

Niekoľko dôkazov Mongeho vety o troch kružniciach

Several Proofs of Monge's Three-Circle Theorem

Dušan Vallo^a

^a*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences and Informatics, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, 949 01 Nitra, Slovakia*

Received October 1, 2026; received in revised form October 15, 2026; accepted October 19, 2026

Abstract

In this article, several distinct proofs of Monge's theorem on three circles are presented. The objective is to demonstrate the integration of separate geometric findings into a coherent framework and to direct the reader towards specific geometric interrelations. The paper is primarily addressed to students of mathematics education taking foundational geometry courses as a part of their university studies.

Keywords: Monge's Circle Theorem, Desargues Theorem, Menelaus' Theorem, stereometry

Classification: 97G40

Úvod

Geometria patrí medzi matematické disciplíny, ktoré svojím obsahom a požiadavkami kladú na študenta učiteľstva matematiky vysoké nároky. Zvládnutie obsahovej náplne základných kurzov z geometrie vyžaduje vstupné vedomosti zo stredoškolského učiva, dostatočnú názornú priestorovú a geometrickú predstavivosť, ako aj vyššiu úroveň abstraktného myslenia. Názorný štýl výučby sa dá prakticky realizovať aj formou príkladov, v riešení ktorých sa aplikujú rôzne prístupy a metódy. Obdobná situácia je možná aj pri predkladaní dôkazov niektorých viet. Práve to je cieľom tohto príspevku - prezentovať niekoľko odlišných dôkazov Mongeho vety o stredoch rovnôľahlostí troch kružníc, ktoré by mohli čitateľa (študenta učiteľstva alebo aj učiteľa z praxe) inšpirovať a upriamiť pozornosť na niektoré interdisciplinárne vzťahy a súvislosti.

Mongeho veta o troch kružniciach

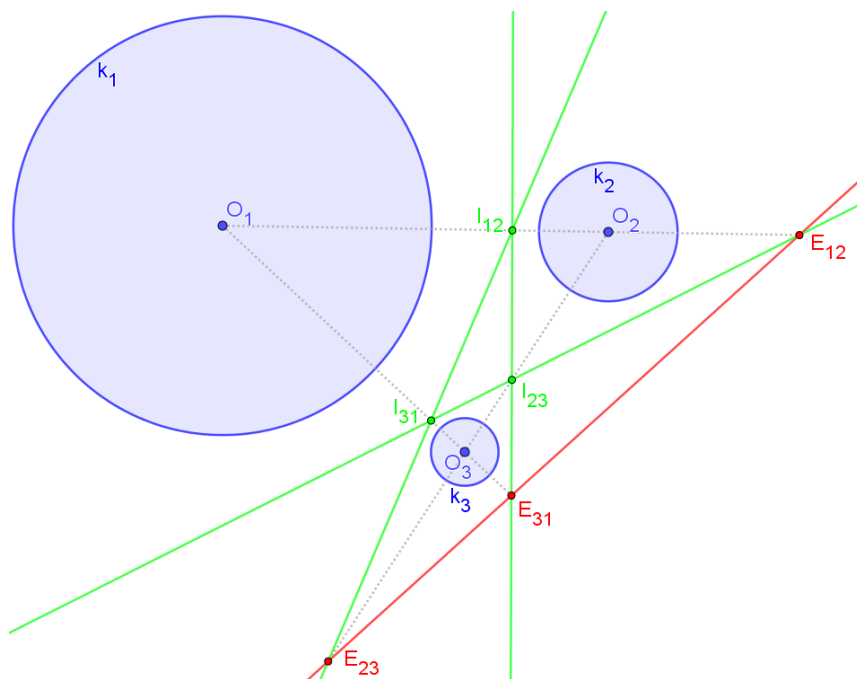
Mongeho veta o troch kružniciach patrí medzi známe geometrické tvrdenia, ktoré sú súčasťou vysokoškolských kurzov z geometrických disciplín.

Veta:

Ak tri kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ a $k_3(O_3, r_3)$ majú navzájom rôzne stredy a polomery, potom pre vonkajšie stredy rovnôľahlostí E_{12}, E_{23}, E_{31} , resp. vnútorné stredy rovnôľahlostí I_{12}, I_{23}, I_{31} , dvojíc kružníc k_1, k_2 ; k_2, k_3 a k_3, k_1 , potom kolíneárnymi sú trojice bodov:

*Corresponding author: dvallo@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2026.10I.2.21-32

- a) $E_{12}, E_{23}, E_{31},$
- b) $I_{12}, I_{23}, E_{31},$
- c) $I_{12}, E_{23}, I_{31},$
- d) $E_{12}, I_{23}, I_{31}.$

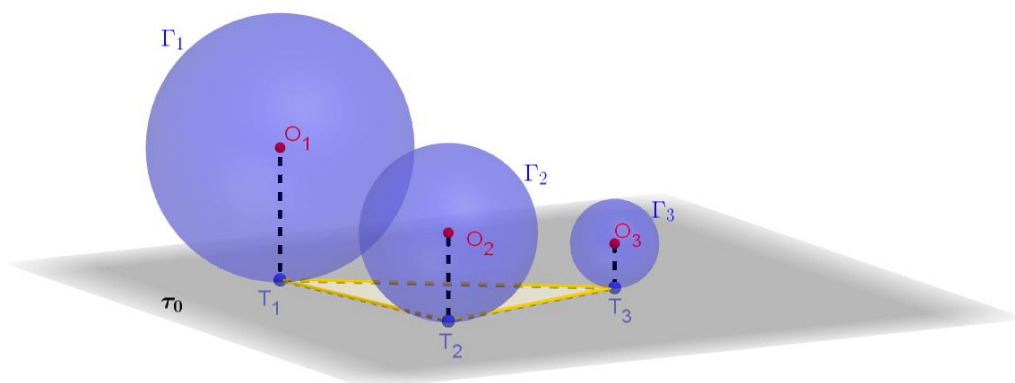


Obr. 1: Mongeho veta o troch kružniciach

Dôkaz – stereometrický

Uvažujme tri guľové plochy $\Gamma_1(O_1, r_1), \Gamma_2(O_2, r_2)$ a $\Gamma_3(O_3, r_3)$, ktorých prienik s rovinou $\overrightarrow{O_1O_2O_3}$ sú uvažované kružnice $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$ a $k_3(O_3, r_3)$.

Nech τ_0 je spoločná dotyková rovina daných troch guľových plôch. Jej existenciu zaručíme konštrukčne: v rovine τ_0 vyberieme tri navzájom rôzne body T_1, T_2 a T_3 , ktoré budú dotykovými bodmi guľových plôch $\Gamma_1(O_1, r_1), \Gamma_2(O_2, r_2)$ a $\Gamma_3(O_3, r_3)$ s rovinou τ_0 .



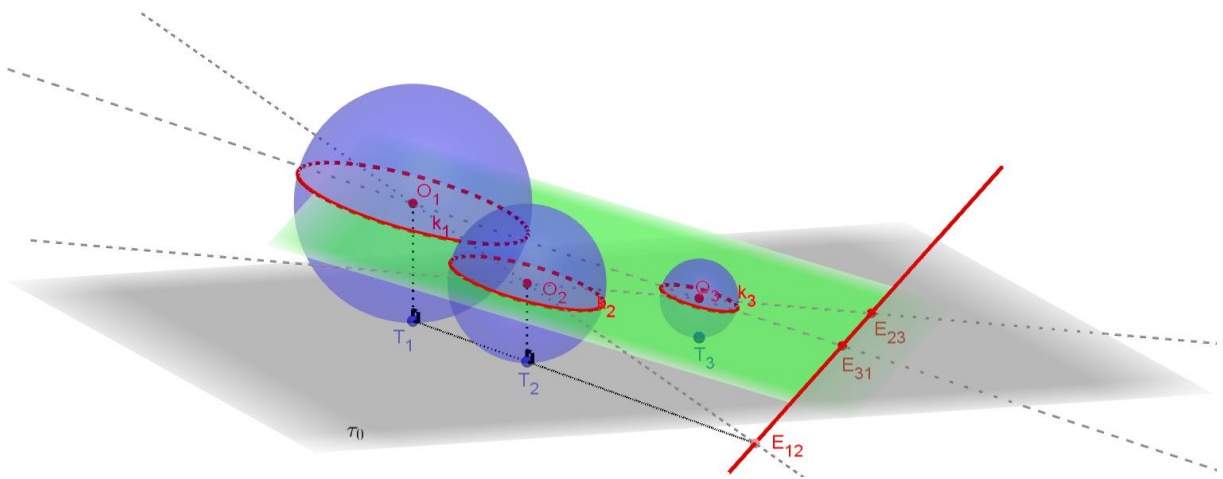
Obr. 2: Guľové plochy $\Gamma_1(O_1, r_1), \Gamma_2(O_2, r_2)$ a $\Gamma_3(O_3, r_3)$ v rovnakom polpriestore

V bode T_1 zostrojíme kolmicu na rovinu τ_0 a na kolmici určíme bod O_1 tak, aby $|T_1O_1| = r_1$ a zostrojíme guľovú plochu $\Gamma_1(O_1, r_1)$; analogicky zvýšné dve guľové plochy $\Gamma_2(O_2, r_2)$ a $\Gamma_3(O_3, r_3)$.

Nech body O_2 a O_3 ležia v rovnakom polpriestore určenom rovinou $\overrightarrow{O_1O_2O_3}$ a bodom O_1 . Obr. 2.

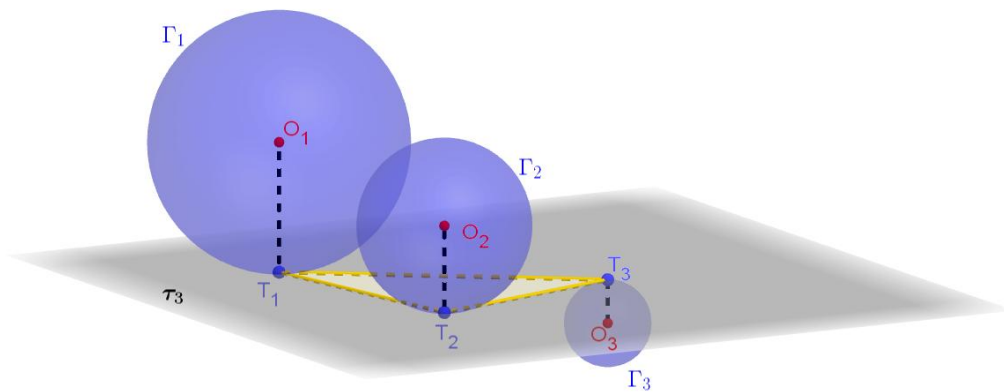
Keďže podľa predpokladu majú guľové plochy rôzne polomery, je rovina $\overrightarrow{O_1O_2O_3}$ rôznobežná s rovinou τ_0 . Roviny $\tau_0, \overrightarrow{O_1O_2O_3}$ sa pretínajú v priesečnici, na ktorej ležia vonkajšie stredy rovnôľahlostí body E_{12}, E_{23}, E_{31} .

Dôkaz, že uvažované priesečníky sú stredy rovnôľahlostí vyplýva z podobnosti trojuholníkov, napr. $\triangle O_1T_1E_{12} \sim \triangle O_2T_2E_{12}$ podľa vety *uu* ($\sphericalangle O_1E_{12}T_1 \cong \sphericalangle O_2E_{12}T_2$; $\sphericalangle O_1T_1E_{12} \cong \sphericalangle O_2T_2E_{12}$).



Obr. 3: Vonkajšia os podobnosti $E_{12} - E_{23} - E_{31}$ ako priesečnica rovín $\overrightarrow{T_1T_2T_3}$ a $\overrightarrow{O_1O_2O_3}$.

Nech τ_3 je spoločná dotyková rovina daných troch guľových plôch zostrojená analogickým spôsobom - v rovine τ_3 vyberieme tri navzájom rôzne body T_1, T_2 a T_3 , ktoré budú dotykovými bodmi guľových plôch $\Gamma_1(O_1, r_1), \Gamma_2(O_2, r_2)$ a $\Gamma_3(O_3, r_3)$ s rovinou τ_3 .



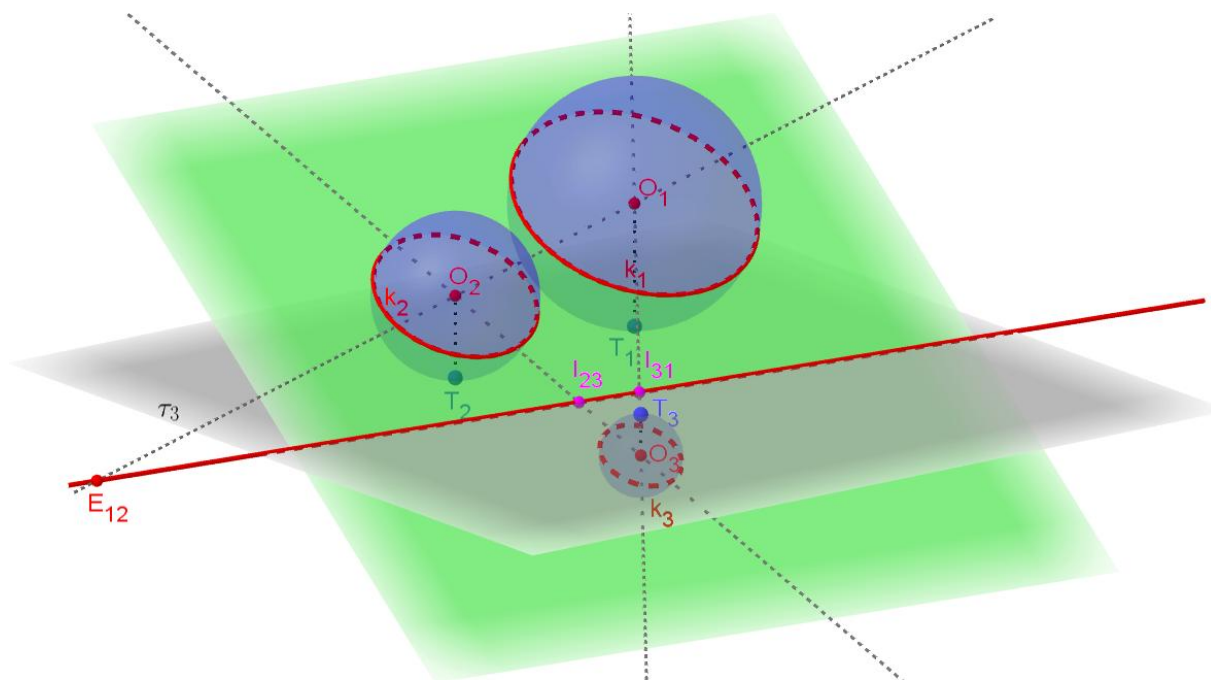
Obr. 4: Konfigurácia guľových plôch $\Gamma_1(O_1, r_1), \Gamma_2(O_2, r_2)$ a $\Gamma_3(O_3, r_3)$ v priestore

Avšak, bod O_3 zostrojíme v opačnom polpriestore než ležia guľové plochy $\Gamma_1(O_1, r_1), \Gamma_2(O_2, r_2)$. Obr. 4.

Keďže stredy guľových plôch O_1, O_2 a O_3 sú v opačných polpriestoroch, rovina $\overrightarrow{O_1O_2O_3}$ je rôznobežná s rovinou τ_3 .

Roviny $\tau_3, \overrightarrow{O_1O_2O_3}$ sa pretínajú v priesečnici, na ktorej leží vonkajší stred rovnôľahlosti - body E_{12} a vnútorné stredy rovnôľahlostí I_{23}, I_{31} .

Zvyšné dva prípady kolineárnych bodov I_{12}, I_{23}, E_{31} alebo I_{12}, E_{23}, I_{31} sa dokážu analogicky. ■



Obr. 5: Jedna zo štyroch konfigurácií guľových plôch $\Gamma_1(O_1, r_1)$, $\Gamma_2(O_2, r_2)$ a $\Gamma_3(O_3, r_3)$ v priestore

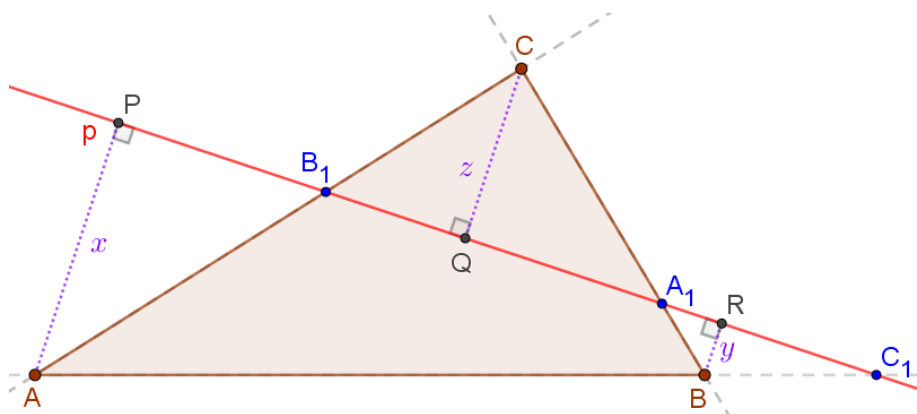
Dôkaz pomocou Menelaovej vety

Jeden z elegantných dôkazov je založený na použití Menelaovej vety, ktorá znie:

Veta (Menelaova veta)

Priamky AB, BC, CA určené vrcholmi trojuholníka ABC pretína priamka p tak, že neprechádza žiadnym z vrcholov A, B, C . Ak $AB \cap p = C_1, BC \cap p = A_1, CA \cap p = B_1$, potom pre súčin deliacich pomerov (ABC_1) , (BCA_1) a (CAB_1) platí:

$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = 1.$$



Obr. 6: Menelaova veta

Dôkaz vyplýva z podobnosti trojuholníkov. V označení podľa obr. 6 a vety uu platí:

$$\triangle AC_1P \sim \triangle BC_1R, \quad \triangle AB_1P \sim \triangle CB_1P, \quad \triangle BA_1R \sim \triangle CA_1Q.$$

Odvodíme:

$$(ABC_1) = +\frac{x}{y}, \quad (BCA_1) = -\frac{y}{z}, \quad (CAB_1) = -\frac{z}{x}.$$

$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = +\frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{z}\right) \cdot \left(-\frac{z}{x}\right) = 1.$$

■

V dôkaze Mongeho vety sa uplatňuje obrátené tvrdenie.

Veta (obrátená Menelaova veta)

Ak na priamkach AB, BC, CA určených vrcholmi trojuholníka ABC ležia postupne body C_1, A_1, B_1 , rôzne od vrcholov A, B, C , a súčasne $(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = 1$, potom sú body C_1, A_1, B_1 kolineárne.

Detaily ohľadom dôkazu obrátenej Menelaovej vety nájde čitateľ v (Pedoe, 2013) alebo (Šedivý, Vallo, 2013).

Obrátenú Menelaovu vetu použijeme na trojuholník $O_1O_2O_3$ a vypočítame odpovedajúce deliace pomery.

- a) Postupne z podobnosti trojuholníkov $\triangle O_1T_1E_{12} \sim \triangle O_2T_2E_{12}$, $\triangle O_2T_2E_{23} \sim \triangle O_3T_3E_{23}$ a $\triangle O_3T_3E_{31} \sim \triangle O_1T_1E_{31}$ vyplýva:

$$(O_1O_2E_{12}) = +\frac{r_2}{r_1}$$

$$(O_2O_3E_{23}) = +\frac{r_3}{r_2}$$

$$(O_3O_1E_{31}) = +\frac{r_1}{r_3}$$

Vypočítame:

$$(O_1O_2E_{12}) \cdot (O_2O_3E_{23}) \cdot (O_3O_1E_{31}) = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_1}{r_3} = 1.$$

Z uvedeného vyplýva, že body E_{12}, E_{23}, E_{31} sú kolineárne.

- b) Ak I_{23}, I_{31} sú vnútorné stredy rovnoľahlostí kružníc k_1, k_2, k_3 , potom z podobnosti trojuholníkov $\triangle O_1T_1E_{12} \sim \triangle O_2T_2E_{12}$, $\triangle O_2T_2I_{23} \sim \triangle O_3T_3I_{23}$ a $\triangle O_3T_3I_{31} \sim \triangle O_1T_1I_{31}$ pre deliace pomery odvodíme:

$$(O_1O_2E_{12}) = +\frac{r_2}{r_1}, \quad (O_2O_3I_{23}) = -\frac{r_3}{r_2}, \quad (O_3O_1I_{31}) = -\frac{r_1}{r_3}.$$

Pre výsledný súčin platí:

$$(O_1O_2E_{12}) \cdot (O_2O_3I_{23}) \cdot (O_3O_1I_{31}) = +\frac{r_2}{r_1} \cdot \left(-\frac{r_3}{r_2}\right) \cdot \left(-\frac{r_1}{r_3}\right) = 1.$$

Body E_{12}, I_{23}, I_{31} sú kolineárne.

- c) Analogicky sa dá dokázať, že na jednej priamke ležia body I_{12}, E_{23}, I_{31} a kolineárne sú tiež body I_{12}, I_{23}, E_{31} . ■

Dôkaz – analytickou metódou

V dôkaze použijeme lemy (pomocné tvrdenia).

Lema 1

Ak sa v rovnôľahlosti $\mathcal{H}_E\left(E, \frac{r_2}{r_1}\right)$ kružnica $k_1(O_1, r_1)$ zobrazí do kružnice $k_2(O_2, r_2)$, potom platí:

$$E = \frac{r_2 \cdot O_1 - r_1 \cdot O_2}{r_2 - r_1}.$$

Dôkaz. Podľa označenia na obr. 7 z podobnosti trojuholníkov $\triangle O_1EA \sim \triangle O_2EB$ vyplýva: $\frac{|O_1E|}{|O_2E|} = \frac{r_1}{r_2}$.

Pre vektory $\overrightarrow{O_1E}, \overrightarrow{O_2E}$ odvodíme:

$$\overrightarrow{O_1E} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \overrightarrow{O_2E}$$

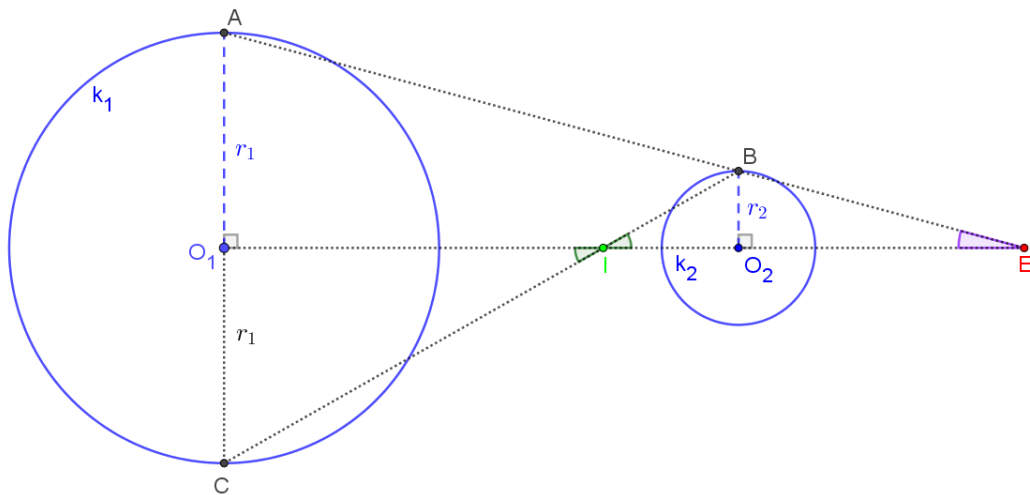
$$r_2 \cdot (E - O_1) = r_1 \cdot (E - O_2)$$

$$r_2 \cdot E - r_2 \cdot O_1 = r_1 \cdot E - r_1 \cdot O_2$$

$$(r_2 - r_1) \cdot E = r_2 \cdot O_1 - r_1 \cdot O_2$$

$$E = \frac{r_2 \cdot O_1 - r_1 \cdot O_2}{r_2 - r_1}.$$

■



Obr. 7: Rovnôľahlosti kružníc: $\mathcal{H}_E\left(E, \frac{r_2}{r_1}\right): k_1 \rightarrow k_2$ a $\mathcal{H}_I\left(I, -\frac{r_2}{r_1}\right): k_1 \rightarrow k_2$

Lema 2

Ak sa v rovnôľahlosti $\mathcal{H}_I\left(I, -\frac{r_2}{r_1}\right)$ kružnica $k_1(O_1, r_1)$ zobrazí do kružnice $k_2(O_2, r_2)$, potom platí:

$$I = \frac{r_2 \cdot O_1 + r_1 \cdot O_2}{r_2 + r_1}.$$

Dôkaz. Podľa označenia na obr. 7 z podobnosti trojuholníkov $\triangle O_1IC \sim \triangle O_2IB$ vyplýva: $\frac{|O_1I|}{|O_2I|} = \frac{r_1}{r_2}$.

Pre vektory $\overrightarrow{O_1I}, \overrightarrow{O_2I}$ odvodíme:

$$\overrightarrow{O_1I} = -\frac{r_1}{r_2} \cdot \overrightarrow{O_2I}$$

$$r_2 \cdot (I - O_1) = -r_1 \cdot (I - O_2)$$

$$r_2 \cdot I - r_2 \cdot O_1 = -r_1 \cdot I + r_1 \cdot O_2$$

$$(r_2 + r_1) \cdot I = r_2 \cdot O_1 + r_1 \cdot O_2$$

$$I = \frac{r_2 \cdot O_1 + r_1 \cdot O_2}{r_2 + r_1}.$$

■

Teraz pristúpime k dôkazu Mongeho vety. Podľa lemy 1 odvodíme :

$$E_{12} = \frac{r_2 \cdot O_1 - r_1 \cdot O_2}{r_2 - r_1}, \quad E_{23} = \frac{r_3 \cdot O_2 - r_2 \cdot O_3}{r_3 - r_2}, \quad E_{31} = \frac{r_1 \cdot O_3 - r_3 \cdot O_1}{r_1 - r_3}.$$

Ukážeme, že existuje $t \in R$ také, že $E_{31} = t \cdot E_{12} + (1 - t) \cdot E_{23}$. Počítame:

$$\begin{aligned} (r_2 - r_1) \cdot E_{12} &= r_2 \cdot O_1 - r_1 \cdot O_2 & / \cdot r_3 \\ (r_3 - r_2) \cdot E_{23} &= r_3 \cdot O_2 - r_2 \cdot O_3 & / \cdot r_1 \\ &\Downarrow \\ r_3 \cdot (r_2 - r_1) \cdot E_{12} + r_1 \cdot (r_3 - r_2) \cdot E_{23} &= r_2 \cdot r_3 \cdot O_1 - r_1 \cdot r_2 \cdot O_3 & / : r_2 \\ \frac{r_3}{r_2} \cdot (r_2 - r_1) \cdot E_{12} + \frac{r_1}{r_2} \cdot (r_3 - r_2) \cdot E_{23} &= r_3 \cdot O_1 - r_1 \cdot O_3 & / : (r_1 - r_3) \\ \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_3} \cdot E_{12} + \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_3 - r_2}{r_1 - r_3} \cdot E_{23} &= \frac{r_3 \cdot O_1 - r_1 \cdot O_3}{r_1 - r_3} & / : (r_1 - r_3) \\ \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_3} \cdot E_{12} + \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_3 - r_2}{r_1 - r_3} \cdot E_{23} &= E_{31}. \end{aligned}$$

Pre koeficienty v lineárnej kombinácii platí:

$$\frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_3} + \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_3 - r_2}{r_1 - r_3} = \frac{r_3 \cdot r_2 - r_3 \cdot r_1 + r_1 \cdot r_3 - r_1 \cdot r_2}{r_2 \cdot (r_1 - r_3)} = 1.$$

Ak položíme $t = \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_3}$ a $1 - t = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_3 - r_2}{r_1 - r_3}$, potom sme dokázali, že:

$$E_{31} = t \cdot E_{12} + (1 - t) \cdot E_{23}.$$

Tým sme dokázali, že vonkajšie stredy rovnoľahlostí E_{12} , E_{23} a E_{31} ležia na jednej priamke.

Ešte dokážeme, že body I_{12} , I_{23} a E_{31} sú kolineárne. Podľa lemy 1 a lemy 2 platí:

$$I_{12} = \frac{r_2 \cdot O_1 + r_1 \cdot O_2}{r_2 + r_1}, \quad I_{23} = \frac{r_3 \cdot O_2 + r_2 \cdot O_3}{r_3 + r_2}, \quad E_{31} = \frac{r_1 \cdot O_3 - r_3 \cdot O_1}{r_1 - r_3}.$$

Počítame:

$$\begin{aligned} (r_2 + r_1) \cdot I_{12} &= r_2 \cdot O_1 + r_1 \cdot O_2 & / \cdot r_3 \\ (r_3 + r_2) \cdot I_{23} &= r_3 \cdot O_2 + r_2 \cdot O_3 & / \cdot (-r_1) \end{aligned}$$

Rovnice sčítame a odvodíme:

$$\begin{aligned} r_3 \cdot (r_2 + r_1) \cdot I_{12} - r_1 \cdot (r_3 + r_2) \cdot I_{23} &= r_2 \cdot (r_3 \cdot O_1 - r_1 \cdot O_3) \\ &\vdots \\ \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(r_2 + r_3)}{(r_1 - r_3)} \cdot I_{23} - \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{(r_2 + r_1)}{(r_1 - r_3)} \cdot I_{12} &= E_{31} \end{aligned}$$

Overíme rozdiel koeficientov v rovnici:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(r_2 + r_3)}{(r_1 - r_3)} - \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{(r_2 + r_1)}{(r_1 - r_3)} = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 - r_3 \cdot r_2 - r_3 \cdot r_1}{r_2 \cdot (r_1 - r_3)} = \dots = 1$$

Stredy rovnoláhlostí I_{12}, I_{23} a E_{31} ležia na jednej priamke.

c) – d) Cyklickou zámenou ľahko odvodíme:

$$\frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{(r_3 + r_1)}{(r_2 - r_1)} \cdot I_{31} - \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{(r_3 + r_2)}{(r_2 - r_1)} \cdot I_{23} = E_{12}$$

$$\frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{(r_1 + r_2)}{(r_3 - r_2)} \cdot I_{12} - \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{(r_1 + r_3)}{(r_3 - r_2)} \cdot I_{31} = E_{23}$$

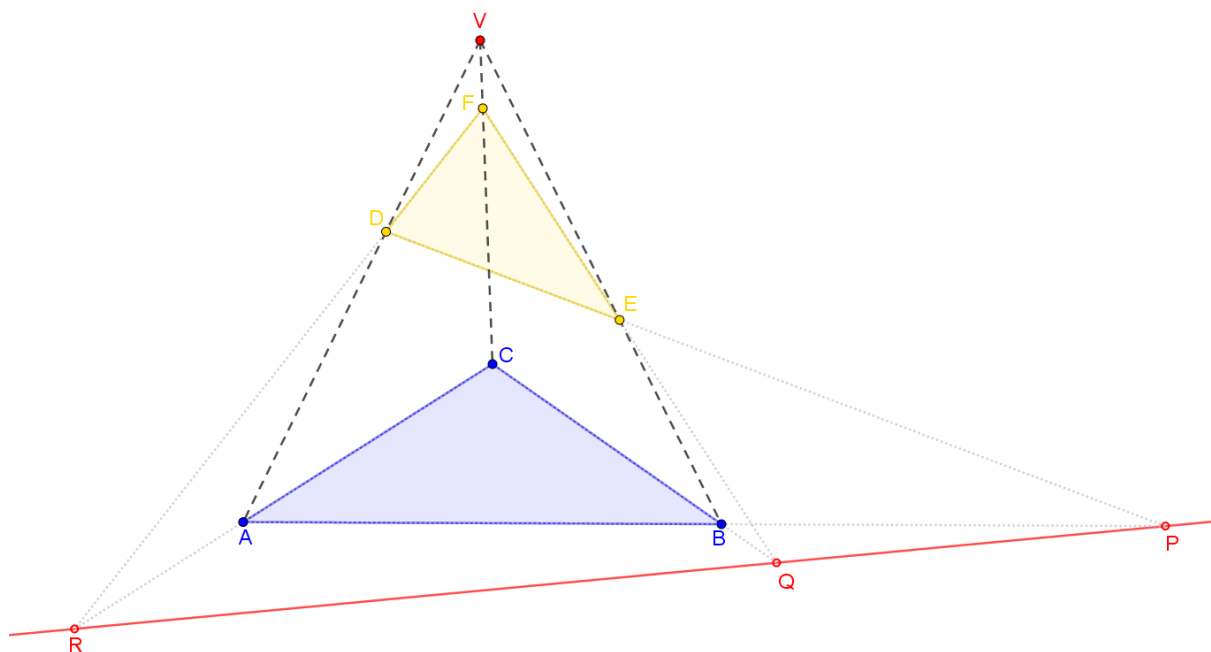
■

Dôkaz pomocou Desarguesovej vety

Desarguesova veta patrí medzi známe vety projektívnej geometrie.

Veta

Ak sa priamky AD, BE, CF určené vrcholmi trojuholníkov $\triangle ABC, \triangle DEF$ pretínajú v jednom bode V , potom body $P = AB \cap DE, Q = BC \cap EF, R = AC \cap DF$ (ak existujú) ležia na jednej priamke.



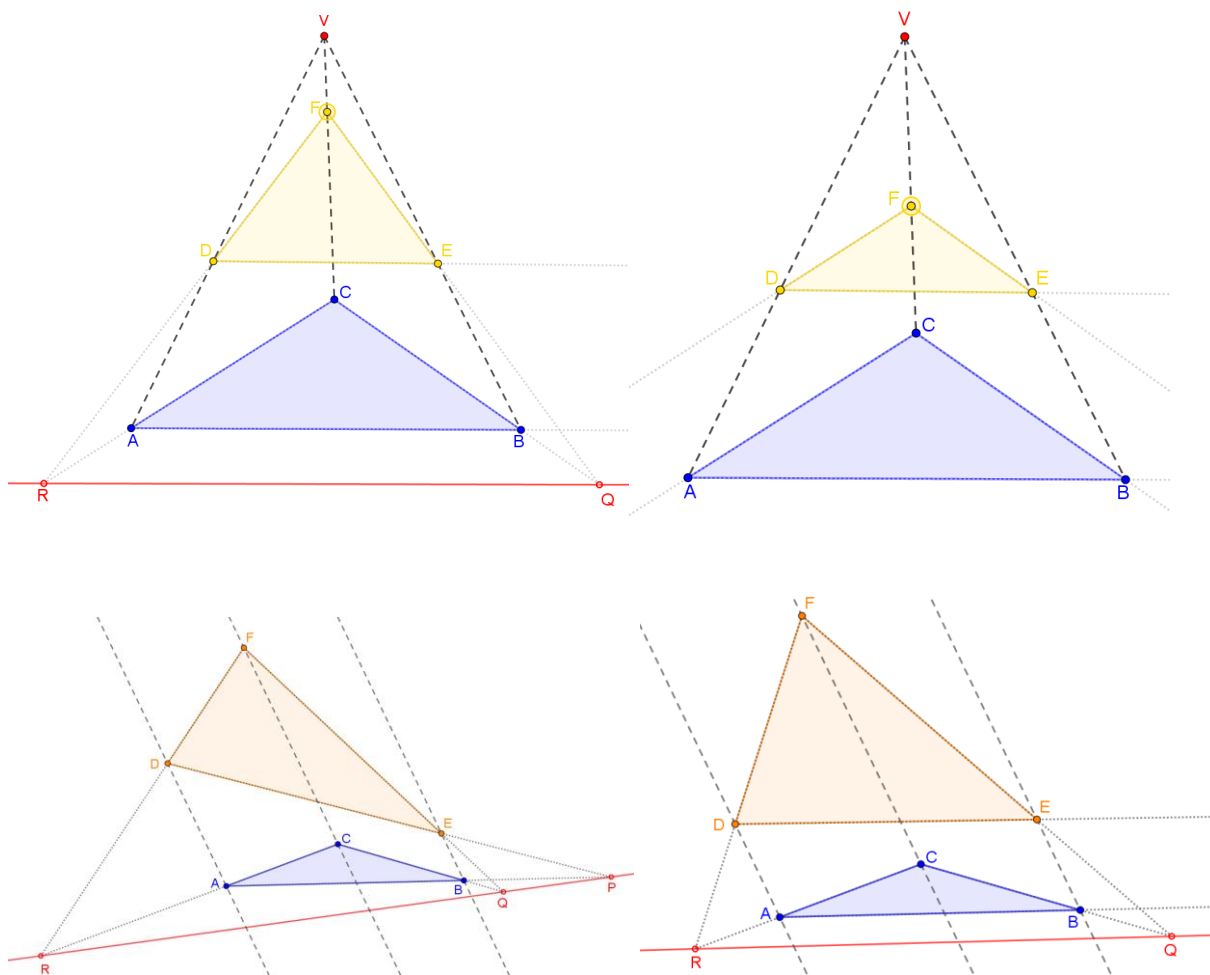
Obr. 8: Desarguesova veta

Naznačíme myšlienku dôkazu pomocou rovinného rezu trojbokého **ihlana**, resp. ihlanovej plochy.

Uvažujme o trojbokom ihlane $ABCV$ a reze rovinou $\overleftrightarrow{DEF}$ (obr. 8). V prípade, že existuje priesečníca rovín $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{DEF}$, ležia uvažované priesečníky P, Q a R na tejto priesečnici. Opäť pod podmienkou, že priesečníky existujú. Ak by roviny $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{DEF}$ boli rovnobežné, alebo niektorá z priamok DE, EF, DF je rovnobežná s rovinou podstavy $\overleftrightarrow{ABC}$, potom v euklidovskom priestore $\mathbb{E}_3$ príslušný priesečník neexistuje.

Ak uvažujeme o rovinnom reze trojbokého **hranola**, resp. **hranolovej plochy** (bod V je „nevlastným bodom v nekonečne“), potom úvahy o existencii uvažovanej priesečnice rovín, ako aj existencie priesečníkov P, Q, R sú analogické.

Poznámka. Ak uvažujeme o konfigurácii trojuholníkov v projektívnej rovine $\mathbb{P}_2$, v ktorej dve priamky majú vždy spoločný bod (vlastný alebo nevlastný), potom môže nastať niektorý z prípadov podľa obr. 9 (neuvádza všetky potenciálne konfigurácie).



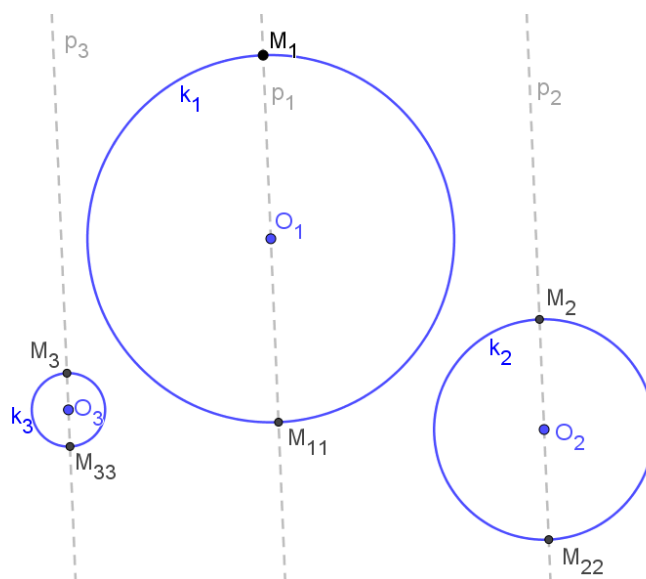
Obr. 9: Niektoré konfigurácie pre Desarguesovu vetu

Trojuholníky ABC, DEF sa v literatúre nazývajú **perspektívnymi** trojuholníkmi.

Teraz uvidíme ďalší dôkaz Mongeho vety.

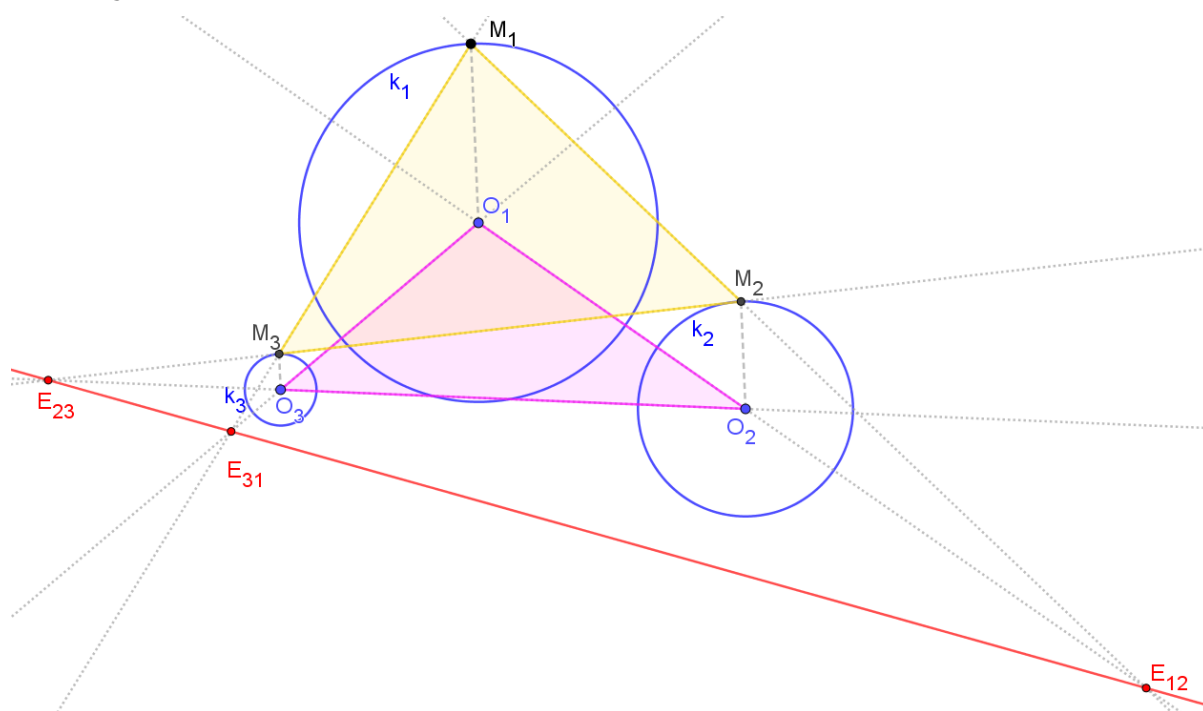
Nech stredmi O_1, O_2, O_3 kružníc k_1, k_2, k_3 prechádzajú tri navzájom rovnobežné priamky p_1, p_2, p_3 tak, aby:

$$p_1 \cap k_1 = \{M_1, M_{11}\}, \quad p_2 \cap k_2 = \{M_2, M_{22}\}, \quad p_3 \cap k_3 = \{M_3, M_{33}\}.$$



Obr. 10: Rovnobežky p_1, p_2, p_3 prechádzajúce stredmi daných kružníc

Uvažujme „základný“ trojuholník $O_1O_2O_3$. Podľa označenia na obr. 10 zostrojíme trojuholník $M_1M_2M_3$.

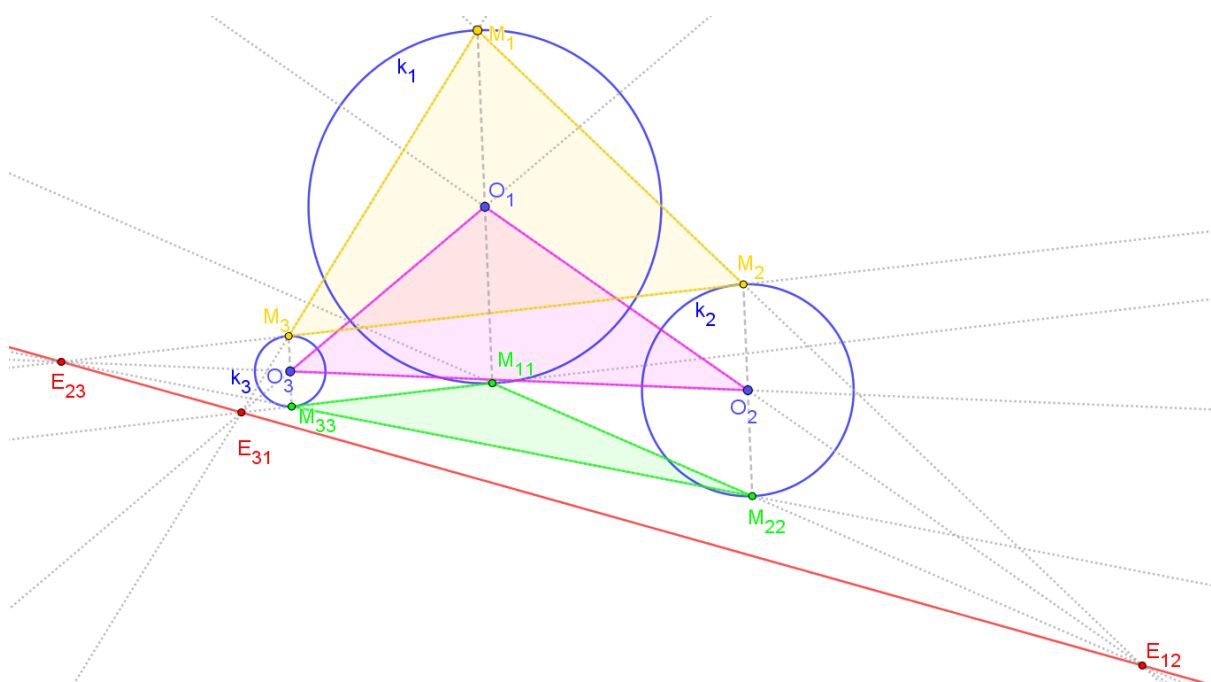


Obr. 11: Perspektívne trojuholníky $O_1O_2O_3$ a $M_1M_2M_3$

Podmienka navzájom rôznych polomerov r_1, r_2 a r_3 daných kružníc k_1, k_2 a k_3 zaručuje existenciu priesečníkov E_{12}, E_{23}, E_{31} . Napr. štvoruholník $O_1O_2M_2M_1$ je lichobežník, ktorého ramená O_1O_2, M_1M_2 sa pretínajú v strede rovnoľahlosti kružníc k_1, k_2 - v bode E_{12} .

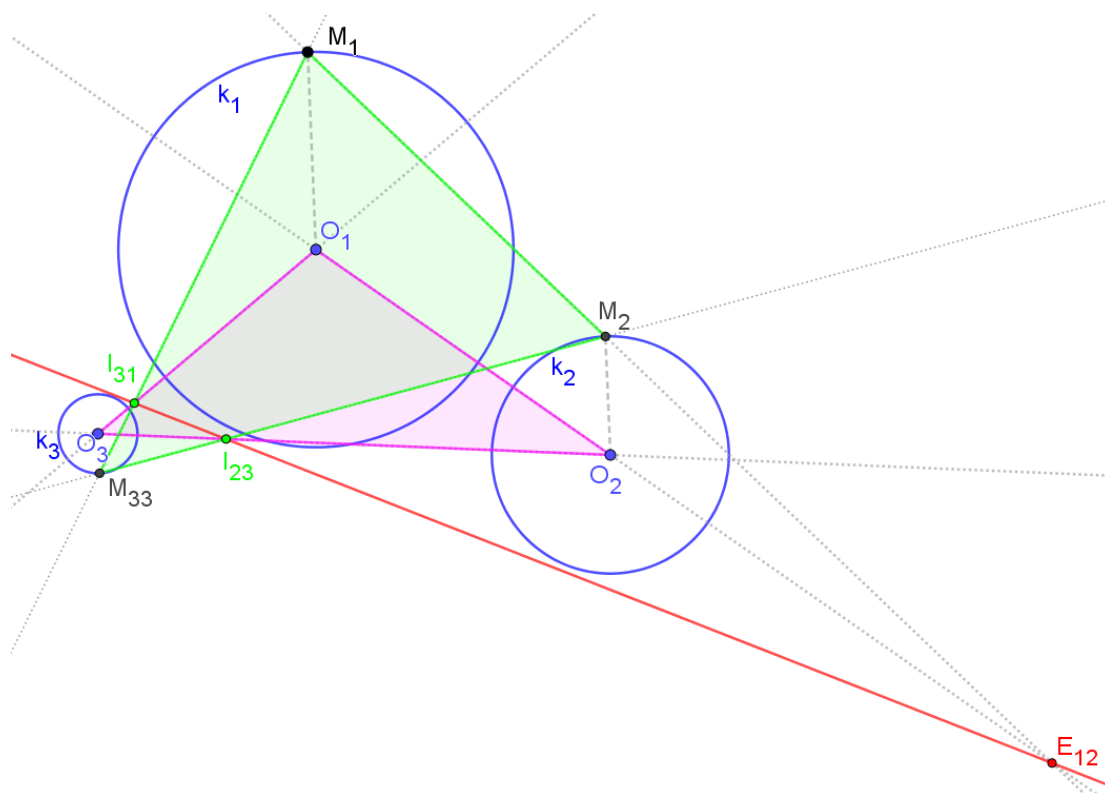
Vzhľadom k tomu, že trojuholníky $O_1O_2O_3, M_1M_2M_3$ sú perspektívne (spoločný priesečník priamok p_1, p_2, p_3 je nevlastným bodom projektívnej roviny), podľa Desarguesovej vety ležia body E_{12}, E_{23} a E_{31} na jednej priamke.

K rovnakému záveru dospejeme, ak uvažujeme o perspektívnych trojuholníkoch $O_1O_2O_3, M_{11}M_{22}M_{33}$ (obr. 12).



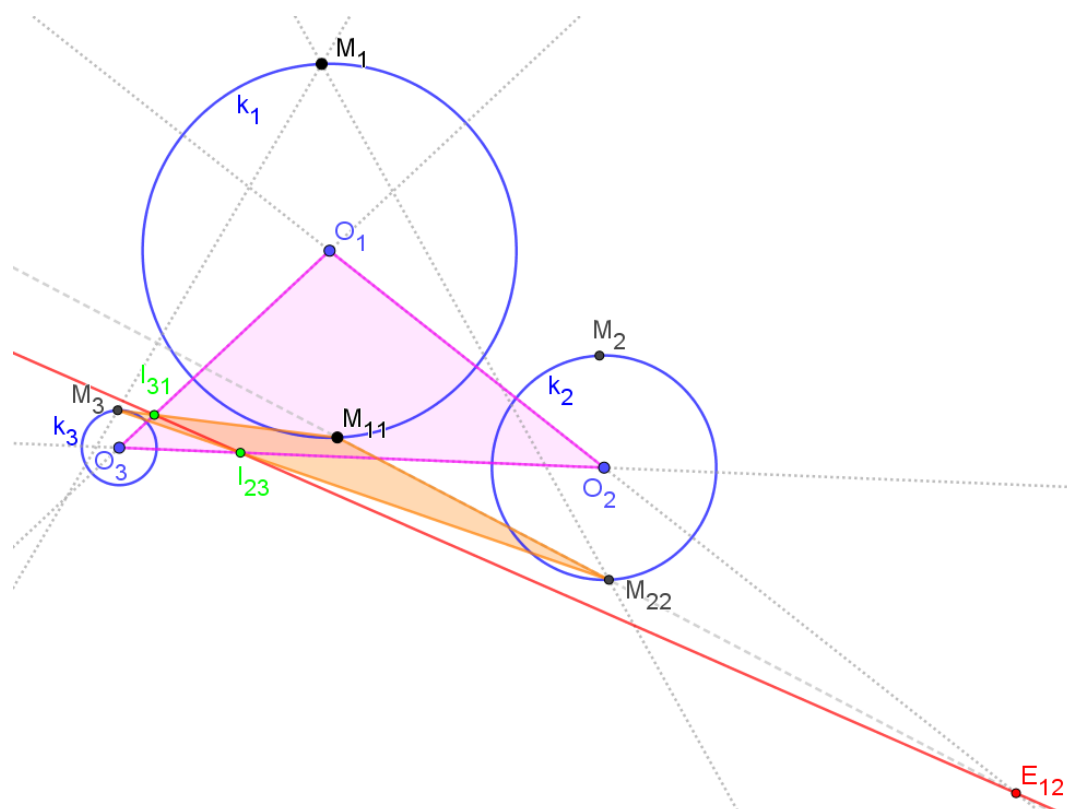
Obr. 12: Doplnenie o perspektívne trojuholníky $O_1O_2O_3$ a $M_{11}M_{22}M_{33}$

Analogicky, ak uvažujeme o perspektívnych trojuholníkoch $O_1O_2O_3, M_1M_2M_{33}$, dokážeme, že kolíneárne sú body E_{12}, I_{23}, I_{31} .



Obr. 13: Perspektívne trojuholníky $O_1O_2O_3$ a $M_1M_2M_{33}$

Rovnaký výsledok odvodíme, ak zvolíme trojuholník $M_{11}M_{22}M_3$ (obr. 14).



Obr. 14: Perspektívne trojuholníky $O_1O_2O_3$ a $M_{11}M_{22}M_3$

Obdobnými úvahami by sme dokázali kolineárnosť bodov E_{23}, I_{31}, I_{12} a E_{31}, I_{12}, I_{23} . Detaily prenecháme čitateľovi. ■

Literatúra

Pedoe, D. (2013). *Geometry: A comprehensive course*. Courier Corporation.

Šedivý O. a kol. (1987). *Geometria 2. Pre študentov matematiky učiteľského štúdia na univerzitách a pedagogických fakultách*. SPN Bratislava

Šedivý O, Vallo, D. (2013). *Geometria III*. FPV UKF v Nitre, Nitra

Vallo D. (2026). *Úvod do afinnej geometrie. Afinné zobrazenia*. FPV UKF v Nitre. Nitra

Weisstein, Eric W. "Menelaus' Theorem." From MathWorld--A Wolfram Resource. Dostupné online [5. október 2026]: <https://mathworld.wolfram.com/MenelausTheorem.html>

Weisstein, Eric W. "Desargues' Theorem." From MathWorld--A Wolfram Resource. Dostupné online [3. október 2026] <https://mathworld.wolfram.com/DesarguesTheorem.html>

PodĎakovanie

Článok vznikol v rámci projektu KEGA 013UKF-4/2026 s názvom „Tvorba študijných materiálov s dôrazom na interdisciplinárny prístup v študijnom programe učiteľstvo vzdelávacej oblasti matematika a informatika“.