

Budúci učítelia – elementaristi a ich vedomosti o zlomkoch Future Elementary School Teachers and their Knowledge of Fractions

Valéria Švecová^{*a} – Iveta Scholtzová^b

^a Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr.
A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,

^b Department of Mathematic Education, Faculty of Education, University of Presov, Ul. 17. novembra č. 15,
080 01 Prešov

Received 31 March 2016; received in revised form 14 April 2016; accepted 17 April 2016

Abstract

Fractions still recovering one of the "problems" of school mathematics. The paper presents partial results of our research, which we have devoted task solving with fractions. In the center of our interest was implicative analysis of correlation among steps of solution.

Keywords: fractions, implicative analysis.

Classification: C30

Úvod

Súčasný kurikulum stavia do centra matematického vzdelávania na primárnom stupni základnej školy oboznámenie sa s prirodzenými číslami a štyrmi matematickými operáciami. Neskôr sa začína obor prirodzených čísel rozširovať, a to dvomi smermi: k častiam – zlomky a desatinné čísla a k záporným číslam. Samostatne myslieť a uvažovať je možné iba na základe pochopenia a porozumenia. Pokiaľ chceme zlepšiť matematické predstavy u detí, je potrebné pochopiť ako sa matematické predstavy vytvárajú a rozvíjajú.

Zvláštne postavenie v školskej matematike majú otázky vzťahu a celku. Sú previazané na ďalšie matematické štruktúry, ktorých pochopenie ovplyvňuje pojmotvorný proces, sú aplikovateľné nielen vo viacerých oblastiach matematiky, ale aj v spoločenskej, prírodnej a technickej praxi. S procesom delenia celku na časti sa dieťa stretáva už v predškolskom veku. Už v tom čase sa začína rozvíjať chápanie vzťahu časti a celku.

Zlomky na primárnom stupni

S vytváraním celku a jeho delením sú spojené základné pojmy elementárnej matematiky – pojem prirodzeného a racionálneho čísla, ako aj pojem geometrického útvaru. Od prvého ročníka základnej školy sa neformálne vedomosti o vzťahu časti a celku ďalej rozvíjajú pri porovnávaní, sčítaní a odčítaní. (Hejný, 1999)

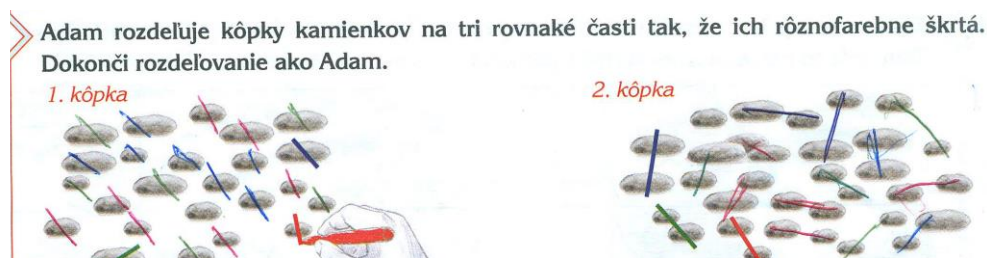
* Corresponding author; email: vsvecova@ukf.sk

Často sa zdôrazňuje, že zlomok patrí k náročným pojmom, ktorý je potrebné rozvíjať v dlhom časovom úseku. Ťažisko vyučovania tematického celku Zlomok je na sekundárnom stupni základnej školy.

Predstavy o zlomkoch sa ale začínajú vytvárať a budovať oveľa skôr, a to buď v škole alebo mimo nej. So slovami „polovica“, „štvrtina“ sa deti stretávajú už v predškolskom veku a v škole sa potom tieto slova vyskytujú už na primárnom stupni. Je to preto, že sa s nimi deti stretávajú neustále aj v každodennom živote. Označenie polovica však veľa detí chápe ako synonymum k slovu časť. Pravdepodobne to súvisí s tým, že delenie, ktoré predchádza a pripravuje pojem zlomok, nemusí byť nutne „spravodlivé“, teda na rovnaké časti. Preto sa bežne môžeme stretnúť s vyjadreniami typu: „Daj mi väčšiu polovicu koláča“; „koláč sme rozdelili na štyri (rovnaké) polovice“. Zriedkavejšie sa deti stretávajú s označením tretina, pätina, desatina. (Tichá, Macháčková, 2006)

Vychádzajúc zo štátneho vzdelávacieho programu ISCED1 sa žiaci so zlomkami stretávajú už na primárnom stupni v 3. ročníku základnej školy v rámci tematického celku Násobenie a delenie prirodzených čísel v obore do 20. Podľa obsahového a výkonového štandardu by sa mal žiak oboznámiť s pojmi celok, časť celku, počet rovnakých častí (delenie na), skupiny danej veľkosti (delenie po) a mal by vedieť deliť na rovnaké časti (rozdelenie na daný počet rovnakých častí), vedieť deliť podľa obsahu (delenie po, rozdelenie skupiny danej veľkosti).

V učebnici matematiky pre 3. ročník primárneho stupňa nájdeme aj takéto úlohy k propedeutike zlomkov:



Milan má zo všetkého len polovicu toho, čo má Elena.
Nakresli, čo má Elena.

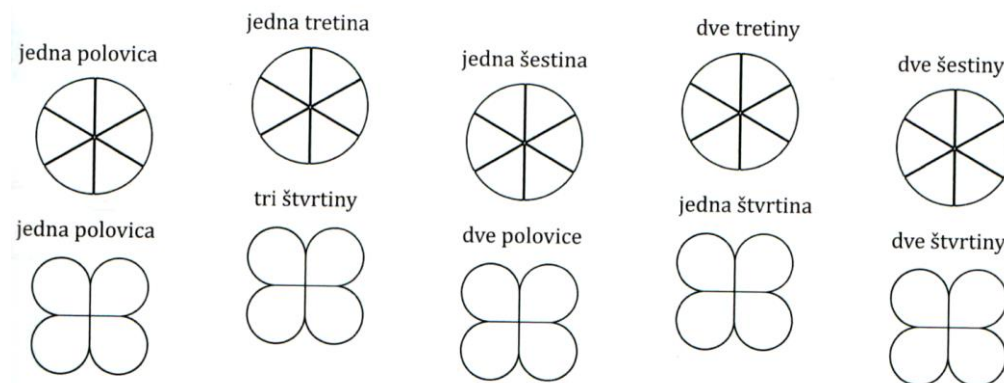
Elena má	Milan má

Obr. 1: Ukážky úloh určené žiakom 3. ročníka (zdroj Černek, 2012, s.8)

Podľa obsahového a výkonového štandardu by si mal žiak štvrtého ročníka primárneho stupňa základnej školy v rámci tematického celku Násobenie a delenie v obore násobilky osvojiť rozdeľovanie na polovice, tretiny, atď.

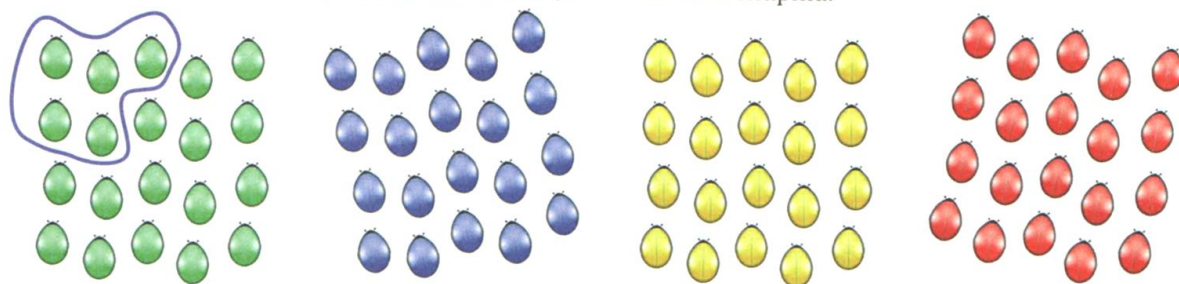
V učebnici pre 4.ročník primárneho stupňa nájdeme aj takéto úlohy o zlomkoch:

Vymaľuj danú časť celku.



Rozdeľ chrobáčky na rovnaké skupiny podľa zadania:

- a) zelené do 4 skupín, modré do 5 skupín, žlté do 2 skupín, červené do 10 skupín. Pomenuj, akú časť celku vyjadruje jedna zelená, modrá, žltá a červená skupina.



Obr. 2: Ukážky úloh určené žiakom 4. ročníka (zdroj Hvolková 2014)

Výskum

Výskumy matematickej anxiety u žiakov stredných škôl a starších viedli až ku skúsenostiam a spomienkam na vyučovanie elementárnej matematiky v mladšom školskom veku. Preto sme si za výskumnú vzorku zvolili študentov učiteľstva pre primárny stupeň vzdelávania. Výber vzdelávacích metód a foriem u učiteľa v praxi je ovplyvnený jeho pedagogickými a odbornými kompetenciami.

Tie vplývajú aj na jeho vnútorný postoj k danému predmetu, ktorý vedome, či nevedome prenáša na žiakov. Teda, ak učiteľ nie je schopný aplikovať matematické vedomosti a zručnosti na neformálnej úrovni (riešiť otvorené úlohy, aplikačné úlohy...) má tendenciu sa takýmto úlohám vyhýbať aj pri samotnom vyučovaní.

To znamená, že pokiaľ sa spomínané úlohy vyskytujú v pracovných listoch, má tendenciu ich vynechávať (pokiaľ mu to štátny vzdelávací program dovolí).

Našu výskumnú vzorku tvorilo 112 študentov 1. ročníka odboru Predškolská a elementárna pedagogika Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre.

V tabuľke uvádzame prehľad absolvovaných stredných škôl týchto študentov.

Tab. 1 : Rozdelenie študentov podľa typu absolvovanej strednej školy

Typ školy	Počet študentov
Gymnázium	28
Pedagogická a sociálna akadémia	36
Obchodná akadémia	20
Iná stredná škola	28

Ako vidieť z tabuľky najviac študentov má absolvovanú strednú školu s pedagogického smeru, čo súvisí so samotným zameraním odboru Predškolská a elementárna pedagogika.

Priebeh výskumu

Výskum prebiehal v dvoch fázach. Pre potreby tohto článku uvádzame iba prvú fázu, v ktorej študenti riešili matematický test zameraný na využitie algoritmov pri počítaní so zlomkami. Kvôli prehľadnosti uvádzame aj jednotlivé úlohy:

1. Vypočítajte a výsledok zapíšte v základnom tvare

$$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) - \frac{7}{30} =$$

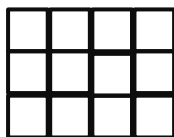
- Vypočítajte a výsledok zapíšte v základnom tvare

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{8} - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} : \frac{3}{10} \right) =$$

2. Vypočítajte a výsledok zapíšte v základnom tvare

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{6} : \frac{2}{3} - 1\frac{1}{4} =$$

3. Vyznačte $\frac{2}{3}$



Test obsahoval tri gradujúce úlohy na využitie jednotlivých algoritmov počítania so zlomkami a jednu úlohu na znázornenie daného zlomku.

V prvej úlohe bolo potrebné sčítať, odčítať a vynásobiť medzi sebou zlomky v základnom tvare a menovatele zlomkov boli nesúdeliteľné čísla. V tejto úlohy boli zlomky zámerne zvolené tak, aby pri riešení stačilo aplikovať iba jednotlivé algoritmy a neboli potrebné ďalšie úpravy.

V tabuľke 2 sú uvedené počty študentov, ktorí správne, resp. nesprávne vyriešili prvú úlohu

Tab2: Úspešnosť riešenia 1. úlohy

Správne riešenia	Nesprávne riešenia	Nesprávne riešenia v %	Správne riešenia v %
77	35	31,86	68,14

V druhej úlohe okrem už vyššie uvedených algoritmov mali študenti použiť algoritmus delenia. V tejto úlohe už ale neboli uvedené zlomky v základnom tvare a bolo možné využívať krátenie zlomkov, čo následne uľahčilo výpočet celej úlohy. Pri riešení tejto úlohy bolo 54 správnych riešení a 58 nesprávnych riešení.

Pre úspešné zvládnutie tretej úlohy bolo potrebné uprednostniť operáciu násobenia pred operáciou sčítania, ako aj správne počítať so zmiešaným číslom. Táto úloha spôsobovala študentom najväčšie problémy.

Tabuľka 3 prezentuje počty študentov, ktorí správne, resp. nesprávne riešili tretiu úlohu.

Tab. 3: Úspešnosť riešenia 3. úlohy

Správne riešenia	Nesprávne riešenia	Nesprávne riešenia v %	Správne riešenia v %
20	92	82,14	17,86

Štvrtou úlohou študentov bolo znázornenie určitého zlomku. Pri riešení tejto úlohy boli študenti najviac úspešní. Úspešnosť riešenia ilustruje tabuľka 4.

Tab. 4: Úspešnosť riešenia 4. úlohy

Správne riešenia	Nesprávne riešenia	Nesprávne riešenia v %	Správne riešenia v %
87	25	22,32	77,68

Vyhodnotenie výskumu

Vo výskumnej časti našej práce bolo v centre nášho záujmu implikačnou analýzou zistiť závislosť medzi jednotlivými krokmi riešení. Pod pojmom didaktická premenná sa rozumie taký typ premennej, ktorá je pre učiteľa (aj pre študenta) k dispozícii, a ktorá súvisí so zadaním, riešením úloh, cvičení (daná je úloha s presne určeným „tvárom“ a otázkami). O didaktickej premennej hovoríme vtedy, ak medzi premenným existuje aspoň jedna premenná (môže byť aj numerická), ktorá môže nadobúdať rôzne hodnoty (numerické alebo iné) a môže byť vybraná učiteľom (bez toho, aby zmenil úlohu), a ktorej rôzne hodnoty majú za následok rôzny prístup k riešeniu úlohy, môžu u študentov vyvolať rôzne postupy. (Bereková, 2001) V našom experimente boli didaktickými premennými jednotlivé kroky riešenia daných úloh. Konkrétne šlo o tieto didaktické premenné:

A₁ – študent ovláda algoritmus sčítavania zlomkov

A₂ – študent ovláda algoritmus násobenia zlomkov

A₃ – študent ovláda algoritmus odčítavania zlomkov

B₁ študent využíva pri riešení krátenie zlomkov

B_2 – študent ovláda algoritmus delenia zlomkov

C_1 – študent uprednostní operáciu násobenia pred operáciou sčítania

C_2 – študent vie previesť zmiešané číslo na zlomok

C_3 – študent správne vyrieši úlohu číslo 3

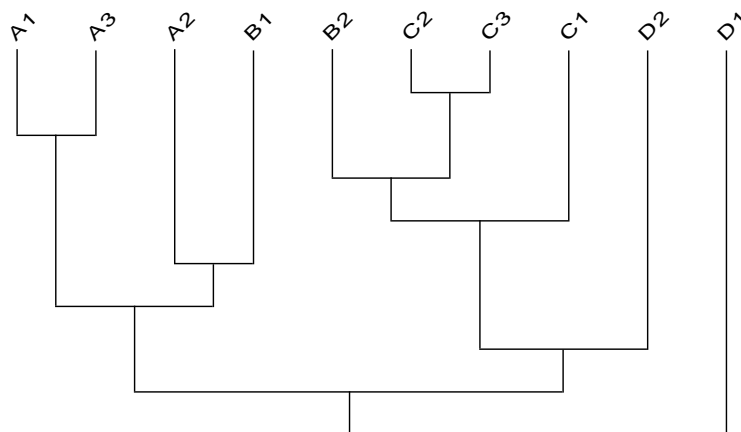
D_1 – študent rieši úlohu iba graficky

D_2 – študent rieši úlohu výpočtom aj graficky

V štatistickom programe CHIC sú vytvorené nasledujúce grafy Similarity tree, Implicative tree, Implicative graph.

SIMILARITY TREE

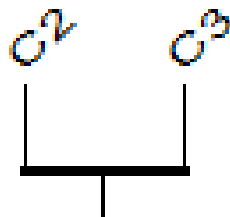
definuje podobnosť a intenzívnosť medzi dvoma triedami premenných definovaných v analýze a-priori. Pri konštrukcii grafu sa do jednej triedy (najvyššia úroveň) spájajú dve premenné na najpodobnejšom základe. Ďalej sa k nim pridajú jedna alebo dve premenné s podobným základom, tie už tvoria ďalšiu, ale slabšiu úroveň. Takýmto spôsobom sa priradia aj ďalšie premenné alebo množiny premenných na podobných základoch. Pre vyhodnotenie výsledkov z experimentu sú významné len dve najvyššie úrovne v grafe, ostatné úrovne sú bezvýznamné.



Ako už bolo spomenuté vyššie pre vyhodnotenie výsledkov z experimentu sú významné len dve najvyššie úrovne v grafe, ostatné úrovne sú bezvýznamné.

Z grafu môžeme vyčítať nasledovné podobnosti:

- najsilnejšia podobnosť je medzi premennými C_2 a C_3 , lebo sú najvyššie spojené, t. j. medzi premennou študent vie previesť zmiešané číslo na zlomok (C_2) a premennou študent správne vyrieši úlohu číslo 3 (C_3). Vzťah medzi nimi tvorí prvú úroveň.(Obr.2)

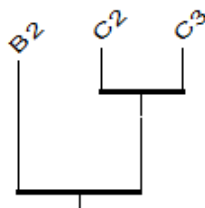


Obr. 3

Je teda pravdepodobné, že študent, ktorý si vie pracovať so zmiešaným číslom, dokáže aj správne vyriešiť celý príklad.

- druhá úroveň je medzi premennými A1– študent ovláda algoritmus sčítavania zlomkov a A3 – študent ovláda algoritmus odčítania zlomkov, pričom táto úroveň je ale slabšia ako medzi premennými C2 a C3. Táto závislosť nie je ani veľmi prekvapivá, nakoľko tieto dva algoritmy sú veľmi podobné, a tak možno s určitosťou povedať, že žiak/študent, ktorý vie zlomky sčítavať, ich vie aj odčítavať.

- v grafe ešte vidieť (menej významné úrovne) medzi premennou B2 množinou premenných {C2, C3} (Obr. 4).



Obr. 4

Premenná B2 sa pripája k množine {C2, C3}, t. j. B2 sa globálne podobá premenným C2 alebo C3. Premenná študent ovláda algoritmus delenia zlomkov (B2) sa vo všeobecnosti podobá tvrdeniam: študent vie previesť zmiešané číslo na zlomok (C2) alebo študent správne vyrieši úlohu číslo 3 (C3). Z našej výskumnej vzorky 55 študentov vedelo správne použiť algoritmus delenia zlomkov (premenná B2), čo predstavuje približne 49%, 16 z nich správne vyriešilo tretiu úlohu (premenná C3), čo znamená, že aj vedeli počítať so zmiešaným číslom (premenná C2) a osem študentov z vyššie uvedených 55 síce správne počítali so zmiešaním číslom (premenná C2), ale tretiu úlohu nevyriešili správne.

- medzi ostatnými nami definovanými premennými nie je žiadna podobnosť, ani súvislosť.

IMPLICATIVE TREE

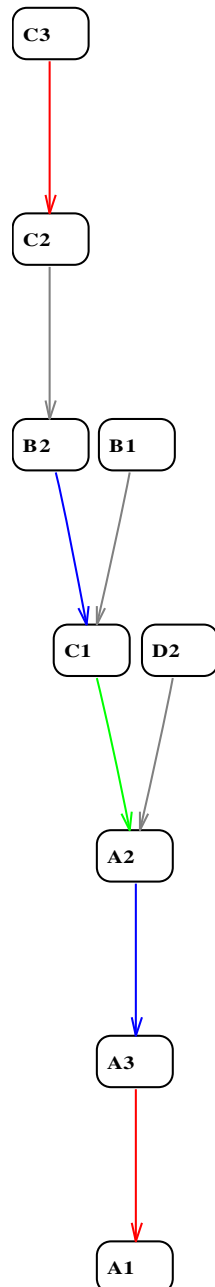
predstavuje implikácie alebo ekvivalencie medzi niektorými premennými a množinami premenných v analýze a-priori. Podobne ako v grafe Similarity tree, sú pre vyhodnotenie výsledkov významné len dve najvyššie úrovne, ostatné sú bezvýznamné pre hodnotenie experimentu.

Tak ako aj v predchádzajúcom prípade (similarity tree), vidíme najsilnejšiu hierarchiu (prvá úroveň) medzi premennými A1 a A3. Študent, ktorý ovláda algoritmus sčítavania zlomkov, ovláda aj algoritmus odčítania zlomkov, naopak to ale platiť nemusí. Vyplýva to z faktu, že medzi premennými sa nachádza implikácia a nie ekvivalencia. Sedemdesiat dva študentov ovládalo algoritmus sčítavania zlomkov a rovnaký počet študentov ovládalo algoritmus odčítavania zlomkov. 67 študentov ovládala obidva algoritmy.

Druhú úroveň tvorí hierarchia medzi premennými C3 a C2, teda ak študent správne vypočítal tretiu úlohu, vedel pracovať so zmiešaným číslom. Sedemdesiat štyri študentov ovládalo prácu so zmiešaným číslom a zároveň správne vypočítalo tretí príklad a len devätnásť študentov napriek tomu, že správne určili zlomok zo zmiešaného čísla, nesprávne vypočítali tretiu úlohu. Z grafu Implicativ tree ďalej vidieť, že premenné B2, C3, C2, C1, A2, A1, A3 tvoria jednu množinu premenných a premenné D2 a B1 vytvárajú druhú množinu.

GRAF IMPLIKÁCIÍ

predstavuje možnosti, ako študent môže rozmýšľať alebo zamýšľať sa nad postupom pri riešení danej úlohy. Farebné rozlíšenie šípok medzi jednotlivými premennými alebo množinami premenných naznačujú, aká percentuálna intenzita je medzi nimi alebo na koľko percent, ak študent má istú vedomosť, sa dostane k tej ďalšej premennej. Pre výsledky experimentu, ako sám autor uvádza, sú podstatné vzťahy medzi premennými od 85 %. (Rumanová, Vallo, 2012)



Ako vidieť z grafu, v našom experimente medzi premennými A3 a A1, ako aj medzi premennými C3 a C2 je 100% závislosť, ktorá vyplýva už aj z vyššie spomínaných tvrdení.

99% závislosť môžeme pozorovať medzi premennými A2 – študent ovláda algoritmus násobenia zlomkov a A3 – študent ovláda algoritmus odčítavania zlomkov, ako aj medzi premennými B2 – študent ovláda algoritmus delenia zlomkov a C1– študent uprednostní operáciu násobenia pred operáciou sčítania.

Medzi premennými C1 – študent uprednostní operáciu násobenia pred operáciou sčítania a A2 – študent uprednostní operáciu násobenia pred operáciou sčítania je 97% závislosť.

A na 89% závislé sú aj premenné D2 – študent rieši úlohu výpočtom aj graficky a A2 – študent ovláda algoritmus násobenia zlomkov, premenné B1 študent využíva pri riešení krátenie zlomkov a C1 – študent uprednostní operáciu násobenia pred operáciou sčítania, ako aj C2 – študent vie previesť zmiešané číslo na zlomok a B2 – študent ovláda algoritmus delenia zlomkov.

Záver

V súčasnosti je často zdôrazňované, že zlomok patrí k pomerne náročným pojmom, ktorý je potrebné postupne rozvíjať v dlhom časovom úseku. Otázky časti a celku majú v školskej matematike celkom zvláštne postavenie. Sú prepojené na ďalšie matematické štruktúry, ich správne pochopenie ovplyvňuje pojmotvorný proces, dajú sa aplikovať vo viacerých oblastiach matematiky, ale aj v spoločenskej a technickej praxi. Patria k tým oblastiam teórie vyučovania matematiky, ktoré sú predmetom výskumu nielen u nás ale aj v zahraničí. Aj napriek veľkému množstvu získaných poznatkov, zostávajú zlomky stále jedným „problémom“ v školskej matematike, čo potvrdzuje aj náš výskum, ktorého čiastočné výsledky sme v článku prezentovali.

Podakovanie

Článok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0948/16 „Vplyv osobnej potreby štruktúry a psychodidaktických aspektov na rozvoj matematických kompetencií“

References

BEREKOVÁ, H. et al. Slovník teórie didaktických situácií, 2. časť. In: *Zborník príspevkov na seminári z teórie vyučovania matematiky*. Bratislava: Univerzita Komenského, 2003, s. 113-122. ISBN 80-223-1874-4.

ČERNEK, P. *Matematika pre 3. ročník*. 2. vyd. Bratislava: SPN – Mladé letá, 2012. 88s. ISBN 978-80-10-02254-0.

HEJNÝ, M. Představa celku a jeho části. In: *Jak učit matematice žáky ve věku 10 – 15 let*. Frýdek- Místek: JČMF, 1999.

HVOLKOVÁ, M. et al. *Hravá matematika. Pracovný zošit pre 4.ročník ZŠ. 1. časť*. Košice: Taktik, 85s. ISBN 978-80-89530-74-8.

RUMANOVÁ, L., VALLO, D. Evaluation of geometric problem by applying the statistical implicative analysis. In: *Statistical Implicative Analysis: of an exploratory posture to a confirmatory posture..* Caen : Université de Caen, 2012, p. 16-21. ISBN 978-2-7466-5256-9.

TICHÁ, M., MACHÁČKOVÁ, J. *Rozvoj pojmu zlomok vo vyučovaní matematiky*. Studijní materiál k projektu Operační program Rozvoj lidských zdrojů. Praha: JČMF, 2006, 37s.

https://moodle.pf.unipo.sk/pluginfile.php?file=%2F17486%2Fmod_resource%2Fcontent%2F0%2F2009-2010%2F13.10.2009-Matematika_ISCED_1-2.upravena_.pdf