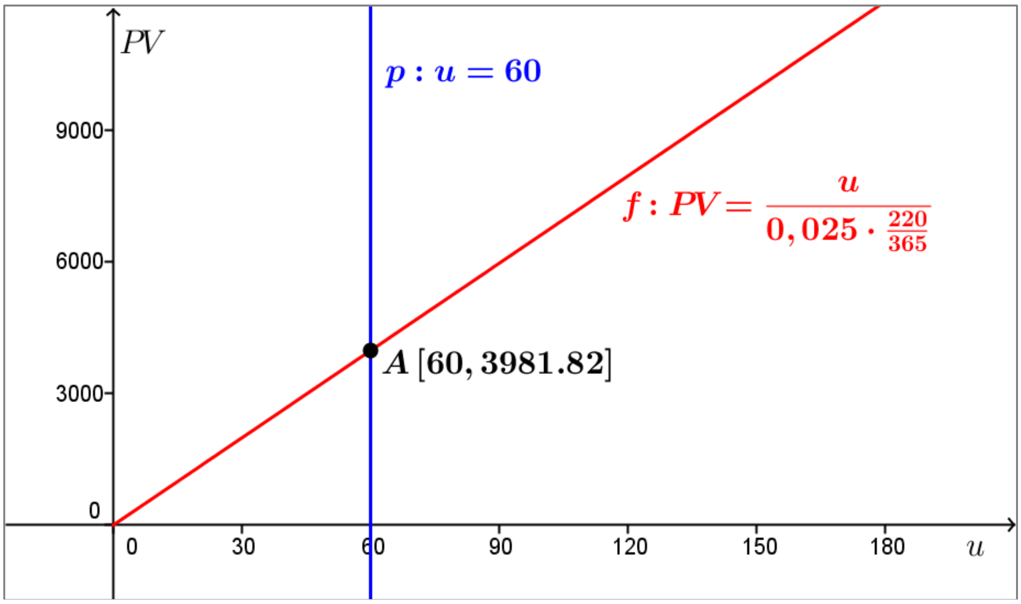
Pohybom posuvníka môžeme pri interaktívnej forme sledovať ako sa mení vklad pri rôznych dobách úročenia pri rovnakom zisku 60€. Napríklad na obrázku 9 je riešenie úlohy ak $d = 730$.



Obrázok 9

B) V prípade jednoduchého úrokovania vkladu využijeme vzťah: $PV = \frac{u}{i \cdot t}$, kde PV - je začiatočná hodnota vkladu, u - je úrok, i - je úroková sadzba, t - je dĺžka úrokového obdobia. Vyjadrime vzťah medzi začiatočnou hodnotou vkladu PV a úrokom u:

$$PV = \frac{u}{0{,}025 \cdot \frac{220}{365}} = \frac{730 \cdot u}{11} \quad \text{(Obrázok 10)}$$

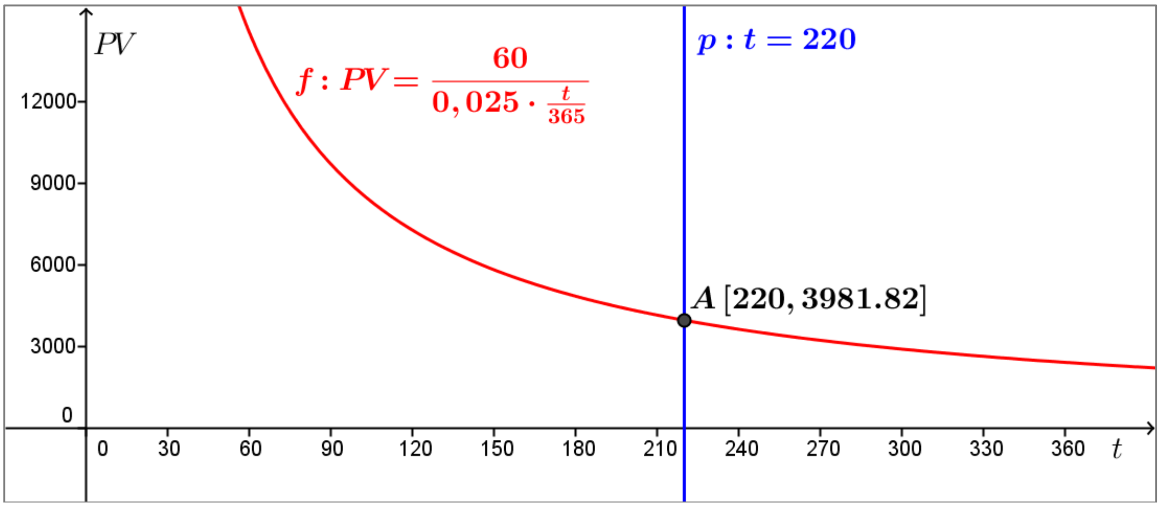


Obrázok 10

„Uchopením a pohybom priamky“ p, môžeme pri interaktívnej forme obrázka 9, sledovať zmenu vkladu pre rôzne úroky pri konštantnej dobe úrokovania (220 dní).

Riešenie môžeme získať aj nasledovným spôsobom. Vyjadrime vzťah medzi začiatočnou hodnotou vkladu PV a počtom dní úrokovania vkladu t:

$$PV = \frac{60}{0{,}025 \cdot \frac{t}{365}} = \frac{876000}{t}$$, kde t - je počet dní (Obrázok 11)



Obrázok 11

Opäť, môžeme pri interaktívnej forme obrázka 10 sledovať, pri konštantnom zisku 60€, zmenu vkladu pre rôzny počet dní úrokovania.

Z obrázkov 10,11 vyplýva, že sporiteľ musí vložiť do banky sumu 3982€ v prípade, že banka používa exaktnú metódu jednoduchého úrokovania pri dobe úrokovania kratšej ako jeden rok. Sporiteľ by teda musel vložiť do banky vyššiu sumu (o 30€) ako pri spojitom úrokovaní, kedy mu stačí vložiť 3952€.

Záver

Aplikácia modelu exponenciálneho rastu, v rámci spojitého úrokovania, je veľmi jednoduchá a efektívna pri ekonomickom rozhodovaní každého z nás. Na uvedených príkladoch sme zdôraznili nepopierateľnú väzbu medzi matematikou a ekonómiou. Obrazovo-názornú reprezentáciu skúmaných problémov sme dosiahli pomocou softvéru GeoGebra.

Vytvorili sme interaktívne konštrukcie, ktoré majú uplatnenie aj vo vyučovacom procese. Študenti Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre riešia podobné problémy v rámci svojich bakalárskych prác a interaktívne študijné materiály môžu využívať vo výučbovom prostredí LMS Moodle.

References

Barnet, A.R., Ziegler, R.M. and Byleen, E.K. (2008). College Algebra with Trigonometry. The McGraw-Hill Companies, New York, ISBN 978-0-07-331234-4.

Grinčová, A. (2012). Matematika II a jej využitie v ekonómii. 1.vydanie, Technická univerzita v Košiciach, 136s., ISBN 978-80-553-0851-7.

Kennedy, M. (2006). Why do We Need Monetary Innovation? (Online) Dostupné na internete: https://issuu.com/margritkennedy/docs/pre_moneypres/20?e=1133827/2662659 [26.09.2016]

Kučák, M. (2012). Inflačné činitele svetovej ekonomiky (… a opatrenia proti ich dopadom). 1.Vydanie, EDIS, Žilina, 113s., ISBN 978-80-554-0563-6.

Molnárová, M. (2012). Matematika I a jej využitie v ekonómii. 1.vydanie, Technická univerzita v Košiciach, 172s., ISBN 978-80-553-1168-5.

Pirč, V., Grinčová, A. (2008). Finančná matematika. 1.vydanie, Technická univerzita v Košiciach, 82s., ISBN 978-80-8073-986-7

Smith, L.C. (2010). The world in 2050: four forces shaping civilization's northern future. New York, Penguin Group, 322 pp., ISBN 978-0-525-95181-0