

## Analýza riešení slovných úloh charakterizovaných zjednotením dvoch množín s neprázdny m prienikom

### Analysis of Solving Math Word Problems Characterized by Union of Two Sets with Non-Empty Intersection

Klimentová Lucia<sup>a</sup> – Šovčíková Petronela<sup>a</sup> – Čeretková Soňa<sup>a</sup>

<sup>a</sup> \* *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 23 March 2016; received in revised form 18 April 2016; accepted 25 April 2016

---

#### Abstract

In our article we focused on math word problems, which solution does union of sets with non-empty intersection characterize. The research sample was the first year students of Preschool and Elementary Education at The Constantine the Philosopher University in Nitra, master level. There were three tasks, which were solved by students. The context of tasks was different but the solving of these tasks was very similar and it can be represented by one general solution scheme. From all students' solutions we chose six, which represent the most frequently algebraic or graphical errors within our sample solutions. So we made some word analysis and error diagnostics of these solutions.

**Keywords:** math word problems, solving, analysis, error diagnostics

**Classification:** 97D70

---

#### Úvod

Riešenie slovných úloh patrí k málo obľúbeným činnostiam vo vyučovaní matematiky. Všeobecne, ako učiteľmi a žiakmi, tak aj verejnosťou je prijímaný fakt, že riešenie slovných úloh v matematike je pre žiakov náročné. Často už len samotná skutočnosť, že žiak má riešiť slovnú úlohu, je základnou príčinou jeho neúspechu pri riešení. Rakoušanová (1957, in Novotná, 2000) vo svojej práci tvrdí, že žiaci radi a prevažne správne a rýchlo počítajú najrôznejšie numerické úlohy, ale zjavne neradi riešia slovné úlohy... Jedným z možných vysvetlení je, že v matematickej úlohe, ktorá nie je slovná, sú vždy vyznačené početné operácie a žiak preto nie je nútený tvoriť matematickú úlohu samostatne, na rozdiel od slovnej úlohy, v riešení ktorej musí najskôr číselné údaje vyhľadať, zistiť ich vzájomný vzťah a závislosť a až na základe toho zistenia musí sám určiť vhodné početné operácie. Je to však iba časť vysvetlenia nechuti k riešeniu slovných úloh. Ďalšie príčiny nechuti a neúspechu žiakov pri riešení slovných úloh sú hlbšie a sú prevažne metodického rázu. (Novotná, 2000)

---

\* Corresponding author; email: [petronela.sovcikova@ukf.sk](mailto:petronela.sovcikova@ukf.sk)  
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.1.36-43

V našom príspevku analyzujeme riešenia slovných úloh, ktorých riešenie je charakterizované neprázdny prienikom dvoch množín a diagnostikujeme najčastejšie chyby vyskytujúce sa pri ich riešení.

Jednou z hlavných podmienok pre vytvorenie klímy, ktorá podnecuje diskusiu o problémoch riešenia slovnej úlohy, je schopnosť učiteľa diagnostikovať príčiny chýb a úroveň porozumenia problémom u jednotlivých žiakov. Vo väčšine prípadov dokáže skúsený učiteľ odhaliť mnohé príčiny problémov, ktoré majú jeho žiaci pri riešení slovných úloh. (Novotná, 2000)

### **Teoretické východiská**

Schopnosti a zručnosti riešenia slovných úloh v matematike patria medzi matematické kompetencie a zaoberajú sa nimi všetky aktuálne teórie o cieľoch vyučovania matematiky a všetky národné i medzinárodné testovania v matematike. (Čeretková, Šedivý, 2005)

Blum a Niss (1991, in Novotná, 2000) uvádzajú, že slovné úlohy by mali byť zaradené do vyučovania matematiky, pretože sú vhodným prostriedkom pre rozvíjanie všeobecných kompetencií žiakov a ich postojov k matematike, umožňujú žiakom „*vidieť a posudzovať*“ nezávisle, analyzovať a porozumieť použitiu matematiky, rozvíjajú schopnosť žiakov aktivovať matematické vedomosti a zručnosti v nematematických situáciách a pomáhajú žiakom pri poznávaní, porozumení a zapamätávaní pojmov, metód a výsledkov matematiky.

*„Úlohy, v ktorých je závislosť medzi danými a hľadanými údajmi vyjadrená slovnou formuláciou a treba v nich riešiť istý problém zo spoločenskej, ekonomickej alebo inej oblasti, nazývame slovnými úlohami. V slovných úlohách treba na základe vhodnej úvahy zistiť, aké početné operácie musíme s danými údajmi (číslami) urobiť, aby sme našli čísla, ktoré máme vypočítať a odpovedať nimi na hľadané otázky.“* (Šedivý a kol., 2013)

Novotná (in Hejný, 2004) uvádza nasledovné problémy žiakov špecifické pre riešenie slovných úloh: žiak má nedostatočné predchádzajúce skúsenosti a znalosti súvisiace s kontextom alebo s potrebným matematickým zázemím úlohy; žiak nečíta zadanie pozorne, s porozumením; žiak nesprávne interpretuje jeden alebo viac termínov použitých v zadaní úlohy; žiak nie je schopný spojiť oddelené informácie a vzťahy do jedného komplexnejšieho celku.

Jadro úspešnosti riešenia slovnej úlohy teda spočíva v schopnosti žiaka danú úlohu zmatematizovať.

V procese matematizácie slovnej úlohy, v rámci rozboru, sú dôležité tieto činnosti: určenie objektov, určenie vzťahov medzi objektmi, identifikácia otázky, nájdenie zjednocujúceho pohľadu, získanie vhľadu do štruktúry slovnej úlohy, vytvorenie matematického modelu (matematickej úlohy). (Šedivý a kol., 2013)

Jednotlivé činnosti v rámci riešenia nemusí žiak vykonávať v uvedenom poradí. Záleží na kontexte a kategórii slovnej úlohy, či žiak niektoré z činností vynechá alebo sa ku niektorým vráti aj viackrát.

### **Metodika výskumu**

Zadania slovných úloh, ktoré sme si pre analýzu vybrali, neboli zvolené náhodne, ale zámerne. Pri ich voľbe sme si stanovili podmienku, aby to boli slovné úlohy, ktoré sa riešia

pomocou princípu inklúzie a exklúzie. V rámci analýzy sme sa zamerali na riešenie nasledujúcich troch úloh.

### Úloha č.1

V triede bolo 32 žiakov. Na krúžok z matematiky sa prihlásilo 21 žiakov. Na krúžok zo slovenského jazyka 28 žiakov. Koľko žiakov sa prihlásilo len na krúžok z matematiky? Koľko žiakov sa prihlásilo len na krúžok zo slovenského jazyka? Koľko žiakov sa prihlásilo na oba krúžky?

### Úloha č.2

Hudobnej súťaže sa zúčastnilo 25 žiakov umeleckých škôl, ktorí súťažili v hre na klavír a na gitaru. V hre na klavír súperilo 17 žiakov a v hre na gitaru 19 žiakov. Koľko žiakov súťažilo v hre na oba nástroje? Koľko žiakov súťažilo v hre iba na jeden nástroj?

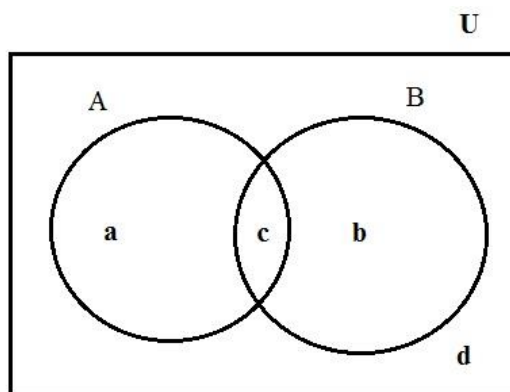
### Úloha č.3

Na výlete bolo 26 detí. 17 detí si prinieslo kolobežku a 13 detí kolieskové korčule. Koľko detí si prinieslo kolobežku aj korčule? Koľko detí si prinieslo iba kolobežku?

Vybrané slovné úlohy sa štandardne riešia aplikovaním postupu všeobecného riešenia, ktoré predstavujeme v nasledujúcich riadkoch. Všeobecné riešenie vychádza zo schémy riešenia slovnej úlohy: Slovná úloha -> Rozbor -> Matematická úloha -> Riešenie matematickej úlohy -> Skúška -> Výsledok + Odpoveď. (Šedivý a kol., 2013)

*Všeobecné riešenie zvolených slovných úloh:*

Slovnú úlohu riešime pomocou princípu inklúzie a exklúzie. V našom prípade ide vždy o dve množiny s neprázdny prienikom - množina  $A$  a množina  $B$ , ktoré sú podmnožinami základnej množiny  $U$ . Nech  $x$  je počet prvkov množiny  $A$ , nech  $y$  je počet prvkov množiny  $B$  a nech  $z$  je počet prvkov základnej množiny  $U$ . Ďalej, nech  $a$  je počet prvkov, ktoré patria iba do množiny  $A$ , nech  $b$  je počet prvkov, ktoré patria iba do množiny  $B$  a nech  $c$  je počet prvkov, ktoré patria súčasne do množín  $A$  aj  $B$ . Označme  $d$  počet prvkov, ktoré nepatria ani do množiny  $A$ , ani do množiny  $B$ . V našich úlohách ide vždy o prípad, keď  $d = 0$ . Uvedené situáciu vieme zakresliť pomocou Vennovho diagramu (Obr. 1).



Obrázok 1

Zápis:

$$a + b + c + d = z$$

$$a + c = x$$

$$b + c = y$$

$$a = ?$$

$$b = ?$$

$$c = ?$$

#### Výpočet:

Ak  $a + c = x$ , potom  $x + b + d = z$ . Z toho vyplýva  $b = z - x - d$ . Zo zadania  $d = 0$ , teda  $b = z - x$ .

Počet prvkov, ktoré patria súčasne do množín  $A$  aj  $B$  vypočítame nasledovne :  $b + c = y$ . Keďže vieme, že  $b = z - x$ , potom  $c = x + y - z$

Teraz už ľahko vypočítame, že ak  $a + c = x$ , potom  $a = z - y$ .

#### Skúška:

$$a + b + c = z$$

$$a + c = x$$

$$b + c = y$$

$$z - y + z - x + x + y - z = z$$

$$z - y + x + y - z = x$$

$$z - x + x + y - z = y$$

#### Odpoveď:

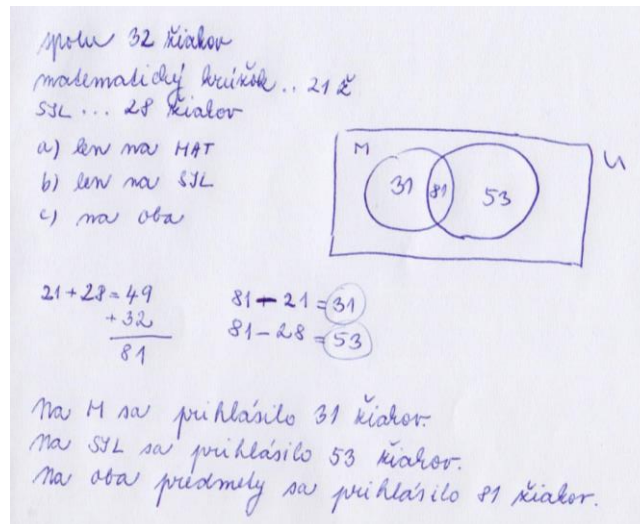
Iba v množine  $A$  je  $a$  prvkov, iba v množine  $B$  je  $b$  prvkov a v oboch množinách zároveň je  $c$  prvkov.

#### **Analýza riešení**

V nasledujúcej časti postupne predstavíme šesť študentských riešení, ktoré sme vybrali spomedzi všetkých 81 riešení ako typové chybné riešenia. Prvú úlohu riešilo 25 študentov a chybných bolo 8 riešení. Druhú úlohu riešilo 32 študentov a chybných bolo 17 riešení. Tretiu úlohu riešilo 22 študentov a chybných bolo 9 riešení. Úlohy riešili študenti Učiteľstva predškolskej a elementárnej pedagogiky v rámci predmetu Metódy riešenia matematických úloh.

#### Riešenie 1A:

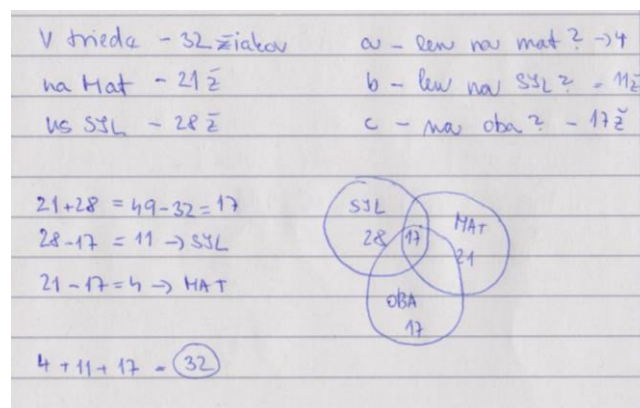
V prvom riešení môžeme vidieť, že študent riešil slovnú úlohu princípom inklúzie a exklúzie. Zvolil si základnú množinu  $U$  a pomocou Vennových diagramov si znázornil situáciu, ktorá vyplynula zo zadania. Ukážka znázornená na obrázku obsahuje všetky časti, ktoré sú potrebné k riešeniu slovnej úlohy – zápis, znázornenie, výpočty, skúška a odpoveď. Skúsme sa pozrieť na samotné výpočty. Vychádzajúc zo všeobecného riešenia vidíme, že študent mal problém už so samotným porozumením princípu inklúzie a exklúzie, resp. s porozumením pojmom – množina, podmnožina množiny, prienik dvoch množín a vzťahov medzi nimi. Napríklad: žiakov bolo spolu 32. Študent pri svojom riešení uvádza, že počet žiakov, ktorí navštevovali oba krúžky súčasne je 81, čo je logicky a matematicky nemožné. Taktiež uvádza, že počet žiakov, ktorí navštevovali len krúžok zo slovenského jazyka je 53, avšak v zadaní bol počet žiakov 28. Bolo si treba uvedomiť, že to je počet žiakov, ktorí navštevovali iba krúžok zo slovenského jazyka a zároveň aj počet žiakov, ktorí navštevovali oba krúžky. Podľa tohto riešenia by muselo platiť, že  $53+81=28$ , čo samozrejme nie je pravda.



Obrázok 2

**Riešenie 1B:**

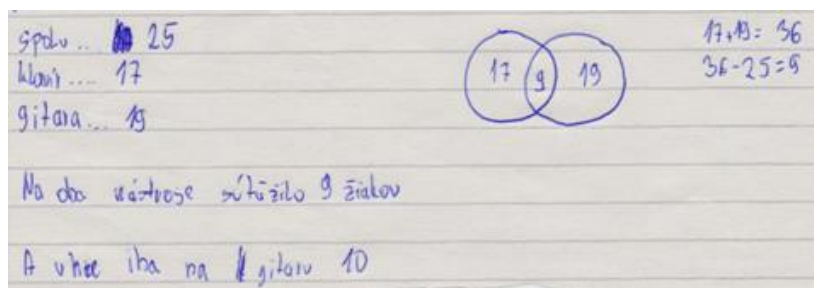
V ďalšom riešení úlohy môžeme vidieť, že študent rozumie princípu inklúzie a exklúzie a vzťahom medzi nimi, keďže úlohu vyriešil korektné. Má však značné medzery v grafickom znázornení dvoch množín pomocou Vennových diagramov, čo môžeme vidieť na Obr. 3. Riešenie obsahuje všetky časti, ktoré sú pri hľadani riešenia slovnej úlohy potrebné: zápis, znázornenie, výpočty, skúška. Avšak v tomto spomínanom riešení chýba slovný komentár a odpoveď.



Obrázok 3

**Riešenie 2A:**

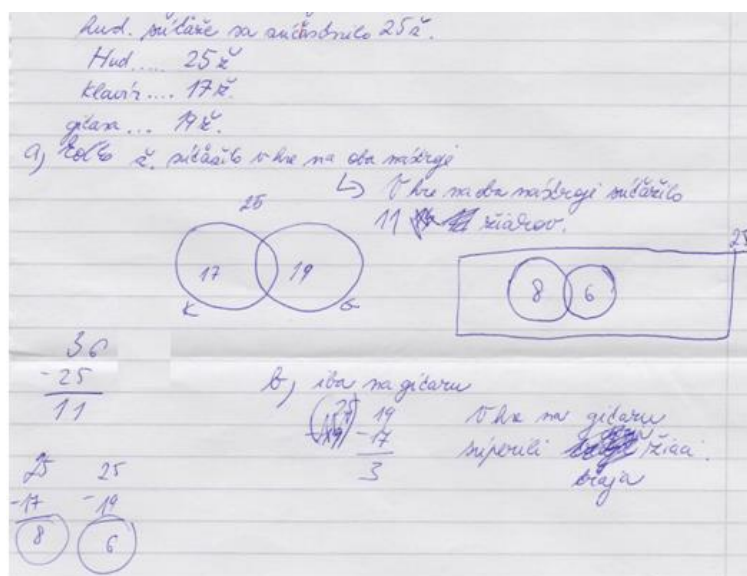
V tomto prípade išlo v riešení hlavne o numerické chyby. Ako môžeme vidieť, študent správne určil súčet  $17 + 19 = 36$ , ale v nasledujúcom kroku už nesprávne vypočítal rozdiel čísel 36 a 25. Podľa študenta je rozdiel rovný číslu 9, čo však nie je pravda, pretože je rovný 11. Keďže študent získal nesprávnu hodnotu výsledku, všetky jeho ostatné výpočty boli nekorektné. Z riešenia môžeme ďalej vidieť, že študent nemá úplne osvojené pojmy množina a podmnožina a vzťahy medzi nimi, pretože počet žiakov, ktorí súťažili v hre na klavír, je 17. Tento počet žiakov zahŕňa v sebe tých, ktorí súťažili len v hre na klavír, ale aj tých, ktorí súťažili aj v hre na klavír, aj v hre na gitaru. Ak by sme vychádzali zo študentovho nákresu, tak počet týchto študentov by bol  $17 + 9 = 26$ . Čo je v rozpore so zadaním.



Obrázok 4

**Riešenie 2B:**

V nasledujúcom riešení môžeme vidieť, že študent si správne znázornil dve množiny pomocou Vennových diagramov, ale číselné údaje, ktoré boli uvedené v zadaní, nesprávne zaznačil do obrázka. V zadaní bol daný počet žiakov, ktorí súťažili v hre na klavíri, nie počet žiakov, ktorí súťažili *iba* v hre na klavíri. Vo výpočtoch môžeme vidieť, že študent vie, ako úlohu vyriešiť. Problém však nastal pri druhom znázornení. Keďže chýba označenie množín, nevieme s istotou priradiť k jednotlivým množinám počty študentov. V ďalšej časti však študent nesprávne určil počet žiakov, ktorí súťažili v hre *iba* na gitare. Odčítal od seba počet študentov, ktorí súťažili v hre na gitare a počet študentov, ktorí súťažili v hre na klavír. A to je nekorektná operácia.

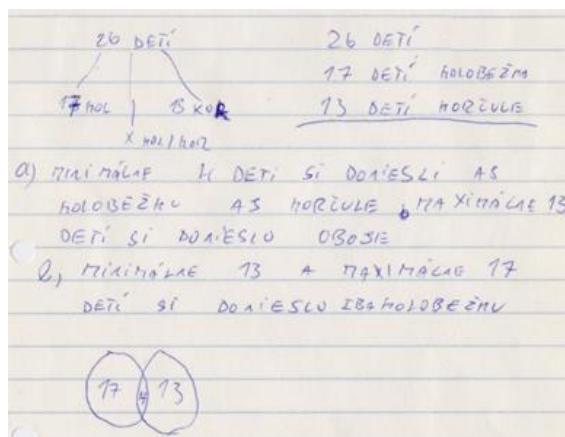


Obrázok 5

**Riešenie 3A:**

Na prvý pohľad môžeme v tomto riešení vidieť, že študent na riešenie slovnej úlohy prvotne nepoužil Vennove diagramy, znázornil si ich až nakoniec. Zadanie slovnej úlohy sa rozhodol znázorniť vlastným spôsobom, čo nemôžeme považovať za nesprávnu voľbu. Avšak študent vôbec neporozumel zadaniu slovnej úlohy. Nevieme posúdiť, akým smerom sa uberali myšlienky jeho uvažovania, ale na základe odpovede vieme zhodnotiť, že úlohu vyriešil nesprávne. Odpoveď na otázku, koľko detí si prinieslo aj kolobežku, aj korčule, študent odpovedal, že minimálne 4 deti a maximálne 13. Podobne je to aj v druhej odpovedi. Z uvedených dôvodov môžeme povedať, že študent nemá osvojený princíp inklúzie a exklúzie, nerozumie pojmom množina a podmnožina množiny a vzťahom medzi nimi. Uvedené potvrdzujú aj dodatočne znázornené Vennove diagramy. Podľa obrázka Vennových

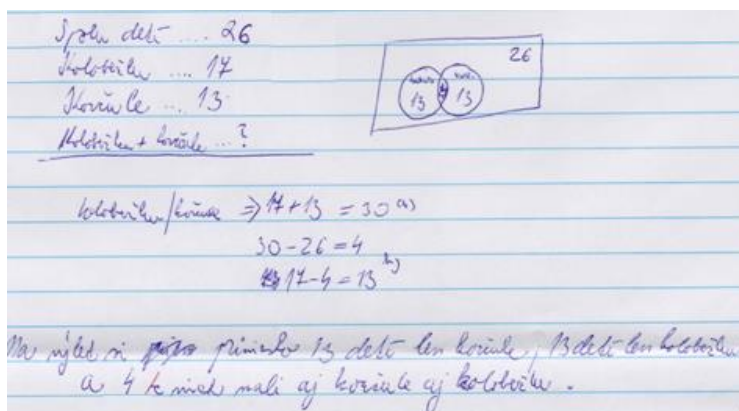
diagramov by počet všetkých detí bol  $17 + 4 + 13 = 34$ , čo je však v rozpore so zadaním, kde bol počet všetkých detí 26.



Obrázok 6

### Riešenie 3B:

V riešení Obr. 6 môžeme vidieť, že študent začal počítať správne, ale v poslednom kroku neodčítal počet detí, ktoré si priniesli aj kolobežku, aj korčule, od počtu detí, ktoré si priniesli iba korčule. Nevykonaním tohto kroku samozrejme nezískal správne riešenie. Študent má osvojené znázornenie dvoch množín pomocou Vennových diagramov. V riešení chýba skúška správnosti. Ak by ju študent vykonal, tak by svoje nesprávne riešenie odhalil: všetkých detí je spolu  $13 + 13 + 4 = 30$ . Avšak v zadaní bol stanovený počet detí 26. Študentov výsledok je v rozpore so samotným zadaním.



Obrázok 7

### Záver

Je všeobecne známe, že slovné úlohy patria medzi najproblematickejšie oblasti vo vyučovaní matematiky. Je dôležité včas diagnostikovať problémy prítomné pri riešení slovných úloh, aby sme problémy a najčastejšie chyby mohli následne efektívne eliminovať.

V predstavenej analýze sme sa zamerali na diagnostiku najčastejších chýb pri riešení slovných úloh, v ktorých išlo o porozumenie princípu inklúzie a exklúzie. Vybrané riešenia boli zvolené tak, aby obsahovali najčastejšie numerické a grafické chyby, ktoré sa pri riešení slovných úloh daného typu vyskytujú. Vo väčšine riešení sme sa stretli s neporozumením princípu inklúzie a exklúzie, nakoľko v riešeniach študentov bol počet prvkov podmnožiny A,

resp.  $B$ , základnej množiny  $U$  väčší, ako je počet všetkých prvkov základnej množiny uvedený v zadaní úlohy. Riešením tohto problému by mohlo byť zaradenie slovných úloh s reálnym kontextom do vyučovacieho procesu, ktoré by žiakom umožnili prepojiť vedomosti z matematiky s ich každodenným životom. Taktiež by bolo vhodné tieto úlohy vhodne zakresliť do obrázkov alebo schém, čo žiakom poskytne názornú ukážku a umožní lepšie pochopiť úlohy. Ďalšie chyby, ktorých sa študenti dopúšťali, boli numerické chyby vo výpočtoch, ktoré mohli byť spôsobené nepozornosťou. Poslednú skupinu tvorili riešenia, ktoré obsahovali korektné riešenie slovnej úlohy, avšak grafické znázornenie bolo nesprávne.

Problémy, ktoré vznikajú pri riešení úloh, sa dajú v školskej praxi odstrániť opätovným a dôkladnejším vysvetlením problematiky, názornými ukážkami a viacnásobným precvičovaním riešenia úloh. Vznik numerických chýb môžeme zamedziť eliminovaním rušivých prvkov vo vyučovacom procese, ktoré môžu žiakov zbytočne rozptyľovať.

### **PodĎakovanie**

Tento príspevok vznikol s podporou projektu APVV-14-0446 s názvom *Hodnotenie kompetencií učiteľa*.

### **Literatúra**

Čeretková, S., Šedivý, O. (2005). *Aktuálne problémy teórie vyučovania matematiky*. FPV UKF v Nitre.

Hejný, M. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.

Šedivý, O., a kol. (2013). *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky*. Nitra: UKF.