

Konstruktivistický prístup k vyučovaniu rezov telies rovinou s využitím programu GeoGebra

Constructivist Approach to Teaching Plane Sections of Solids Using GeoGebra

Lucia Rumanová^a – Vjera Németh^b

^a*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences and Informatics, Constantine the Philosopher
University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, 949 01 Nitra, Slovakia*

^b*SPŠ Stavebná, Cabajská 4, 949 01 Nitra, Slovakia*

Received September 2, 2026; received in revised form October 15, 2026; accepted October 18, 2026

Abstract

Paper explores the possibilities of applying a constructivist approach and GeoGebra to teaching plane sections of solids at secondary school. The theoretical part outlines the fundamental principles of constructivism and highlights the importance of actively involving students in the process of knowledge construction. Attention is also paid to the use of GeoGebra in developing students' spatial visualization and geometric thinking. Particular emphasis is placed on teaching plane sections of solids, which is considered one of the more challenging topics in school solid geometry. The paper presents possibilities for the dynamic visualization and manipulation of geometric objects, as well as for testing students' hypotheses using GeoGebra. Its aim is to introduce an approach that enhances visual understanding, encourages the independent discovery of geometric relationships, and supports students' active construction of knowledge.

Keywords: constructivism, GeoGebra, mathematics education, plane sections of solids, spatial visualization

Classification: 97G40, 97U50, 97C30

Úvod

Priestorová geometria patrí medzi oblasti matematiky, ktoré kladú zvýšené nároky na priestorovú predstavivosť žiakov, ich schopnosť analyzovať vzájomnú polohu geometrických útvarov a zobraziť trojrozmerné situácie do roviny. Osobitne náročnou témou sú rezy telies rovinou. Pri ich zostrojovaní nestačí mechanicky ovládať jednotlivé postupy, ale je potrebné porozumieť priestorovým vzťahom, identifikovať priesečnice roviny rezu so stenami telesa a správne určiť výsledný rovinný útvar. Tradičné konštrukčné riešenia pritom nemusia žiakom poskytovať dostatočnú oporu na vytvorenie správnej predstavy o riešenej situácii.

Jednou z možností, ako podporiť porozumenie tomuto učivu, je uplatnenie konštruktivistického prístupu, pri ktorom žiak nie je iba prijímateľom hotových poznatkov, ale aktívne sa podieľa na ich vytváraní. Prostredníctvom skúmania, diskusie a riešenia problémových úloh si postupne buduje vlastné geometrické poznatky. Vhodným nástrojom na realizáciu takto koncipovaného vyučovania je program GeoGebra, ktorý umožňuje

*Corresponding author: lrumanova@ukf.sk

DOI: 10.17846/AMN.2026.10.2.13-20

dynamicky zobrazovať priestorové objekty, meniť ich polohu, sledovať vznik rezu a overovať správnosť navrhnutého riešenia.

Cieľom príspevku je predstaviť možnosti prepojenia konštruktivistického prístupu s využitím programu GeoGebra pri vyučovaní rezov telies rovinou na strednej škole. Pozornosť venujeme teoretickým východiskám konštruktivismu, zaradeniu uvedenej témy do obsahu matematického vzdelávania a návrhu aktivít podporujúcich rozvoj priestorovej predstavivosti a geometrického myslenia žiakov. Súčasťou príspevku je aj ukážka riešenia neštandardnej úlohy, pri ktorej je možné overiť u žiakov pochopenie skúmaných geometrických vzťahov a zdôvodnenie svojho postupu v riešení úlohy.

Konštruktivismus ako teoretický základ pre vyučovací proces s využitím IKT

Teória konštruktivismu patrí v súčasnosti medzi najvýznamnejšie (psycho)didaktické teórie zdôrazňujúce činnostný a sociálny aspekt školského vzdelávania (Kosíková, 2011). Podstatou konštruktivismu je to, že myslenie dieťaťa nie je len nejaké nedokonalé myslenie dospelého, ale poukazujú na to, že v jednotlivých vývinových obdobiach prechádza myslenie dieťaťa jednotlivými štádiami, na ktoré má vplyv prostredie, skúsenosti a všetko, čo dieťa obklopuje (Petlák, Komora, 2003).

Rôzni autori (napríklad Hanuliaková, 2015; Turek 2010) tvrdia, že učiteľ by mal pri konštruktivistickom vyučovaní dbať na to, aby podporovali samostatnosť a iniciatívu žiakov, pri položených otázkach dávali priestor na premýšľanie, zapájali žiakov do učebných činností a iných aktivít, podporovali skúmanie a to aj prostredníctvom otvorených otázok, povzbudzovali k vzájomnému kladeniu otázok a nabádali žiakov k používaniu informačných a interaktívnych pomôcok vhodných k manipulačnej činnosti. Súčasne musia dbať aj na to, aby žiak nekriticky preberal už existujúce zaužívané konštrukcie a postupy.

Z pohľadu konštruktivismu možno informačné a komunikačné technológie využívať aj ako nástroj na riešenie problémových úloh vo vyučovacom procese. Problémové situácie možno prezentovať prostredníctvom videosekvencií, simulácií alebo animácií. Kostrub a kol. (2012) uvádza, že konštruktivistická teória zdôrazňuje interaktívnosť, čo didakticky znamená, že dieťa/žiak/študent môže nadobudnúť informácie interakciou s rôznymi zdrojmi (fyzickými alebo humánnymi).

Využívanie technológií umožňuje žiakovi vstúpiť do virtuálneho prostredia približujúceho sa reálnym podmienkam, v ktorom môže riešiť autentické a komplexné učebné úlohy a problémy, ktoré sú preňho zmysluplné a motivujúce.

V súlade s touto teóriou budeme prezentovať vyučovanie vybraných tematických celkov zo stereometrie, kde žiaci budú riešiť problémové úlohy v dynamickom programe GeoGebra. Konkrétne sa zameriame na skúmanie geometrických vzťahov súvisiacich s rovinnými rezmí telies.

Rezy telies rovinou vo vyučovaní matematiky na strednej škole

Vzhľadom na riešenie problematiku sme analyzovali Inovovaný štátny vzdelávací program pre gymnáziá so štvorročným a päťročným vzdelávacím programom (vyššie stredné vzdelanie), vzdelávaciu oblasť Matematika a práca s informáciami – prílohu Matematika (2015), kde je vzdelávací obsah učebného predmetu rozdelený na päť tematických okruhov, pričom nás zaujímal okruh Geometria a meranie.

Vo vzdelávacom programe sa pre vzdelávací štandard pre gymnáziá uvádza predpoklad, že žiak spĺňa požiadavky formulované vo vzdelávacom štandarde z matematiky pre základné školy. Obsah tém uvádzame v Tabuľke 1.

Tabuľka 1: Obsah tém okruhu Geometria a meranie súvisiace s priestorovou predstavivosťou na ZŠ (Zdroj: ŠPÚ, 2015)

Geometria a meranie	Témy
	(voľné rovnobežné) premietanie, nadhľad a podhľad sprava a zľava, obraz priestorového útvaru do roviny, bokorys, pôdorys a nárys
	bod, priamka a rovina v priestore, rovnobežné, rôznobežné a mimobežné priamky, rovnobežnosť a rôznobežnosť priamky a roviny, rovnobežné a rôznobežné roviny, priesečnica dvoch rovín, rez telesa rovinou
	teleso, vrchol, hrana a stena, kocka, sieť kocky, hranol, kolmý a pravidelný hranol, kváder, ihlan, pravidelný (n-boký) ihlan, podstava a výška ihlana, štvorsten, pravidelný štvorsten, guľa, valec, kužeľ

Prehľad tém, ktoré by mali žiaci na gymnáziu na základe uvedenej analýzy ovládať, uvádzame v Tabuľke 2.

Tabuľka 2: Obsah tém okruhu Geometria a meranie pre žiakov gymnázia (Zdroj: ŠPÚ, 2015)

Geometria a meranie	Témy
	v „štandardnej verzii“ rovnobežného premietania (t. j. obrazy úsečiek kolmých na priemetňu sa skracujú na polovicu a zvierajú uhol 45° s obrazmi zvislých úsečiek) načrtnúť obraz kvádra, jednoduchého telesa zložené z malého počtu kvádrov, pravidelného n-bokého ihlana a hranola
	nakresliť bokorys, pôdorys a nárys jednoduchých útvarov zložených z kvádrov
	opísať možnosti pre vzájomné polohy ľubovoľných dvoch lineárnych útvarov (priamok a rovín) v priestore a dokumentovať ich príkladmi
	rozhodnúť o vzájomnej polohe dvoch lineárnych útvarov v priestore pomocou ich obrazu vo voľnom rovnobežnom premietaní
	zostrojiť rovinný rez kocky, kvádra rovinou určenou tromi bodmi ležiacimi v rovinách stien, z ktorých aspoň dva ležia v tej istej stene daného telesa
	vysvetliť základné princípy zostrojenia rovinného rezu kvádra

	poznať príklady iných spôsobov znázorňovania priestoru (napr. vrstevnice, lineárna perspektíva)
	rozhodnúť, či daná sieť je sieťou telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní
	načrtnúť sieť telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní

K matematickému vzdelávaniu určite patrí aj využívanie a práca žiakov s učebnicou matematiky. Preto sme sa venovali tiež analýze obsahu učebníc matematiky pre stredné školy v súlade so štátnym vzdelávacím programom s akcentom na učivo súvisiace s rezmi telies rovinou. Učebnice matematiky pre 1. – 4. ročník gymnázia, resp. 5. – 8. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, autor: Kubáček (2009, 2010) obsahujú kapitoly s názvom „Zobrazujeme priestor“ (1. ročník) a „Kocky, rezy a priestorová predstavivosť“ (2. ročník).

Téma „Rezy telies rovinou“ nadväzuje a súvisí s vlastnosťami geometrických útvarov v priestore, pričom vzájomná poloha troch rovín sa využíva aj pri zostrojovaní rezu telesa danou rovinou. Zadefinuje sa pojem rez telesa rovinou ako prienik hranice telesa s rovinou, alebo ako priestorová lomená čiara. Pri konštrukcii rezu telesa rovinou žiaci využívajú nasledujúce vety:

- *Ak dve rovnobežné roviny pretína tretia rovina, potom ich pretína v rovnobežných priamkach.*
- *Ak je priamka rovnobežná s dvoma rôznobežnými rovinami, tak je rovnobežná aj z ich priesečnicou.*
- *Nech každé dve z troch rovín sú rôznobežné. Potom ak dve z priesečníc prechádzajú jedným bodom, tak ním prechádza aj tretia priesečnica, alebo ak dve z priesečníc nemajú spoločný bod, tak sú rovnobežné a je s nimi rovnobežná aj tretia priesečnica.*

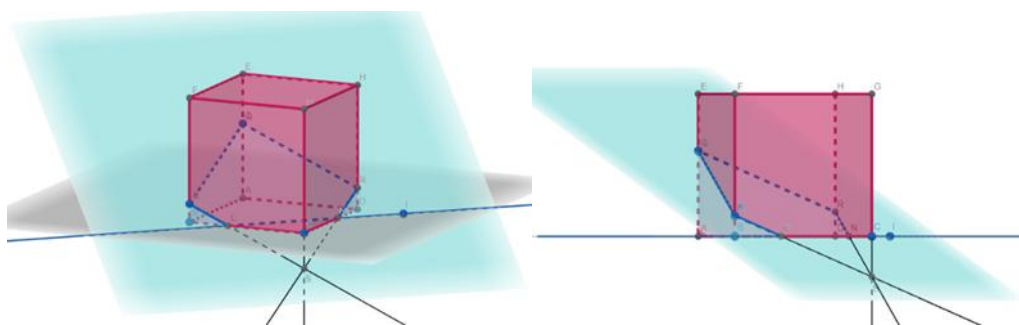
V nasledujúcej časti uvedieme konkrétne ukážky rezov telies rovinou, kde budú využité uvedené vlastnosti a úlohy budú riešené v GeoGebre.

Aktivity súvisiace s rezmi telies s prepojením na ich vizualizáciu pomocou GeoGebry

Program GeoGebra je mimoriadne užitočný nástroj pri výučbe stereometrie, konkrétne tiež aj pri vyučovaní rezov telies: softvér dokáže prekonať najväčšiu bariéru v tejto téme, ktorou je nedostatok priestorovej predstavivosti u žiakov. Jeho výhodou je najmä možnosť dynamicky manipulovať s telesom a pozorovať ho z rôznych uhlov pohľadu, čím prekonáva tradičný problém na papier narysovaného telesa, ktoré je zobrazené staticky, spravidla len z jedného uhla pohľadu.

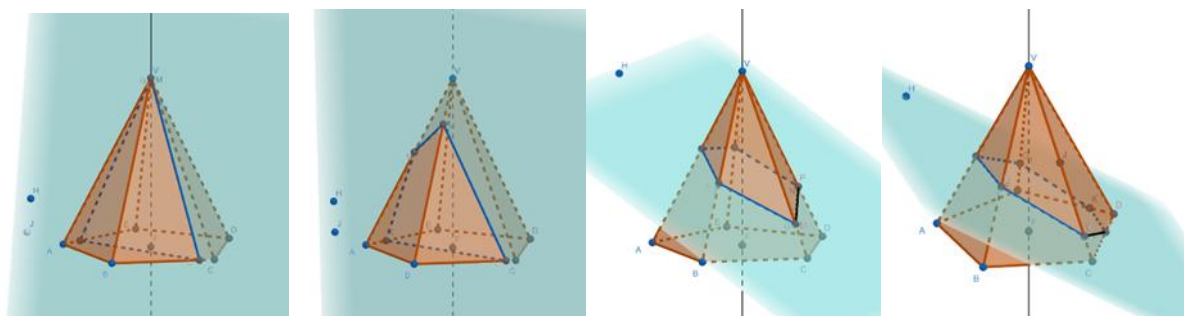
V programe GeoGebra možno 3D model, napríklad kocky, ihlana alebo hranola, voľne otáčať. Žiak môže sledovať, ktoré hrany pretína rezová rovina. Pri rysovaní na papier sa môže stať, že žiak nesprávne označí priesečník priamok, ktoré sa pretínajú iba na nákrese, no v priestore sú mimobežné. Pri otáčaní telesom v danom programe majú možnosť žiaci vidieť, akú majú vzájomnú polohu priamky v priestore.

Ukážku rezu telesa rovinou vytvoreného v programe GeoGebra uvádzame na Obr. 1.



Obr. 1: Rez telesa rovinou z rôznych uhlov pohľadu v programe GeoGebra

Žiak môže v GeoGebre meniť polohu bodov určujúcich rovinu rezu a sledovať, ako sa pritom mení rez telesa. Pomôže to žiakom pochopiť všeobecné princípy rezu, nielen jeden konkrétny prípad. Zmenou polohy bodov roviny rezu vedia si žiaci overovať, aké rezové mnohoholníky vznikajú. Na Obr. 2 uvádzame ukážku rezu ihlana rovinou.



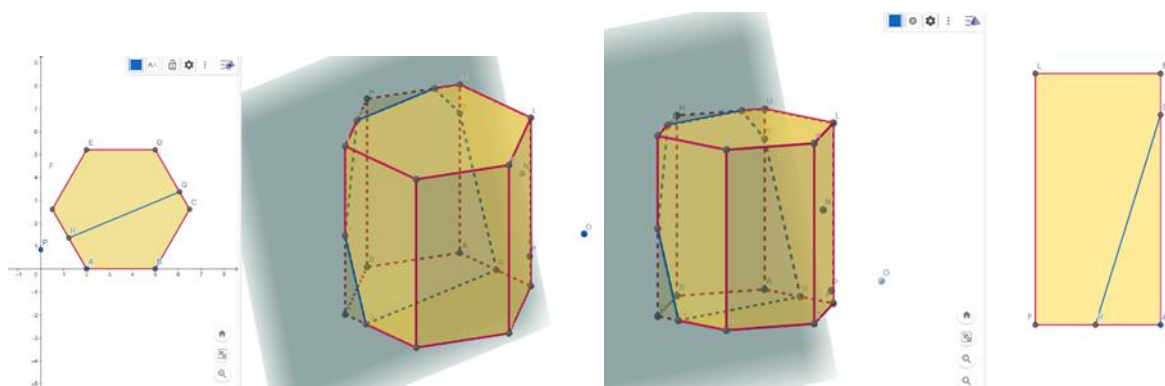
Obr. 2: Rez ihlana rovinou v programe GeoGebra v niekoľkých krokoch

Veľmi užitočné pre žiakov je, že si môžu postup konštrukcie rezu prezerať krok za krokom a podľa potreby sa k jednotlivým krokom vrátiť. Učiteľ môže na tento účel využiť Konštrukčný protokol v programe GeoGebra. Žiaci tak môžu experimentovať, napr. opakovane pozorovať predlžovanie hrán a určovanie priesečníkov pri konštrukcii rezu telesa rovinou. Postup možno zaznamenať aj vo forme videa.

Dynamický postup konštrukcie rezu kocky rovinou určenou tromi bodmi, z ktorých každý leží na inej stene, si žiak môže pozrieť <https://www.geogebra.org/classic/zqdu4xen>.

Druhá ukážka <https://www.geogebra.org/classic/wgb9bvf5> predstavuje odlišný spôsob riešenia úlohy. V programe GeoGebra sa dá k riešeniu úlohy vložiť aj postup riešenia slovným vysvetlením, žiak okrem krokov postupu vie, prečo robí príslušný konštrukčný krok, a navyše k vysvetleniu sa môže podľa potreby opakovane aj vrátiť.

GeoGebra umožňuje mať vedľa seba otvorené dve okná: 2D grafický náhľad (pôdorys alebo pohľad na konkrétnu stenu) a 3D náhľad. Pri určovaní priesečníkov priamok v rovine podstavy žiak môže sledovať, ako konštrukcia v rovine súvisí s telesom. Pomocou tejto možnosti, ktorú program GeoGebra má, si žiak vie pomôcť aj pri rôznych výpočtoch (Obr. 3).



Obr. 3: 2D a 3D grafický náhľad v GeoGebre

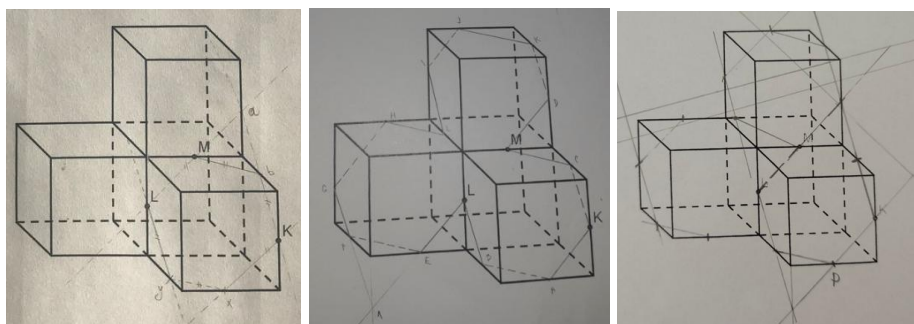
Na lepšie objasnenie prínosov dynamického softvéru pri vyučovaní rezov telies sme porovnali tradičné rysovanie s prácou v programe GeoGebra., ktoré uvádzame v Tabuľke 3.

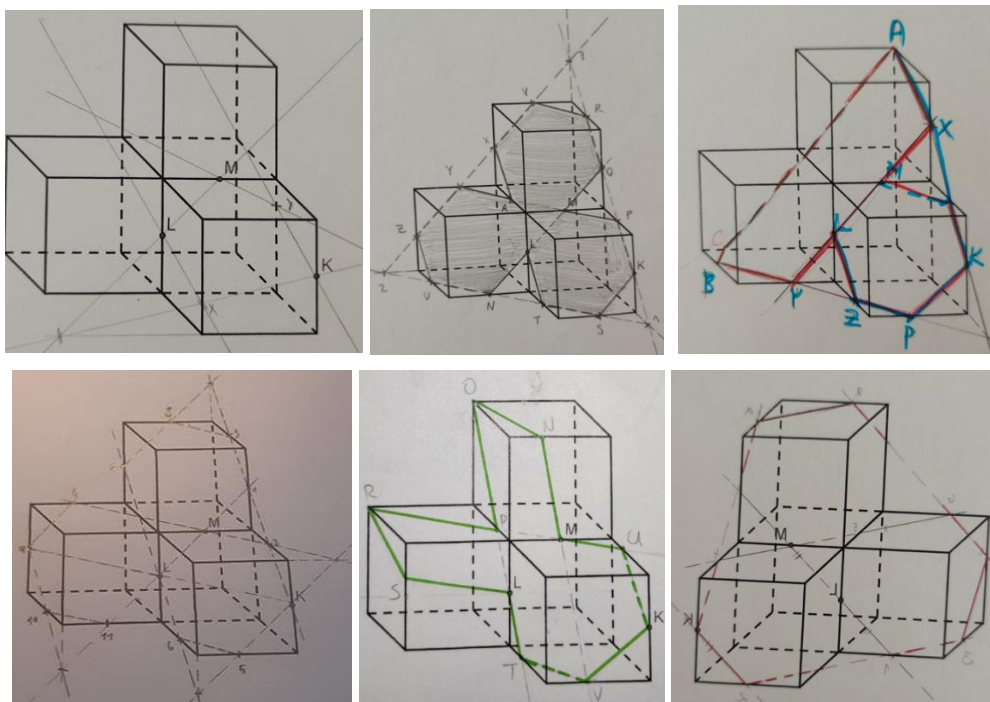
Tabuľka 3: Porovnanie rysovania na papieri a v GeoGebre

Vlastnosť	Rysovanie (papier/tabuľa)	Využitie GeoGebry
Predstavivosť	Statický 2D pohľad, skryté hrany sú mätúce	3D model, priehľadnosť, možnosť rotácie o 360°
Variabilita	Jeden výkres = jeden konkrétny príklad	Jeden model po posunutí bodov slúži na veľa rôznych zadaní
Chyby	Pri zlej čiare treba všetko gumovať a začať znova	Krok späť alebo posunutie nesprávneho bodu
Spätná väzba	Správnosť musí skontrolovať učiteľ	Program sám ukáže presný rez na jedno kliknutie

Riešenie neštandardnej úlohy žiakmi

Žiakom strednej priemyselnej školy stavebnej sme zadali neštandardnú úlohu súvisiacu s problematikou zostrojovania rezov telies rovinou. Túto úlohu riešili aj študenti učiteľstva matematiky v kombinácii, pričom výsledky ich riešení prezentujú Vallo a kol. (2015). Nezadali sme v danej úlohe teleso, ktoré sa vyskytuje k tejto téme štandardne, ale bola zadaná stavba z kociek. Pozorovali sme v žiackych riešeniach zostrojenie rezu stavby danou rovinou a taktiež vyznačenie viditeľnosti jednotlivých strán vzniknutého rezového útvaru. Ukážky ich riešení sú na Obr. 4.





Obr. 4: Žiacke riešenia neštandardnej úlohy

Môžeme konštatovať, že žiakov úloha veľmi zaujala, snažili sa ju všetci riešiť. Vyskytli sa chyby v žiackych riešeniach podobné ako v úlohách, kde je zadané len základné teleso. V príspevku sme chceli predstaviť riešenie netypickej úlohy zameranej na rez telesa rovinou a poukázať na možnosti využitia podobných úloh vo vyučovaní stereometrie. Štatistické vyhodnocovanie žiackych riešení preto nie je cieľom príspevku. Žiaci si uvedomovali, že je potrebné rez „rozšíriť“ na všetky kocky tvoriace stavbu z kociek. Iné nesprávne riešenia vyplývali z nedostatočnej priestorovej predstavivosti žiakov, alebo z neznalosti polohových vlastností troch rovín. Neštandardná úloha riešená v GeoGebre je dostupná pre žiakov na <https://www.geogebra.org/classic/kg76hcuq>.

Záver

Problematika rezov telies rovinou patrí medzi obsahovo náročnejšie témy priestorovej geometrie pre žiakov strednej školy. Žiaci potrebujú ovládať nielen príslušné geometrické poznatky a konštrukčné postupy, ale aj správne chápať priestorové vzťahy. Uplatnenie konštruktivistického prístupu v spojení s programom GeoGebra vytvára priestor na aktívne skúmanie geometrických situácií, formulovanie tvrdení, ako aj na zdôvodňovanie jednotlivých krokov riešenia úloh. Dynamická vizualizácia telies a ich rezov môže žiakom pomôcť lepšie porozumieť vzájomnej polohe rovín a priamok a zároveň podporiť rozvoj ich priestorovej predstavivosti a geometrického myslenia.

Riešenie neštandardnej úlohy ukázalo, že takto koncipované zadania úloh dokážu žiakov zaujať a motivovať k aktívnemu hľadaniu riešenia. Zároveň sa v žiackych postupoch prejavili nedostatky súvisiace najmä s úrovňou priestorovej predstavivosti a s uplatňovaním poznatkov o polohových vlastnostiach rovín. Zaradenie problémových úloh a ich následná vizualizácia v programe GeoGebra preto môžu byť pre učiteľa vhodným prostriedkom na odhaľovanie nesprávnych predstáv žiakov a ich postupné odstraňovanie počas riešenia úloh.

Takto koncipované vyučovanie môže prispieť k hlbšiemu porozumeniu učiva a k aktívnemu budovaniu geometrických poznatkov žiakov.

Literatúra

Hanuliaková, J. (2015). *Aktivizujúce vyučovanie*. Bratislava: IRIS, 2015. 127 s. ISBN 978-80-8153-036-4

Kosíková, V. (2011). *Psychologie ve vzdělávání a její psychodidaktické aspekty*. 1. vydání. Praha: Grada Publishing, a. s., 2011. 272 s. ISBN 978-80-247-2433-1

Kostrub, D., Severini, E. & Rehúš, M. (2012). *Proces výučby a digitálne technológie*. Bratislava: Alfa Print, 2012. 110 s. ISBN 978-80-971081-6-8.

Kubáček, Z. (2010). *Matematika pre 1. ročník gymnázií, 2. časť*. Bratislava: SPN – Mladé letá, s. r. o., s. 77 – 86.

Petlák, E. & Komora, J. (2003). *Vyučovanie v otázkach a odpovediach*. Bratislava: IRIS, 2003. 165 s. ISBN 80-89018-48-3

ŠPÚ. (2011). *Štátny vzdelávací program pre gymnáziá (úplné stredné všeobecné vzdelávanie)*. ISCED 3A. Bratislava: Štátny pedagogický ústav

ŠPÚ. (2015). *Štátny vzdelávací program pre nižšie sekundárne vzdelávanie – 2. stupeň základnej školy*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav

Turek, I. (2010). *Didaktika*. 2. vydanie. Bratislava: Iura Edition, spol. s. r. o., 2010. 598 s. ISBN 978-80-8078-322-8

Vallo, D., Rumanová, L. & Ďuriš, V. (2015). Some Spatial Competences and Formalism in Solutions of Stereometrical Tasks. In *Procedia - Social and Behavioral Sciences: WCES-2015, 7th World Conference on Educational Sciences*. Greece: Athens, 2015. ISSN 1877-0428, vol. 197, pp. 2320-2324

PodĎakovanie

Článok vznikol v rámci projektu KEGA 013UKF-4/2026 s názvom „*Tvorba študijných materiálov s dôrazom na interdisciplinárny prístup v študijnom programe učiteľstvo vzdelávacej oblasti matematika a informatika*“.