

## Kreslíme ako Escher alebo umenie zhodných zobrazení The Drawing as Escher or the Art of Transformations

Edita Smiešková

*\*Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1,  
SK-949 74 Nitra*

Received 11 September 2015; received in revised form 24 September 2015; accepted 1 October 2015

---

### Abstract

The submitted article aims to present possibility of how to teach geometric transformations in connection with visual arts. The author of the article believes that the simple art techniques can motivate and activate pupils in teaching of mathematics, regardless of their age and ability. Beside that, the non traditional tasks have an affect on the motivation of pupils, too. The topic of geometric transformations give us space to teach mathematics in interesting way and offer pupils to be creative.

**Key words:** Motivation. Teaching Geometry. Creativity.

**Classification:** B60, C20, G10

---

### Úvod

K často riešeným problémom vo vzdelávaní na školách patria okrem problémov so sústredením, aj problémy s motiváciou žiakov k práci. Niektorí autori vidia riešenie tohto problému vo vytvorení väčšieho priestoru pre tvorivosť žiakov pri učení a vyučovaní. To zároveň predstavuje aj jeden zo základných princípov a cieľov modernej pedagogiky a humanisticky orientovanej výchovy (Lokšová, Lokša, 1999).

Jedným z princípov zvyšovania motivácie žiakov je zabezpečiť, aby vo vyučovaní boli používané tvorivejšie úlohy, pretože nerozvíjajú iba tvorivosť, ale aj samostatnosť a motiváciu (Durič a kol., 1986).

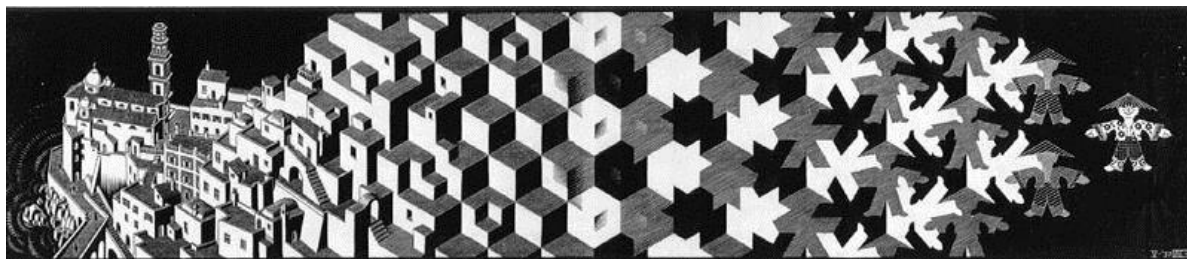
Tvorivé úlohy sa vyznačujú tým, že sú pre žiakov nové a neznáme, obsahujú prvky nejasnosti, neurčitosti a sú prekvapivé. Nie sú pri nich určené všetky podmienky riešenia úlohy. Ich riešenie si vyžaduje tvorivý postup, ktorý sa vyznačuje aktívnou poznávacou činnosťou (hľadanie, experimentovanie, bádanie). Takýmito úlohami môžu byť úlohy spájajúce matematiku a výtvarné umenie. Vhodným príkladom spojenia matematiky a umenia sú teselácie, ktoré tvoril holandský grafik M. C. Escher, ktorý nebol matematikom, avšak študoval ornamentálne vzory, v ktorých sa uplatňujú matematické princípy zhodných zobrazení.

## Kto je M.C. Escher?

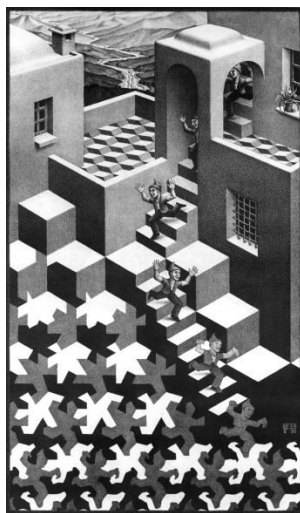
M.C. Escher alebo Maurits Cornelis Escher sa narodil v Leewarden v Holandsku v roku 1898. Patrí medzi najznámejších grafikov a jeho diela sú známe po celom svete. Počas života, jeho dielo bolo vnímané a považované za príliš staromódne, a tiež príliš matematické. Našu pozornosť v jeho dielach upúta množstvo matematických princípov a rôznych matematických prvkov. Escherove obrazy obsahujú systematické princípy konštrukcie. Hranice medzi možným a nemožným svetom dávajú Escherovmu dielu zvláštne postavenie nielen vo výtvarnom umení, ale aj v matematike či geometrii. Pre Eschera bol povrch videného sveta iba kúskom látky, ktorú môžete nastrihať, zložiť, vytvarovať a usporiadať rôznymi spôsobmi. Ako vynikajúci kresliar si dal za úlohu portrétovať tieto neskutočné transformácie priestoru v rámci známych hraníc vystavených na kuse papiera. Výsledné obrazy sa stali obľúbenými umeleckými dielami pre množstvo divákov po celom svete. Escher o svojej práci v liste synovcovi Rudolfovi Escherovi z 17.1.1944 píše, že v prvom rade je jeho „*práca tesne spojená s pravidelným rozdeľovaním roviny. Všetky obrazy posledných rokov vychádzajú z princípu kongruentných figúr, ktoré nezanechávajú prázdne miesta a idú do nekonečna alebo aspoň bez obmedzenia zapĺňajú rovinu*“. Escher vo svojej tvorbe zašiel oveľa ďalej ako len k vypĺňaniu roviny, venoval sa aj rezom roviny a tvoril rôzne priestorové objekty (Escher, Locher, Veldhuysse, 2009).

## Escherove teselácie

Escher vytvoril umelecké diela v matematike známe ako teselácie. Poznal pravidelné aj nepravidelné teselácie. Jeho záľuba v teseláciách začala návštevou chrámu v Alhambre v Španielsku v roku 1926. Ornamenty, ktoré tu videl boli podnetom pre jeho umelecké diela. Escher dlho študoval tieto ornamentálne vzory, až nakoniec prišiel s kompletným systémom ich tvorby. Prvými dielami inšpirovanými týmto umením sú Metamorfózy (obr. 1) a Cyklus (obr. 2).



Obr. 1: Metamorfózy I, 1937, drevorez, 195 x 908 mm

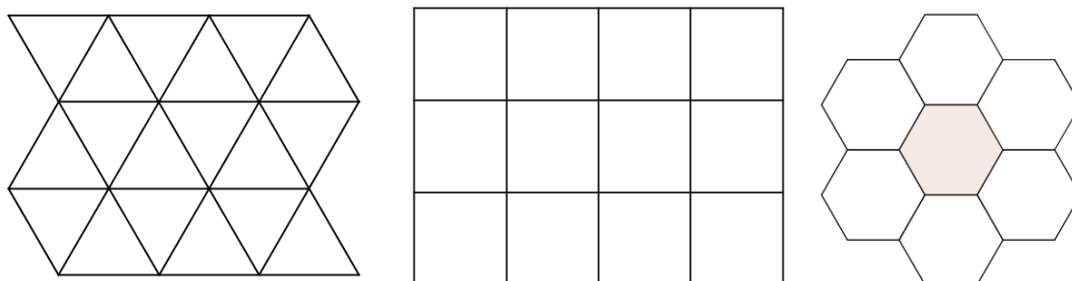


**Obr. 2:** *Cyklus, 1938, litografia, 475 x 279 mm*

### **Teselácie**

Definícia teselácií, uvedená v Oxfordskom matematickom slovníku (Clapham, Ch., Nicholason, J., 2009) je, že teselácie vyplňajú rovinu rovinnými útvarmi bez vzájomného prekrytia a medzier. Teselácie môžu byť pravidelné alebo nepravidelné.

V školskej matematike sa žiaci oboznamujú iba s pravidelnými teseláciami, ktoré vznikli z rovnostranných trojuholníkov, štvorcov alebo pravidelných šesťuholníkov (obr. 3). Žiaci sa s pojmom teselácie vo vyučovaní matematiky neoboznamujú priamo, ale tento pojem je skrytý v konštrukčných úlohách s inými vzdelávacími cieľmi.



**Obr. 3:** *Rovnostranný trojuholník, štvorec a šesťuholník*

Porozumieť Escherovmu umeniu znamená porozumieť hlavným princípom teselácií. Existujú 4 základné spôsoby ako vytvoriť teselácie pomocou zobrazení, a to: posunutím, otočením, posunutou súmernosťou.

### **Ako zaradiť teselácie do vyučovania matematiky?**

Escherovo umenie tvorby teselácií bolo podnetným na vytvorenie pracovných listov a úloh pre workshop organizovaný na katedre matematiky Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre s názvom: *Kreslíme ako Escher alebo umenie zhodných zobrazení*.

Workshop sa konal 20.5. 2015 a bol určený pre žiakov vybraného nitrianskeho gymnázia. Zúčastnilo sa ho 54 žiakov vo veku od 16 – 17 rokov, ktorých sme rozdelili do troch približne rovnako veľkých skupín. Samotný workshop prebiehal v troch etapách po 60 minút.

Vzdelávacie ciele workshopu:

- podporiť medzipredmetové vzťahy, a tak motivovať žiakov k učeniu sa matematiky najmä geometrie;
- ukázať žiakom použitie zhodných zobrazení v umení ;
- dať žiakom priestor na tvorivosť a vlastné objavovanie;
- rozvinúť geometrickú predstavivosť žiakov.

Workshop sa začal úvodom o teseláciách, kde sa nachádzajú v našom okolí a ako ich možno nájsť aj v dielach Eschera. Následne sme žiakov rozdelili do dvojíc, trojíc alebo štvorcíc podľa toho ako prejavili záujem o spoločnú prácu.

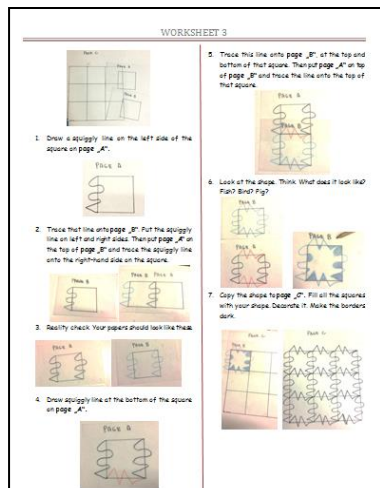
Chceli sme od žiakov, aby vytvorili vlastné teselácie podľa predloženého postupu. Každá skupina dostala iný postup tvorby teselácií. Konkrétne sme vytvorili 6 pracovných listov s rôznymi postupmi ako tvoriť teselácie. Pracovné listy boli vytvorené v anglickom jazyku z dôvodu, že išlo o žiakov bilingválneho gymnázia. Tri pracovné listy boli zamerané na tvorbu teselácií z rovnostranného trojuholníka a tri na tvorbu teselácií zo štvorca. Pri jednotlivých pracovných listoch sme sa snažili použiť rozličné postupy tvorby, aby sme žiakom ukázali otvorenosť tohto problému.

Na konci workshopu si žiaci vybrali reprezentanta svojej skupiny, ktorí prezentoval postup, akým vytvorili svoje teselácie. Cieľom bolo, aby oboznámili aj ostatných spolužiakov mimo svojej skupiny so spôsobom tvorby teselácií z daného pracovného listu. Pre nás to bola spätná väzba, či žiaci skutočne jednotlivým postupom porozumeli. Tvorivú atmosféru workshopu podporili nielen rozdelením žiakov do skupín, ale aj vhodnou hudbou.

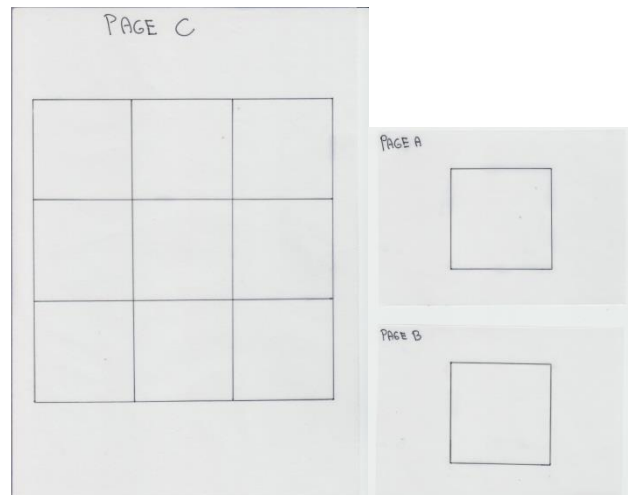
### **Ukážka pracovného listu**

V tomto článku popíšeme iba jeden vybraný pracovný list (obr. 4). Žiaci mali podľa tohto pracovného listu vytvoriť teseláciu vychádzajúcu z rovinného útvaru - štvorca, pričom pri tvorbe teselácie mali využiť posunutie.

Pracovný list 3 použilo pri riešení 9 žiakov. Každý žiak k tomuto pracovnému listu, okrem postupu dostal tri transparentné papiere (obr. 5). Na dvoch menších papieroch bol narysovaný rovnako veľký štvorec a tieto papiere sme označili ako PAGE A a PAGE B. Na treťom transparentnom papieri označenom ako PAGE C bolo narysovaných 9 rovnako veľkých štvorcov ako na papieroch PAGE A a PAGE B, narysované boli tesne vedľa seba. Úlohou pre žiakov nebolo postup z pracovného listu kopírovať, ale sa ním inšpirovať pre vlastnú tvorbu.



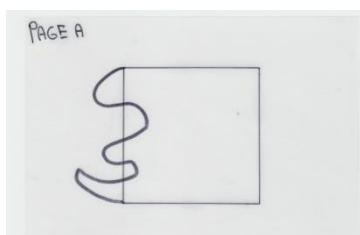
Obr. 4: Pracovný list 3



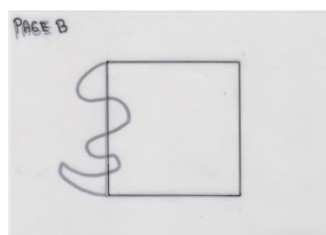
Obr. 5: Transparentné papiere

Ďalej bližšie popíšeme postup, ktorý bol žiakom na tomto pracovnom liste predložený:

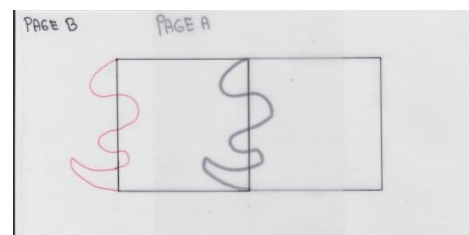
- 1) Narýsuj ľubovoľnú krivku na ľavej strane štvorca na PAGE A (obr. 6).
- 2) Prekresli túto krivku na PAGE B (obr.7). Nakresli túto krivku na pravú a aj na ľavú stranu štvorca na PAGE B. Potom polož PAGE A na vrch PAGE B a prekopíruj túto krivku aj na pravú stranu štvorca na PAGE A (Obr. 8).
- 3) Over si, že tvoje dva papiere PAGE A a PAGE B vyzerajú ako na obr. 9.
- 4) Nakresli ľubovoľnú krivku na spodnej strane štvorca na PAGE A (obr. 10).
- 5) Prekopíruj túto krivku na PAGE B na vrchnú a na spodnú stranu štvorca na PAGE B. A potom polož PAGE A na PAGE B a prekopíruj túto krivku na vrch štvorca na PAGE A. (obr. 11).
- 6) Pozri sa na tvary, ktoré ti vznikli. Čo ti pripomínajú? Rastlina? Zviera? (obr. 12)
- 7) Prekopíruj tento tvar na PAGE C. Vyplň všetky štvorce na PAGE C týmto tvarom. Základný tvar vyznač a farebne dotvor svoje dielo (obr. 13).



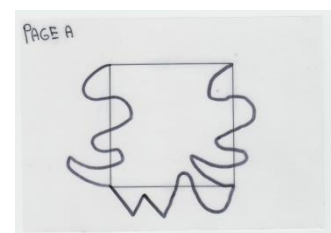
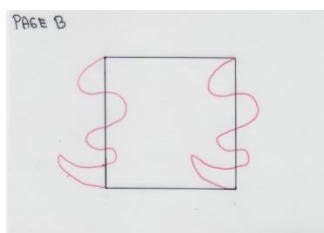
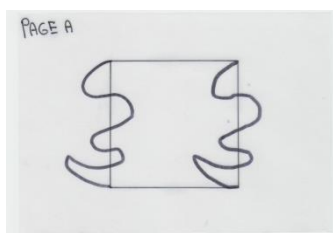
Obr. 6: Krivka na ľavej strane štvorca

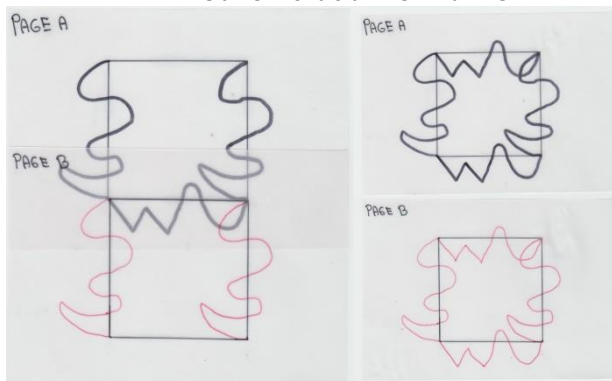
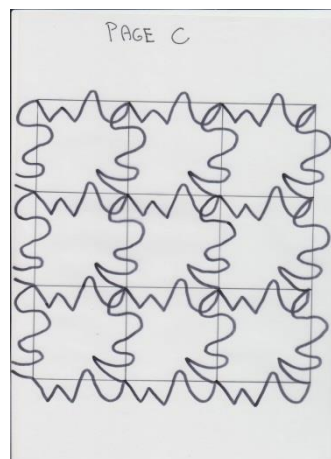
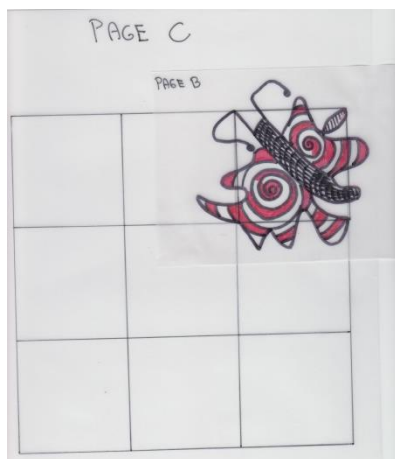


Obr. 7 Papier PAGE A je pod PAGE B



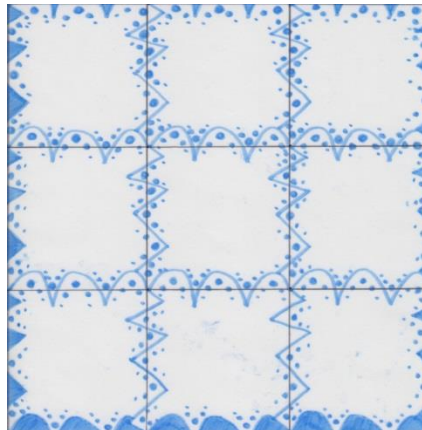
Obr. 8: PAGE A je pod PAGE B

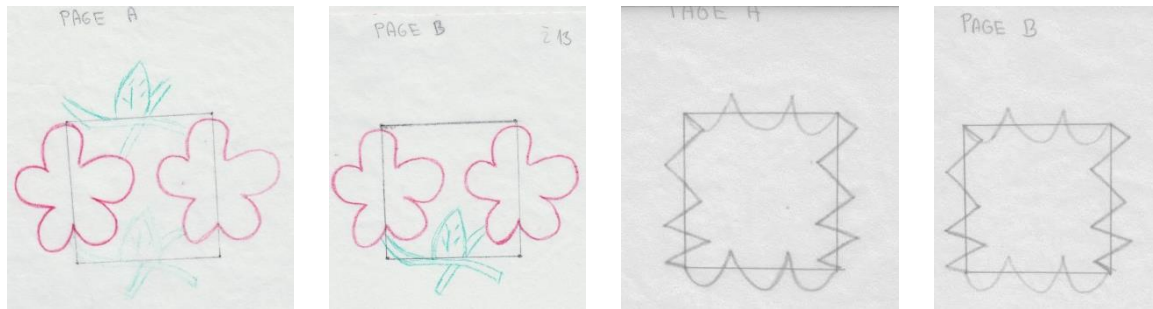


**Obr. 9:** Kontrola PAGE A a PAGE B**Obr. 10:** Krivka na spodnej strane štvorca**Obr. 11:** PAGE B je na PAGE A**Obr. 12:** Hľadanie tvaru**Obr. 13:** Vyplnenie PAGE C

### Riešenia žiakov

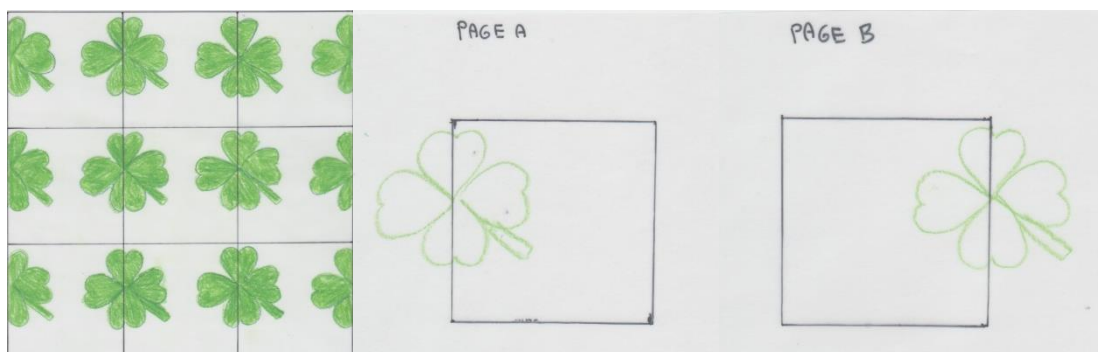
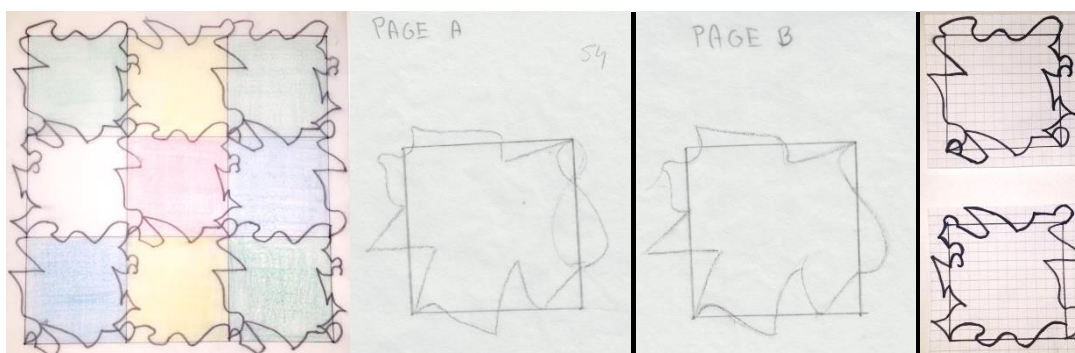
Úlohu riešilo 9 žiakov, z ktorých 7 žiakov úlohu splnilo, a jeden žiak splnil úlohu čiastočne a jedno riešenie sme nezaradili ani k správnym, ani k nesprávnym riešeniam. Okrem splnenia úlohy sme hodnotili aj tvorivosť riešení, avšak 60 min. nebolo postačujúcich na celkové dokončenie prác. Na obr. 14 sú dve riešenia, ktoré považujeme za správne. Pri prvom riešení si žiak hneď na začiatku vymyslel tvar kvetiny, ktorým vyplní rovinu. Žiak pri tvorbe použil posunutie správne a vhodne. Zaujímavé je, že krivku pre spodnú stranu štvorca si zvolil ako uzavretú krivku (tvar kvetiny). Pri druhom riešení vidíme, že žiak postupoval presne podľa postupu, najskôr navrhol tvar, ktorým následne farebne dotvoril. Postup riešenia žiakov ilustrujú odovzdané časti PAGE A a PAGE B (obr. 15).



**Obr. 14:** Správne riešenia**Obr. 15:** PAGE A a PAGE B správnych riešení žiakov

Na obr. 16 je ďalšie riešenie žiaka. Riešenie so štvorlístkom považujeme za čiastočne správne. Podľa PAGE A a PAGE B usudzujeme, že žiak nevynaložil veľkú námahu a hneď si nakreslil tvar štvorlístka, ktorý síce správne posunul, čo môže vidieť na PAGE A a potom následné prekreslenie tvaru štvorlístka na PAGE B. Žiak neriešil dolnú a hornú stranu štvorca, preto toto riešenie považujeme iba za čiastočne splnené.

Na obr. 17 je ďalšie žiacke riešenie, ktoré sme nezaradili ani k správnym, ani k nesprávnym riešeniam. Podľa PAGE A a PAGE B vidíme, že žiak si nakreslil ľubovoľne všetky strany štvorca a tieto prekreslil z PAGE A na PAGE B, nevytvoril však útvar, ktorý by pokrýval rovinu resp. teseloval. Pri ďalšej tvorbe si pomohol štvorčekovým papierom (obr. 17). Vidíme, že žiak nakreslil dva útvary, ktoré sa navzájom „doplňajú“. Jeho úlohou však bolo vytvoriť jeden teselujúci útvar. Výsledné riešenie vytvoril striedaním dvoch útvarov zo štvorčekových papierov. Riešenie je iné ako všetky ostatné riešenia, a teda tento žiak sa nepridržiaval daného postupu. V jeho riešení by sme okrem posunutia mohli nájsť aj ďalšie zhodné zobrazenia. Tento žiak bol pri tvorbe podľa nášho názoru naozaj tvorivý.

**Obr. 16:** Čiastočne správne žiacke riešenie**Obr. 17:** Čiastočne správne žiacke riešenie

Na základe dotazníkov a rozhovoru so žiakmi sme niektorých inšpirovali k ďalšej tvorbe. Žiaci v škálovacom dotazníku hodnotili aj zrozumiteľnosť pracovných listov. Pracovný list 3 ohodnotili na škále od 1 – 5, kde 1 znamenalo úplne zrozumiteľný a 5 nezrozumiteľný, nasledovne: 2 žiaci zakrúžkovali 1, 6 žiakov zakrúžkovalo 2 a 1 žiak zakrúžkoval 3. Na základe toho subjektívne hodnotíme, že náš pracovný list bol zrozumiteľný a primeraný ich veku.

V 29% prípadoch sa žiaci vyjadrili, že sa im workshop *veľmi páčil* a 67% sa *páčil* a iba 4% žiakov z celkového počtu 54 hodnotili workshop ako *priemerný*.

Obsah workshopu bol pre 22% žiakov veľmi zaujímavý, pre 69% zaujímavý a 9% žiakov ho hodnotilo ako obyčajný.

A či sa žiaci naučili niečo nové? 27% žiakov sa naučilo veľa nových vecí, 61% žiakov sa niečo nové naučilo, 6% aspoň niečo nové sa naučili, ale bolo toho málo a 6% žiakov sa vôbec nič nové nenaučili.

## Záver

Počas workshopu si niektorí žiaci našli vlastný postup tvorby, čo považujeme za kreatívne a tvorivé. Naším zámerom nebolo, aby žiaci vytvorili kópiu Escherovho diela, ale aby si uvedomili rozmanitosť postupov pri vypĺňaní roviny. Okrem toho sme chceli, aby si žiaci uvedomili využiteľnosť zhodných zobrazení v rovine.

Zo skúseností z realizácie workshopu a výsledkov našich pozorovaní sme dospeli k záveru, že na to, aby bol žiak schopný vytvoriť teseláciu podľa predloženého návodu nepotrebuje mať formálne vedomosti o zhodných zobrazeniach, pretože tieto sú v postupe skryto zakomponované. Dôležitým predpokladom na splnenie úlohy z workshopu bola predstavivosť, manuálna zručnosť, a tiež tvorivosť. Úlohy s teseláciami patria medzi úlohy, ktoré dávajú žiakom priestor na tvorivosť, a tak ich môžu motivovať k učeniu sa matematiky. Motivačne na žiakov pôsobí aj spojenie matematiky a výtvarného umenia. Navyše teselácie, ich tvorba, pozorovanie a zamýšľanie sa nad princípmi ich tvorby môžu rozvíjať geometrickú predstavivosť žiakov.

## Literatúra

Clapham, Ch., Nicholason, J. 2009. The Concise Oxford Dictionary of Mathematics.

New York: Oxford University Press Inc, 2009.

Csachová, L. 2010. *Pravidelné a náhodné teselácie vo vyučovaní matematiky, dizertačná práca*. Praha: PF UK v Prahe, 2009.

Durič, L. a kol. (1986). Psychológia tvorivosti so zameraním na žiakov základných škôl. *Psychológia a škola X*. Bratislava: SPN, 1986.

Escher, M. C., Locher, J. L., Veldhuyse, W. F. 2009. M. C. Escher a jeho magie. Praha: Slovart, 2009.

Harris, A. 2000. The Mathematics of Tessellation. London: St Martin's college, 2000.

Lokšová, I., Lokša, J. 1999. Pozornost, motivace, relaxae a tvořivost dětí ve škole. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-205-X.