Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 1, p. 13 – 18
ISSN 2453-6083

Metodika konštrukčných úloh z geometrie v prostredí DGS

Methodology of Geometrical Construction Tasks in DGS' Environment

Dušan Vallo[a]

[a*]*Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 28 March 2016; received in revised form 5 April 2016; accepted 18 April 2016

Abstract

In this article we deal with some methodological teaching problems that are occurring in teaching to geometric construction tasks. The analysis of problems are related to support of teaching with usage of dynamical geometry software in generally.

Keywords: dynamical geometry software, geometry, didactics of mathematics

Classification: G10, R20

Úvod

Digitálne technológie ponúkajú široké možnosti iného, moderného učenia sa, odovzdávania vedomostí a zručností Sú hybnou silou, ktorá postupne pretvára tradičnú školu a jej výchovno-vzdelávací proces na školách. Do vyučovacieho procesu vstupujú rôzne technológie a softvérové produkty, avšak najvýznamnejší vplyv na jeho kvalitatívnu zmenu majú pedagogické softvéry. Možno ich charakterizovať citátom: *„Na kvalitný pedagogický softvér sa môžeme pozerať ako na „múdry papier" (na ploche obrazovky). Nerieši za nás problémy, pomáha nám však experimentovať, manipulovať s objektmi, objavovať vzťahy a zákonitosti, skúmať a konštruovať. Konštruovať niečo, a tak konštruovať naše poznanie*." Kalaš (2013)

Ak sa zameriame len na výučbu geometrie, ponúkajú sa nám, učiteľom, viaceré pedagogické softvéry, ktoré sa súhrnne označujú ako dynamické geometrických programy (DGS). Tieto programy majú spoločné znaky: sú interaktívne, majú dynamické konštrukcie, umožňujú meniť atribúty konštruovaných útvarov a objektov, atd. Žilková (2009).

Poznamenávame, že DGS sú silný motivačný prostriedok, čo je ich výhodou. Dovoľujú rozvíjať výučbu v duchu zásad didaktického konštruktivizmu, t.j. vyučovať matematiku a geometriu konštruktivistickým prístupom, kde sa zdôrazňuje aktivita žiaka, vytváranie tvorivého prostredia, dobrá pracovná atmosféra v triede, hľadanie súvislostí, rozvoj rôznych reprezentácií a odbúranie formalizmu vo vedomostiach žiakov. Hejný & Kuřina (2001)

V tomto príspevku poukážeme na niektoré metodické poznámky, ktoré sú spojené s použitím DGS pri výučbe geometrických konštrukčných úloh.

[*]Corresponding author; email: dvallo@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.1.13-18

Význam konštrukčných úloh v geometrii

Konštrukčné úlohy v geometrii patria medzi neštandardné úlohy rôznej obtiažnosti, ktoré sú jedinečné a od žiaka vyžadujú aktivitu, aby ich vyriešil. Hejný (1990) uvádza opodstatnenosť zaradenia konštrukčných úloh do výučby s nasledovnými dôvodmi:

a) sú motivačné, podnecujú zvedavosť riešiteľa a vedú k samostatnému objavovaniu zákonitosti,

b) ukazujú žiakovi jasný cieľ, čo má zostrojiť,

c) sú prirodzeným prepojením manuálnych zručností a skúsenosti riešiteľa s jeho geometrickou poznatkovou štruktúrou,

d) sú aplikovateľné v praxi, prepájajú teóriu a prax,

e) sú vhodné ako testovací prostriedok kvality neformálnych poznatkov žiaka

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že riešiť konštrukčnú úlohu prakticky znamená zostrojiť geometrický útvar. Výučba na základnej škole je typická tým, že konštrukcia geometrického útvaru je veľmi dôležitá a priamo sa od žiaka aj vyžaduje. Dôraz sa kladie na presnosť a estetickú stránku konštrukcie, pretože na danom stupni rozvoja poznatkovej štruktúry ide o budovanie konkrétnych predstáv o geometrických objektoch a cielené vytváranie geometrickej poznatkovej štruktúry.

V skutočnosti „riešiť konštrukčnú úlohu“ znamená omnoho viac, keď na základe platných geometrických viet žiak odvodí vzťahy medzi danými a hľadanými prvkami, a následne konštrukčne doplní dané prvky ďalšími tak, aby bol útvar zostrojiteľný.

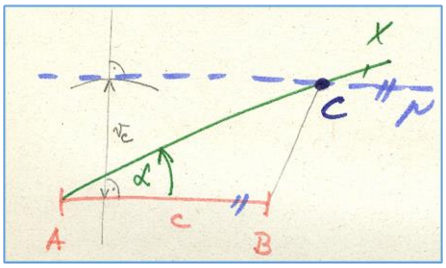
Z didaktických dôvodov sa v riešení konštrukčných úloh vymedzujú tzv. fázy (etapy, kroky) riešenia - rozbor, konštrukcia (postup), skúška, diskusia (záver). Každá fáza je svojím obsahom a účelom dôležitá a nie je didakticky vhodné ju opomenúť, resp. podceniť. Šedivý & Vallo, (2013). Akým spôsobom sa prelínajú, resp. je možné uplatniť, jednotlivé fázy riešenia konštrukčnej úlohy pri použití DGS, uvedieme v ďalšom texte.

Rozbor konštrukčnej úlohy v DGS

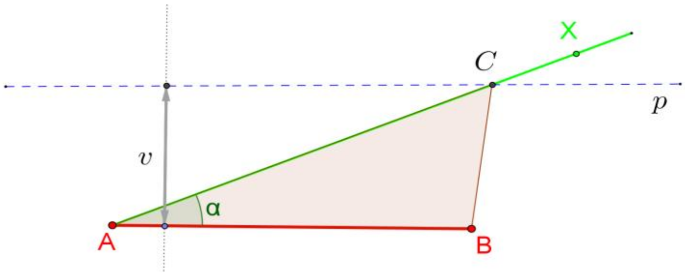
Vzhľadom k tomu, že v rozbore ide o hľadanie kauzalít medzi danými a hľadanými prvkami geometrického útvaru a pedagogický softvér konštrukčnú úlohu nevyrieši automaticky, je samotné použitie DGS v tejto fáze konštrukčnej úlohy viac-menej rozporuplné.

V prvom rade, súčasťou rozboru môže byť aj náčrt (na úrovni ZŠ je to dôležitá súčasť rozboru). Je otázne, či od žiakov s nižšou úrovňou geometrickej predstavivosti vyžadovať načrtávanie „voľnou rukou“ alebo trvať na použití rysovacích pomôcok. V prostredí DGS je voľný náčrt problematický a útvar možno modelovať pomocou úsečiek, kružnicových oblúkov, ... Tie sa na pracovnej ploche však môžu kresliť nezávisle od spoločných bodov prieniku. Samozrejme, obdobne ako pri na klasickej výučbe, deduktívnymi úvahami sa na ploche obrazovky vygeneruje zadaním požadovaný geometrický útvar, ktorý „vyzerá ako narysovaný v zošite“. To môže žiaka priviesť k mylnému záveru o uskutočnení konštrukcie. Súčasne je na zváženie aj časovo-technická realizácia tejto formy rozboru. Názorná ukážka je na obr. 1a,b, kde je naznačený rozbor nasledujúcej úlohy.

Úloha 1. *Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte stranu c, výšku v na stranu c a uhol α.*



Obr. 1a



Obr. 2b

Naviac, takýmto prístupom sa môže porušiť dynamickosť konštrukcie – hlavná výhoda DGS. Na obr. 1 sú jednotlivé geometrické útvary len „poukladané“ na plochu.

Na druhej strane, využitie DGS môže byť je účelné v prípadoch, kedy analógia riešenia nevedie k správnemu výsledku. Ako ukážka poslúžia konštrukčné úlohy, ktoré sa riešia metódou podobnosti. V ich riešeniach sa často využíva pomocný útvar, ktorý aspoň z časti vyhovuje požiadavkám úlohy. Jeho zostrojenie je jednoduché a vhodnou transformáciou sa zobrazí na hľadané riešenie. Ilustračným príkladom je napr. úloha:

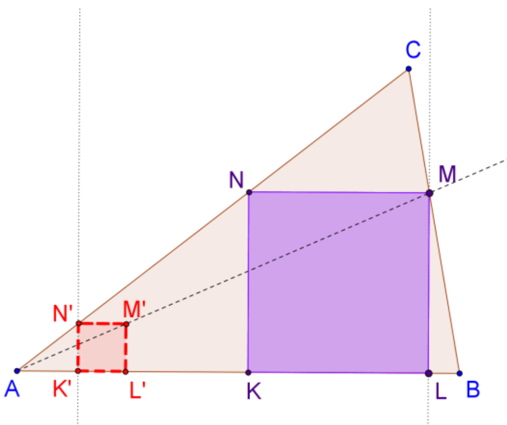
Úloha 2. *Do trojuholníka ABC vpíšte štvorec KLMN tak, aby jeho strana KL ležala na strane AB.*

Riešenie pomocou rovnoľahlosti je naznačené na obr. 2a, kde je vyznačený pomocný štvorec *K’L’M’N‘*.

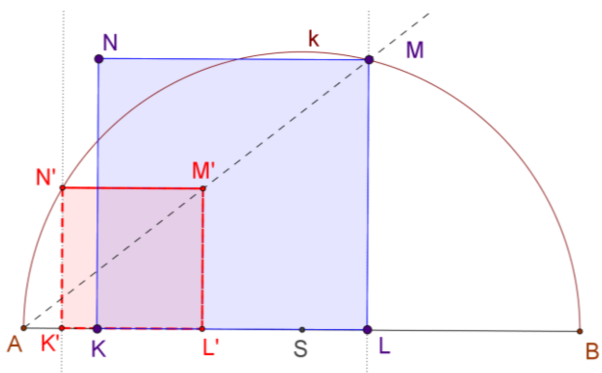
Použitie analógie pri hľadaní riešenia obdobnej úlohy so zadaním:

Úloha 3. *Do polkruhu k s priemerom AB vpíšte štvorec KLMN tak, aby jeho strana KL ležala na priemere AB,*

nie je korektné, pretože rovnoľahlosť je lineárne zobrazenie (obr. 2b). Z pohľadu didaktického konštruktivizmu je chyba dôležitý míľnik v učení sa. Poučenie vo forme priamej konštrukcie a zdôvodnenie , resp. nájdenie chyby v úsudku je preto dôležitý nástroj spätnej väzby.



Obr. 2a



Obr. 2b

V tomto poňatí je však na úvahu, do akej miery ide o rozbor úlohy, samotnú konštrukciu, či dokonca skúšku alebo preverenie správnosti konštrukcie.

Konštrukcia a postup konštrukčnej úlohy v DGS

Z pohľadu geometrie ako vednej disciplíny sa na konštrukciu dívame ako na logický sled krokov, ktoré od daných prvkov vedú k hľadaným prvkom zostrojovaného geometrického útvaru. V tomto ponímaní konštrukcie samotná realizácia - zostrojenie obrázka rysovacími pomôckami nie je nutná.

Avšak v didaktike matematiky, kde sa prihliada aj na dôležitosť prepojenia manuálnych zručností a poznatkovej štruktúry, je zostrojenie obrázka veľmi dôležité. Význam zostrojenia obrázka je zdôraznený aj tým, že sa vo výučbe rozlišujú pojmy „konštrukcia" a „postup".

Ak budeme vychádzať z tejto terminológie, potom zostrojenie obrázku pomocou DGS predstavuje pre žiaka silný motivačný nástroj. Dôvodov je viac, pretože dynamickosť konštrukcie umožňuje:

a) meniť pozíciu vstupných prvkov,

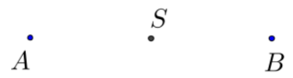
b) upraviť estetický výstup,

c) pomocné konštrukcie dočasne skryť, a tak zdôrazniť hlavnú myšlienku riešenia,

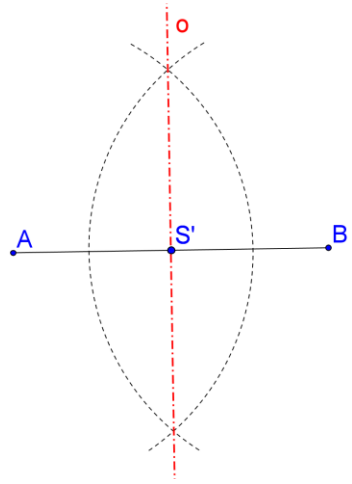
d) využiť preddefinované konštrukčné nástroje v záujme časového zrýchlenia realizácie konštrukcie.

Uvedené skutočnosti sú demonštrované na obr. 2a,b, napr. farebné škála, dizajn čiar, automatická konštrukcia kolmíc, resp. štvorca nástrojom *Pravidelný mnohouholník*.

V prípade, že žiaci zvládajú elementárne konštrukcie, môže učiteľ výhodne aplikovať možnosti programu a konštrukciu „sprehľadniť" skrytím pomocných čiar.



Obr. 3a



Obr. 3b

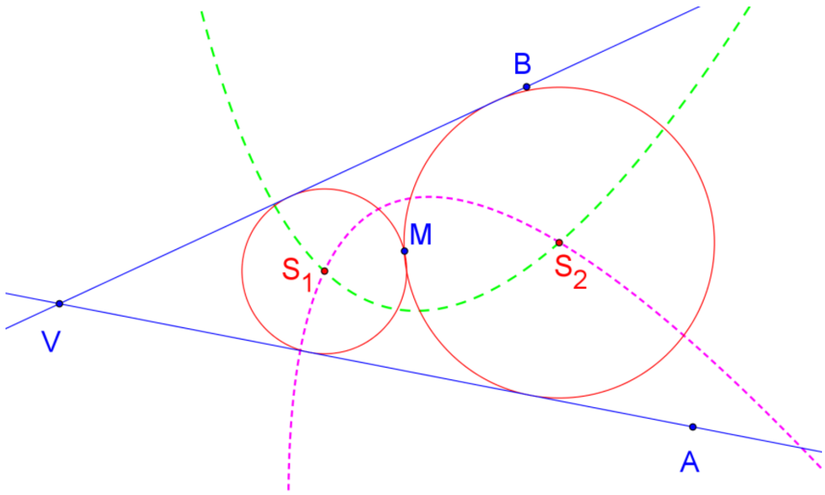
Ak tomu tak nie je a žiaci nezvládajú základné konštrukcie (najmä na nižšom stupni vzdelávania), je dôležité, aby sa všetky konštrukčné kroky (body postupu) realizovali na pracovnej ploche tak, ako ich majú žiaci skonštruovať do zošita. Napríklad, zostrojenie stredu S úsečky AB. Na obr. 3a,b vidno konštrukciu stredu pomocou nástoja *Stred úsečky*, ktorý znázorní stred-bod aj v prípade, že úsečka AB nie je vyznačená. Konštrukcia na obr. 3b je „štandardná".

K nesporným výhodám softvéru však patrí aj to, že umožňuje vykonať konštrukcie, ktoré boli doposiaľ euklidovskými prostriedkami nedosiahnuteľné. Uvedieme ukážku.

Úloha 4. *Do uhla AVB vpíšte kružnicu, ktorá prechádza daným bodom M.*

Ide o úlohu, ktorá sa na strednej škole rieši metódou rovnoľahlosti a s využitím pomocného útvaru – obdobne ako v ukážke na obr. 2a.

Ak vychádzame z definície paraboly ako množiny bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od pevného bodu a danej priamky (bod nie je incidentný s danou priamkou) je rovnaká, potom môžeme s pomocou DGS vyriešiť úlohu netradične. Keďže softvér umožní užívateľovi nakresliť kužeľosečku ako „súvislú krivku“, prienikom odpovedajúcich dvoch parabol sú stredy hľadaných kružníc (obr. 4) Gunzel (2012)



Obr. 4

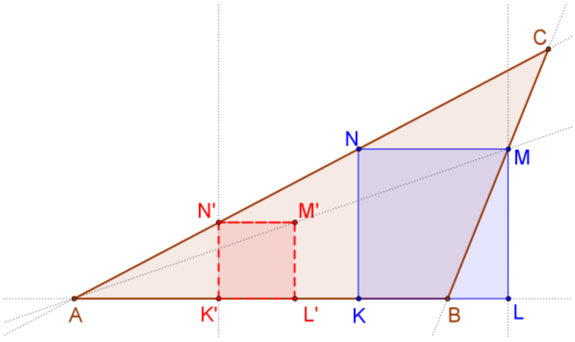
Hoci ide o „elegantné“ riešenie, z didaktického hľadiska je opodstatnená otázka, do akej miery je takáto konštrukcia na úrovni poznatkov súčasných žiakov strednej školy vhodná a použiteľná.

Skúška a diskusia konštrukčnej úlohy v DGS

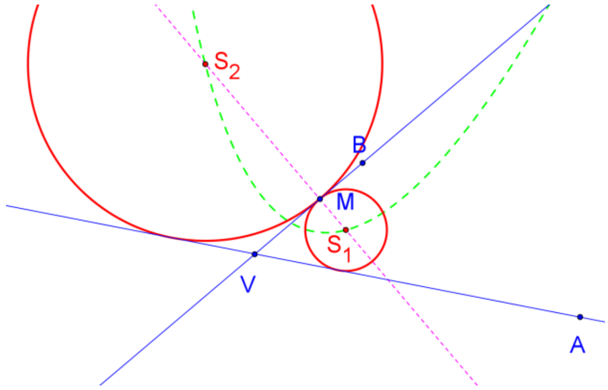
Ak sú v zadaní konštrukčnej úlohy uvedené konkrétne číselné vstupy – hodnoty dĺžok strán, výšok, veľkosti uhlov, ... , skúška na úrovni ZŠ, resp. SŠ sa redukuje na verifikáciu premeraním rozmerov zostrojeného útvaru. V geometrii však meranie nemožno považovať za dôkaz, a preto podstatou skúšky je overenie správnosti konštrukcie, či získané útvary spĺňajú všetky podmienky danej úlohy (na základe incidenčných vzťahov a definícií množín bodov danej vlastnosti).

V DGS existujú možnosti, ako zadať konkrétny číselný vstup a ďalej s ním pracovať. Nie je však zaručené, že jednotky, v ktorých počítač zobrazuje dané úsečky, aj reálne zodpovedajú štandardne používaným jednotkám miery. Zachováva sa len pomer podobnosti.

Na druhej strane, dynamickosť konštrukcií je neoceniteľná vlastnosť pri diskusiách o počte a existencii rôznych riešení konštrukčnej úlohy. Napríklad na obr. 5a je zrejmé, že úloha 2 nemá vyhovujúce riešenie pre tupouhlý trojuholník *ABC* s tupým uhlom pri vrchole *A*, resp. *B* (strana *KL* leží na priamke *AB,* nie strane *AB*); prípadne, ako sa zmení riešenie úlohy 4, ak bod *M* leží na ramene *VB* (obr. 5b).



Obr. 5a



Obr. 5b

Záver

Hoci metodika riešenia konštrukčných úloh z geometrie patrí k pomerne dobre prepracovaným tematickým celkom školskej geometrie, ide o náročné učivo, ktorého zvládnutie spôsobuje žiakom značné problémy. Domnievame sa, že implementáciou DGS do výučby sa môže toto učivo stať príťažlivejším a ľahšie zvládnuteľným aj pre žiakov s nižšou úrovňou geometrickej predstavivosti.

Ako každý modernizačný prúd, aj tento má svoje nedostatky, resp. cesty, ktoré vedú iným smerom, než sme ako učitelia boli zvyknutí. Metodické poznámky a postrehy uvedené v článku vychádzajú z osobných skúseností, a keďže doposiaľ nie sú tieto úvahy podporené relevantným pedagogickým výskumom, zostávajú pre potreby praxe len v rovine odporúčaní.

Literatúra

Hejný, M., Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál.

Kalaš, I. a kol. (2013). *Premeny školy v digitálnom veku.* Bratislava: SPN – Mladé letá

Gunzel, M. a kol (2012). *Integrace elektronických prostředí pro počítačem podporovanou výuku matematiky*. České Budějovice: JU v Českých Budějovicích.

Šedivý, O. , Vallo, D. (2013). *Prečo vyučovať Slovné a konštrukčné úlohy?* Nitra: FPV UKF v Nitre

Vaníček, J. (2009). *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha: Ped. fakulta UK v Praze

Žilková, K. (2009). *Školská mtematika v prostredí IKT (Informačné a komunikačné technológie)*. Bratislava: UK Bratislava

Poďakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou projektu KEGA č. 016UKF-4/2016 s názvom *Implementácia konštruktivisticky orientovaného vyučovania matematiky s dôrazom na aktívne nadobúdanie poznatkov žiakmi v kontexte bilingválneho vzdelávania*.