Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 2, p. 1 – 6
ISSN 2453-6083

O metóde zavedenia pomocného prvku

The Method of Implementation of Auxiliary Element

Peter Vrábel [*a]

Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,

Received 21 September 2016; received in revised form 7 October 2016; accepted 10 October 2016

Abstract

The mathematical technique *implementation of auxiliary element* is the frequently used method on problems solving and on an executing of various mathematical proofs. It is useful to establish besides given magnitudes suitable helpful mathematical objects. We can achieve to resolution of a problem by these objects. The applications of this technique are analysed in various mathematical branches in the submitted contribution. The effectiveness of the method in question is illustrated via solutions of several miscellaneous mathematical problems.

Keywords: mathematical technique, implementation of auxiliary element, mathematical problem

Classification: 00A35; 97C50; 97D50

Úvod

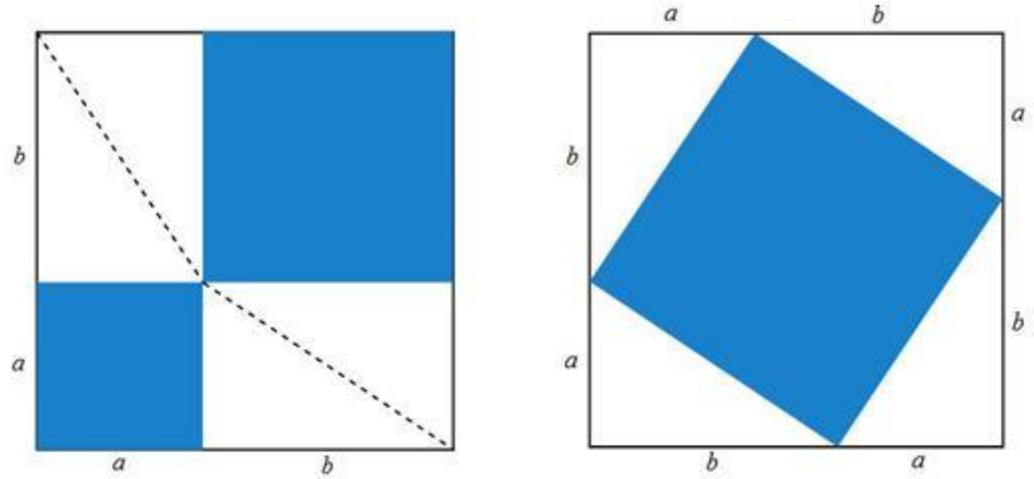
Skúsený riešiteľ matematických problémov pracuje obyčajne v niekoľkých rôznych úrovniach, ktoré sú určené použitím matematických metód s rôznou šírkou aplikácie. Takto matematické metódy môžeme rozdeliť podľa ich všeobecnosti, podľa šírky záberu ich použitia. Tie najvšeobecnejšie sa zvyknú nazývať *matematické stratégie*, tie špecializovanejšie *matematické techniky* (Zeitz [7] 1999; Kopka [1] 2004; Vrábel [4] 2005). V priebehu riešenia úlohy obyčajne treba uvažovať aj sústredené postupy a triky použiteľné iba v špecifických situáciách, ktoré sa často nazývajú *matematické nástroje*. K matematickým technikám patrí metóda *zavedenia pomocného prvku*, ktorej použitie budeme v tomto článku analyzovať.

Metóda zavedenia pomocného prvku

Pri riešení úloh je často užitočné okrem daných veličín zaviesť pomocné matematické objekty, prostredníctvom ktorých potom dospejeme k vyriešeniu týchto problémov. Istým spôsobom s touto technikou súvisia matematické techniky *extremálny princíp* a *zaveď funkciu* (Vrábel [5], [6] 2011). V tej najjednoduchšej podobe pomocného prvku možno hovoriť pri matematickom nástroji *zjednodušenie a substitúcia*, ktorý je dobre známy predovšetkým pri riešení rôznych typov rovníc a nerovníc, či zo základov matematickej analýzy. Typické príklady pre používanie pomocných prvkov poskytuje geometria. Napríklad jeden z viacerých známych dôkazov Pytagorovej vety využíva pomocný matematický objekt štvorec s dĺžkou strany $a+b$, kde a, b označujú veľkosti odvesien pravouhlého trojuholníka.

*Corresponding author; email: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.2.1-6

Štvorec M so stranou $a+b$ „rozrežeme“ dvomi spôsobmi. V prvom prípade v náprotivných rohoch štvorca umiestnime štvorce so stranami a resp. b. Takto sa štvorec M rozpadá na dva štvorce so stranami a resp. b a dva obdĺžniky so stranami a, b (štyri pravouhlé trojuholníky s odvesnami a, b). V druhom prípade rozdelíme každú stranu štvorca M na úsečky dĺžky a, b tak, že pri pohybe po stranách štvorca sa dĺžky a, b striedajú (obr. 1). Takto sa štvorec M rozpadá na štyri pravouhlé trojuholníky s odvesnami a, b a štvorec so stranou c.



Obrázok 1

Aplikácie techniky *zavedenie pomocného prvku* pri riešení problémových úloh

Problém 1. Ktoré z čísel $\frac{55\ldots53}{55\ldots57}$, $\frac{66\ldots64}{66\ldots69}$ je väčšie (vo všetkých uvedených zápisoch čísel sa číslice 5, 6 nachádzajú n -krát, $n \in \mathbb{N}$).

Riešenie. Položme $a = \underbrace{11\ldots1}_{(n+1)-\text{krát}}$. Potom porovnávané čísla sú tvaru $\frac{5a-2}{5a+2}$, $\frac{6a-2}{6a+3}$. Keďže $a > 2$, tak platí:

$$(5a-2)(6a+3) = 30a^2 + 3a - 6 > 30a^2 + 2a - 4 = (6a-2)(5a+2).$$

Takto teda číslo $\frac{55\ldots53}{55\ldots57}$ je väčšie ako číslo $\frac{66\ldots64}{66\ldots69}$.

Problém 2. (Newtonova úloha). Tráva na celej lúke rastie rovnako čo do výšky i hustoty. Vieme, že 60 kráv by spáslo všetku trávu za 24 dní a 30 kráv za 60 dní. Koľko kráv by spáslo všetku trávu za 100 dní?

Riešenie. Zavedieme pomocný prvok – *porciou* nazveme také množstvo trávy, ktoré spasie krava za jeden deň. Predpokladáme pritom, že všetky kravy spasú za deň približne rovnakú porciu. Potom na konci 24-ho dňa 60 kráv spáslo $1440 = 60 \cdot 24$ porcií trávy a na konci 60-ho dňa 30 kráv spáslo $1800 = 30 \cdot 60$ porcií trávy. To znamená, že za 36 dní dorástlo na lúke $360 = 1800 - 1440$ porcií trávy, teda 10 porcií za jeden deň. Odtiaľ vyplýva, že na začiatku spásania bolo na lúke $1200 = 1440 - 24 \cdot 10$ porcií trávy. Preto na konci stého dňa treba spásť $2200 = 1200 + 100 \cdot 10$ porcií trávy. Takto hľadaný počet kráv sa rovná $22 =$ 2200 :100.

Problém 3. Zjednodušte súčin

$$S = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdot\dots\cdot\left(1+a^{2^n}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Riešenie. Zaveďme pomocný prvok $1-a$. Prvok $1-a$ nazveme aj *katalyzátorom.* Platí totiž:

$$(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdot\dots\cdot\left(1+a^{2^n}\right)$$
$$=(1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)\cdot\dots\cdot\left(1+a^{2^n}\right)$$
$$=(1-a^4(1+a^4)\cdot\dots\cdot\left(1+a^{2^n}\right)=\dots=1-a^{2^{n+1}}.$$

Teda

$$S=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} \text{ pre } a\neq 1.$$

Ak $a=1$, tak $S=2^n$.

Problém 4. Zistite, či existuje taká funkcia $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, aby pre každé prirodzené číslo $n>1$ platila rovnosť

$$f(n)=f\big(f(n-1)\big)+f\big(f(n+1)\big)$$

Riešenie. Dokážeme nepriamo, že taká funkcia f neexistuje. Nech by taká funkcia existovala. Každá neprázdna podmnožina množiny $\mathbb{N}$ má najmenší prvok. Vezmime za pomocný objekt najmenší prvok množiny $\{f(n); n>1\}$, ktorý sa rovná prvku $f(m)$ pre nejaké $m>1$. Zrejme $f(n)\geq 2$ pre každé $n>1$. Potom pre prirodzené číslo m by muselo platiť

$$f(m)=f\big(f(m-1)\big)+f\big(f(m+1)\big)\geq 1+f(m),$$

čo je spor.

Problém 5. Dokážte, že ak číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konverguje, tak aj rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje.

Riešenie. Ako pomocný matematický objekt uvažujme tzv. *kladnú* (a^+) a *zápornú* (a^-) *časť* reálneho čísla a, ktorú definujme takto:

$$\text{ak } a\geq 0, \text{ tak } a^+=a,\ a^-=0; \text{ ak } a<0, \text{ tak } a^+=0,\ a^-=-a.$$

Ľahko nahliadneme, že pre každé reálne číslo a platí:

$$0\leq a^+\leq |a|,\ 0\leq a^-\leq |a|,\ a=a^+-a^-.$$

Nech $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je ľubovoľný rad, pre ktorý platí, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konverguje. Pre každé prirodzené číslo n platí

$$0\leq a_n^+\leq |a_n|,\ 0\leq a_n^-\leq |a_n|,\ a_n=a_n^+-a_n^-.$$

Z porovnávacieho kritéria vyplýva, že rady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ konvergujú. Potom konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, pretože je rozdielom dvoch konvergentných radov.

Poznámka. Tvrdenie v probléme 5 sa obyčajne dokazuje pomocou *Cauchy-Bolzanovho kritéria konvergencie radu.*

Často je hľadaným pomocným objektom vhodná funkcia.

Problém 6. Nájdite prvočíselný rozklad čísla $A=989\cdot 1001\cdot 1007+320$.

Riešenie. Čísla $989, 1001, 1007$ sú síce zložené, ale sú nesúdeliteľné s číslom 320, pretože $320=2^6\cdot 5$ a žiadne z uvedených troch čísel nie je deliteľné dvomi ani piatimi. Takto v skúmanom súčte *A* nemožno elementárne vybrať nejaké činitele. Môžeme však experimentálne uvažovať, že číslo *A* dostaneme ako hodnotu vhodnej funkcie tvaru

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

v nejakom celom čísle, pričom aj a, b, c sú nejaké celé čísla. Všimnime si, že pre takúto funkciu *f* platí:

$$f(x) + f(-x) = (x-a)(x-b)(x-c) - (x+a)(x+b)(x+c)$$
$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc - x^3 - (a+b+c)x^2 - (ab+ac+bc)x$$
$$-abc = -2(a+b+c)x^2 - 2abc = -2(a+b+c)x^2 + 2f(0).$$

Ak a, b, c zvolíme tak, aby $a+b+c=0$, dostaneme rovnosť

$$f(x) - 2f(0) = -f(-x).$$

Potrebujeme zistiť, či za uvedeného predpokladu existuje celé číslo *d* tak, aby

$$f(d) = 989 \cdot 1001 \cdot 1007 \text{ a } -2f(0) = 320.$$

Riešme preto sústavu rovníc:

$$x - a = 989,\ x - b = 1001,\ x - c = 1007,\ a + b + c = 0.$$

Sčítaním prvých troch rovníc dostaneme $3x - (a+b+c) = 3x = 2997$, teda $x = 999$. Odtiaľ vyplýva, že $a = 10$, $b = -2$, $c = -8$. Teda

$$f(x) = (x-10)(x+2)(x+8)$$

a navyše $-2f(0) = -2 \cdot (-10) \cdot 2 \cdot 8 = 320$. Takto platí:

$$f(999) - 2f(0) = 989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320 = -f(-999) = 1009 \cdot 997 \cdot 991.$$

Ľahko nahliadneme, že čísla 991, 997, 1009 sú prvočísla, pretože žiadne z prvočísel

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

$\left(\sqrt{1009} < 33\right)$ nedelí žiadne z týchto čísel. Takto prvočíselný rozklad čísla *A* sa rovná súčinu $991 \cdot 997 \cdot 1009$.

Problém 7. Nech konečná množina A má n prvkov. Dokážte, že množina $P(A)$ všetkých podmnožín množiny A má 2^n prvkov.

Riešenie. Nech $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Ako pomocné objekty uvažujme n-členné postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^n$, pričom $x_k \in \{0,1\}$ pre každé $k \in \{1,2,\dots,n\}$. Množinu všetkých takýchto postupností označme symbolom B. Množina B má zrejme 2^n prvkov, čo vyplýva z kombinatorického pravidla o súčine, pretože v postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^n$ pre každý jej člen máme dve možnosti. Stačí teraz už len dokázať, že množiny B a $P(A)$ majú rovnaký počet prvkov. Dokážeme, že zobrazenie

$$f: B \to P(A), x = \{x_k\}_{k=1}^n \mapsto A_x = \{a_k \in A; x_k = 1\}$$

je bijekcia.

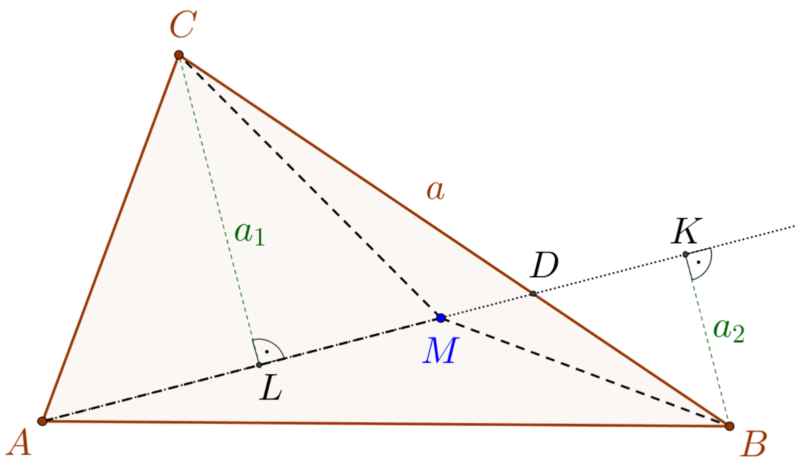
Ak $x = \{x_k\}_{k=1}^n, y = \{y_k\}_{k=1}^n$ sú dve rôzne postupnosti z množiny B, tak existuje $k_0 \in \{1,2,\dots,n\}$ tak, že $x_{k_0} \neq y_{k_0}$. Potom a_{k_0} patrí práve do jednej z množín A_x, A_y, teda $f(x) \neq f(y)$ a *f* je injekcia. Nech $X \in P(A)$. Označme pravdivostnú hodnotu výroku $a_k \in X$ symbolom x_k, $k = 1,2,\dots,n$. Potom $\{x_k\}_{k=1}^n \in B$ a zrejme $f(\{x_k\}_{k=1}^n) = X$, teda f je aj surjekcia.

Poznámka. Úlohu v probléme 6 možno riešiť pravda aj inak. Jeden spôsob využíva matematickú indukciu. Druhý spôsob spočíva v rozklade množiny $P(A)$ na systémy podmnožín množiny A s pevným počtom prvkov a využití kombinatorickej rovnosti $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Problém 8. Vnútri trojuholníka ABC zvoľme bod M. Označme vzdialenosť bodu M od vrcholov A, B, C po rade $m_a,\ m_b,\ m_c$ a vzdialenosť bodu M od strán BC, CA, AB po rade d_a, d_b, d_c. Dokážte, že

$$am_a \geq bd_b + cd_c.$$

Riešenie. Veďme bodmi B a C kolmice BK a CL na priamku AM, $K(L)$ leží na priamke AM. Označme $|CL| = a_1$, $|BK| = a_2$ (obr. 2) a priesečník priamky AM so stranou BC ako bod D.



Obrázok 2

Z pravouhlých trojuholníkov DCL, DBK vyplýva, že

$$a_1 + a_2 \leq |BD| + |DC| = a.$$

Pomocnými („prechodovými“) prvkami budú obsahy trojuholníkov AMC, ABM. Platí totiž:

$$\frac{1}{2}bd_b + \frac{1}{2}cd_c = P_{\Delta AMC} + P_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}a_1m_a + \frac{1}{2}a_2m_a \leq \frac{1}{2}am_a.$$

Záver

Matematickú techniku *zavedenie pomocného prvku* možno použiť v každej matematickej disciplíne, či už pri riešení problémových úloh alebo v dôkazoch rôznych tvrdení. Na objavenie vhodného pomocného objektu, ktorý je kľúčom k riešeniu daného problému, však neexistuje všeobecný návod alebo priama cesta. Okrem znalosti základov riešenej problematiky je potrebná invencia a schopnosť kreatívneho myslenia.

Literatúra

[1] Kopka, J. 2004. *Výzkumný přístup při výuce matematiky.* Ústí nad Labem: Acta Universitatis Purkynianae 101, 2004, ISBN 80-7044-604-8.

[2] Polya, G. 1948. *How to Solve it.* New Jersey: Princeton, 1948.

[3] Polya, G. 1954. *Mathematics and Plausible Reasoning.* New Jersey: Princeton, Volume 1,1954.

[4] Vrábel, P. 2005. *Heuristika a metodológia matematiky.* Nitra: FPV UKF, Edícia prírodovedec č. 165, 2005, ISBN 80-8050-840-2.

[5] Vrábel, P. 2011. *Symetria.* In: Obzory matematiky, fyziky a informatiky 2/2011 (40), 9-15. Nitra, ISSN 1335-4981.

[6] Vrábel, P. 2011. *Zaveď funkciu.* In: Obzory matematiky, fyziky a informatiky 3/2011 (40), 15-19. Nitra, ISSN 1335-4981.

[7] Zeitz, P. 1999. *The Art and Craft of Problem Solving.* New York: John Wiley and Sons, 1999, ISBN 0-471-13571-2.