Vol. 5, No. 2, 2019

Acta Mathematica Nitriensia

free electronic journal

AM Nitriensia

ISSN: 2453-6083

Názov / Title
Acta Mathematica Nitriensia

Všeobecne o časopise
ISSN 2453-6083 (online)
On-line elektronický vedecký časopis venovaný otázkam teórie vyučovania matematiky
Periodicita: 2x ročne
Otvorený prístup
Pokyny pre autorov
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php
Recenzné konanie
Časopis uskutočňuje dvojité anonymné a nezávislé recenzné konanie zaslaných príspevkov.
Dostupnosť
www.amn.fpv.ukf.sk
Vydavateľ
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovensko

General information
ISSN 2453-6083 (online)
Free electronic scientific journal focused to current problems in mathematical education theory
Periodicity: twice a year
Open Access
Guidelines for authors
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php
Review process
The journal carries out a double -blind peer review evaluation of drafts of contributions.
Available from
www.amn.fpv.ukf.sk
Publisher
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences
Constantine the Philosopher University in Nitra
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovakia

Údaje k aktuálnemu číslu
Ročník: 5
Číslo: 2
Rok: 2019
Dátum vydania: 28. 10. 2019

Information to current issue
Volume: 5
No.: 2
Year: 2019
Publication date: October 28, 2019

Obsah

Content

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 5, No. 2, p. 1 – 10
ISSN 2453-6083

Root Approximation in Matlab Computational Environment

Viliam Ďuriš 1[a] – Peter Korman 2[b]

[a*]*Department of Mathematics Faculty of Natural Sciences Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra, Slovakia*
[b]*Lear Corporation Slovakia s.r.o., Priemyselný park Nitra, Dolné Hony 1, 949 01, Nitra*

Received September 14, 2019; received in revised form September 23, 2019; accepted September 28, 2019

Abstract

The task of solving non-linear equation occurs in practically all engineering disciplines. In the case of one equation, it is always possible to approximate the root within the required accuracy and to use some convergent method. The article deals with three basic convergent methods for roots approximation, namely bisection, tangent method and chord method, which are implemented and tested on several tasks in solving non-linear equations in Matlab computational environment as a suitable tool for implementation of various numerical methods.

Keywords: root approximation, bisection, Newton's method, false-proposition, Matlab

Classification: 49M15, 65H04

1 Introduction

In numerical mathematics we often seek algorithmically approximate solution of analytically insoluble problems or problems for which the analytical solution is very lengthy. Root approximation is a problem that occurs very often in the natural sciences or engineering practice to solve various tasks. For approximation of roots, thus solving equations in the form $f(x) = 0$, there are several known numerical methods that are based on recursive formulas. Recurrence-based computation methods, where each member of a sequence is defined as a function of a previous formulas, are found at the beginning of mathematics by Babylonians or Greeks. The Babylonians used them to calculate the square root of positive numbers and the Greeks to approximate the number π [1].

A suitable computational environment for the implementation of various algorithms of numerical mathematics is the Matlab programming environment (a term which was created as an abbreviation from the Matrix Laboratory) [2]. Matlab is a suitable and powerful language to work with any calculation in teaching, industry or research with extensive possibilities in the creation and use of various structures. The Matlab computational environment enables to perform various mathematical calculations, implement various algorithms, measure, analyse and statistically process various data, model and simulate different and even infeasible events, design various systems with user interface, create graphs and so on. Matlab is an object-oriented environment and directly utilizes the features of the operating system (e.g. when working with files), which simplifies the design phase as much as possible, so we can spend more time on the algorithm itself when implementing various numerical algorithms. Matlab

*Corresponding author; email: vduris@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2019.5.2.1-10

consists of a computational unit that performs various numeric operations with real or complex number matrices, a programming language used to write algorithms using language commands, a working environment that includes various command processing tools or data import and export, graphic system that allows you to create user environments, work with images or animations, libraries of mathematical functions, and various embedded algorithms such as global optimum search algorithms, API interface for implementing C or Fortran scripts, Toolboxes with various optional libraries of specialized functions (e.g. for fuzzy logic, neural networks, statistics), and an open architecture for implementing various systems. A very effective and standalone extension of the Matlab system is the graphical interactive Simulink program, which allows you to simulate and model various dynamic systems using graphics schemes using Matlab functions and commands.

2 Numerical methods for finding roots

In the Matlab computational environment, the roots of a polynomial function can be searched for directly by the built-in `roots` function, where the coefficients of the polynomial are determined by the vector. Consider, for example, function $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x$ and find its roots. First, a coefficient vector must be created (which must also include zero coefficients in order not to reduce the degree of the polynomial).

```
>> c = [-1 0 3 2 0];
>> roots(c)

ans =
         0
    2.0000
   -1.0000
   -1.0000
```

Given function and its roots can be viewed in the chart (Figure 1).

```
x = -2.5:0.005:2.5;
y = -x.^4 + 3*x.^2 + 2*x;
h = plot(x, y);
set(h, 'LineWidth', 3);
grid on
```

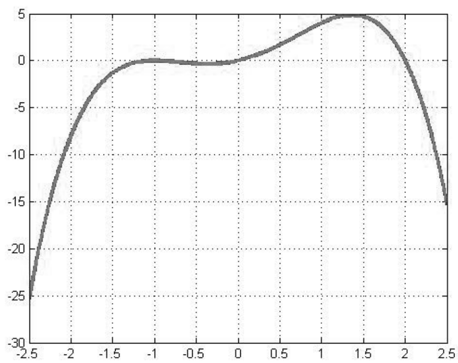


Figure 1: Function Graph $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x$.

For any function (not only in the case of a polynomial), if an algebraic equation $f(x) = 0$ is given with real coefficients having within an interval (a, b) exactly one real root k, we can approximate it with the ab ante desired accuracy ε using the `fzero` function, also built-in directly in Matlab. The `fzero` function can be called with either a two-element vector representing the interval (a, b) or only with a starting point x_0 from which the search is to be started. In this case, the `fzero` function first finds such an interval around the starting point at which the function $f(x)$ changes its sign. If it does not find such an interval, it returns `NaN`. However, if we know the appropriate interval (a, b) beforehand, it is guaranteed that `fzero` function successfully returns a value close to the root of the equation. Now consider the function $f(x) = x^3 - 7x + 1$ on the interval $(0,1)$ (Figure 2) and find the solution to the equation $f(x) = 0$.

```
>> f = inline('x^3 - 7*x + 1');
>> k = fzero(f, [0 1])
k = 0.1433
```

If you need to see the exact steps of the `fzero` function, you can set their display using the `Display` parameter of the `options` [3] structure. The accuracy ε is also possible to be set with `optimset` function.

```
>> setdsp = optimset('Display', 'iter');
>> k = fzero(f, [0 1], setdsp)
 Func-count     x          f(x)             Procedure
    2               0              1        initial
    3        0.166667      -0.162037        interpolation
    4        0.143426    -0.00103363        interpolation
    5        0.143277    5.13222e-007       interpolation
    6        0.143277   -4.73821e-012       interpolation
    7        0.143277   -2.22045e-016       interpolation
    8        0.143277   -2.22045e-016       interpolation
Zero found in the interval [0, 1]
k = 0.1433
```

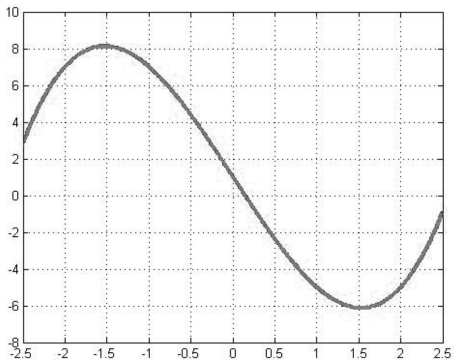


Figure 2: Function Graph $f(x) = x^3 - 7x + 1$.

We can also solve non-linear equations numerically using the method of half division of the interval (so-called bisection) [4]. Let the interval $\langle a, b\rangle$ be one of the intervals containing the root of the equation $f(x) = 0$. We will find a solution in this interval if $f(a) \cdot f(b) < 0$. Let's define a sequence of intervals $\langle a_n, b_n\rangle$ with the following properties (Figure 3):

1. $\langle a_1, b_1\rangle = \langle a, b\rangle$

2. Next, we take the middle of the interval $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ and if this point is the solution to that equation, we will terminate the process, otherwise $f(c_1) \neq 0$. Then either $f(a_1) \cdot f(c_1) < 0$ and then $\langle a_2, b_2 \rangle = \langle a_1, c_1 \rangle$, or $f(b_1) \cdot f(c_1) < 0$ and then $\langle a_2, b_2 \rangle = \langle c_1, b_1 \rangle$.
3. Suppose we defined such an interval $\langle a_n, b_n \rangle$ that $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$. We take the middle of the interval $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ again. If this point is the solution of the given equation we will terminate the process, otherwise $f(c_n) \neq 0$. Then either $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$ and then $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle = \langle a_n, c_n \rangle$, or $f(b_n) \cdot f(c_n) < 0$ and then $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle = \langle c_n, b_n \rangle$.

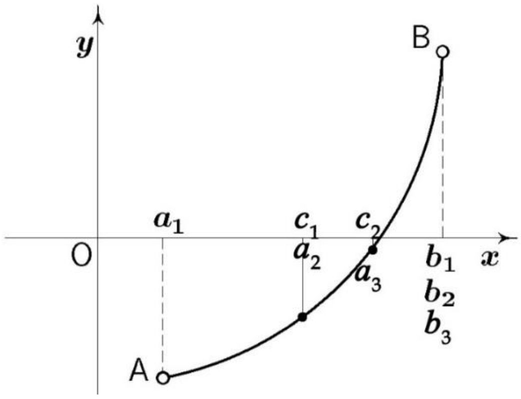


Figure 3: Method of bisection.

If the sequence $\{c_n\}$ has a finite number of members, then the last is the root of the equation $f(x) = 0$. If it is infinite, then it has a finite limit, which is the exact solution to our equation. At each step, the length of the interval was reduced by half, and thus for an approximate solution c_n the estimate $|c_n - k| < \frac{b-a}{2^n}$ applies, where k is the exact solution. To determine the approximate solution with accuracy $\varepsilon > 0$, then we terminate the process of dividing the interval when $|b_n - a_n| < 2\varepsilon$ and we will accept an approximate solution $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. From the inequality $|c_n - k| < \frac{b-a}{2^n}$ (if its right side is less than ε) we get $n > \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$, which represents the number of iterations needed for accuracy ε. If the conditions are satisfied that the function is continuous and assumes different characters at the ends of a given interval, then this method is always convergent. The following function (such as the m-file `bisection.m`) presents the method of bisection in the Matlab environment.

```
function [f_root, term_type] = bisection(funct, tol, maxiter,
                                          a, b)
iterations = 0;
term_type = 0;
f_root = NaN;
f_a = feval(funct, a);
f_b = feval(funct, b);

while (f_a * f_b<0) && (iterations<maxiter) && ((b - a)>tol)
  c = (b + a) / 2;
  f_c = feval(funct, c);
  if (f_c * f_a) < 0
```

```
      b = c;
      f_b = f_c;
    else
      a = c;
      f_a = f_c;
    end
    iterations = iterations + 1;
  end
   if (iterations == maxiter)
    term_type = 1;
  else
    f_root = c;
    term_type = iterations;
  end
   end
```

Now we can find the root of the equation using the created function $f(x) = x - 2\,sin\,x^2$ on the interval $\langle 0.5{,}1\rangle$. We create the function $f(x)$ as a separate m-file to call as a real parameter of the formal `funct` parameter in the `bisection` function.

```
function y = f(x)
y = x - 2*sin(x.^2);
```

To call the `bisection` function, run the script (`bisect.m` file) specified below for accuracy $\varepsilon = 10^{-4}$ and a maximum of 50 iterations allowed.

```
[f_root, term_type] = bisection('f', 1e-4, 50, 0.5, 1);
 if (term_type == 0)
  disp('The interval does not contain the root or contains
                                              more roots!')
elseif (term_type == 1)
  disp('The root could not be found within the specified
                                       number of iterations!')
else
  disp(['Root = ' num2str(f_root) ' found in '
                          num2str(term_type) ' iterations.'])
end
```

We get the result (Figure 4):

```
>> bisect
Root = 0.50543 found in 13 iterations.
```

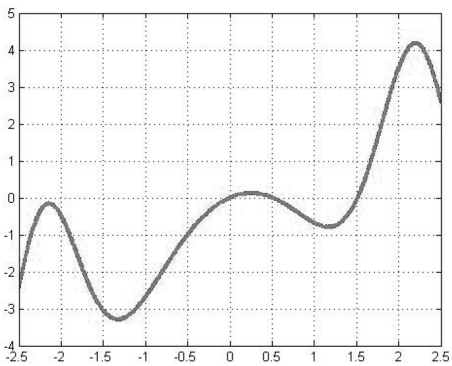


Figure 4: Function Graph $f(x) = x - 2\,sin\,x^2$.

Another option for finding the roots of a given function is to use the chord method (the so-called false-proposition method) [5]. Assume $f(a) \cdot f(b) < 0$. The chord method consists in replacing the function $f(x)$ in the interval (a, b) by a chord given by points $A\big(a, f(a)\big)$, $B\big(b, f(b)\big)$, whose equation is $y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ (Figure 5).

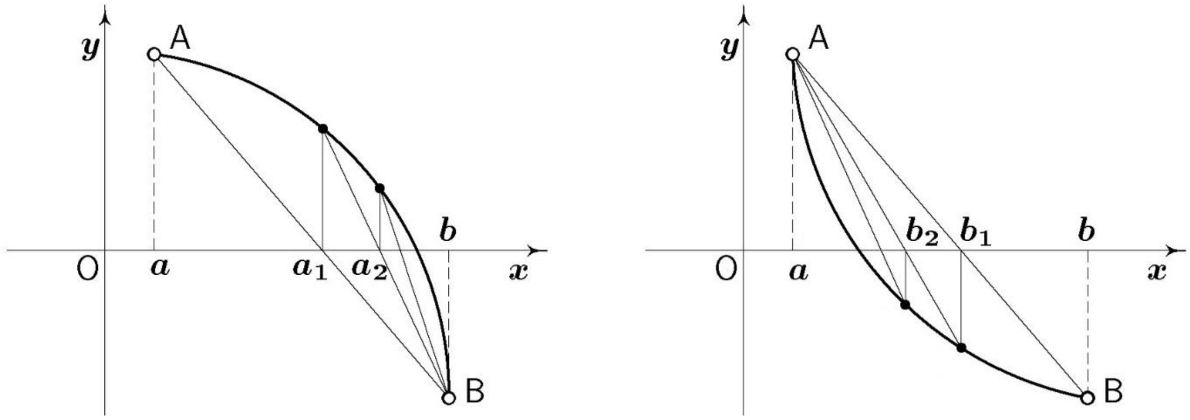


Figure 5: Method of chords.

Lay $y = 0$ and calculate the intersection point $x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$ with x axis. If the sign of $f(x_1)$ equals the sign of $f(a)$, we lay $x_1 = a_1$. Proceed in this way and get approximations $a_2 = a_1 - \frac{b-a_1}{f(b)-f(a_1)} f(a_1)$, a_3, a_4, ... that converge to the root k. If the sign of $f(x_1)$ equals the sign of $f(b)$, we lay $x_1 = b_1$, then $b_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$ as well as in the next process we get approximations $b_2 = a - \frac{b_1-a}{f(b_1)-f(a)} f(a)$, b_3 , b_4 , ... converging to the root. The chord method algorithm as a function written in Matlab then looks like [6]:

```
function f_root = false_proposition(f, tol, a, b)

fa = feval(f, a);
fb = feval(f, b);
 while (abs(fa) > tol) && (abs(fb) > tol)
  x1 = a - (b - a) / (fb - fa) * fa;
  fx1 = feval(f, x1);
  if (fx1 * fa) > 0
    a = x1;
  else
    b = x1;
  end
  fa = feval(f, a);
  fb = feval(f, b);
end
 f_root = x1;
 end
```

Now we find the root of the equation $x^3 - 5x^2 - 16x + 53 = 0$ in the interval $\langle 2{,}3 \rangle$ by the chord method with precision of $\varepsilon = 10^{-4}$.

```
>> format long
>> f = inline('x^3 - 5*x^2 - 16*x + 53');
>> f_root = false_proposition(f, 1.e-4, 2, 3)

f_root = 2.38347756851597
```

The tangent method (the Newton method) belongs among the important methods of roots approximation. The development of mechanics in the 17th century played its role in solving the problem of tangents, seeking their analytical expression and constructions. The correlation of physical factors of movement with the curve geometry of the moving point curve has crystallized into the concept that the direction of movement at each point of the trajectory is determined by the tangent to the curve at that point. The first concepts of tangents date back to antiquity [7], according to which the tangent line had one point in common with the curve. In modern differential geometry for higher-grade algebraic curves and transcendental curves, the original static concept of tangent has been replaced by the dynamic understanding of the tangent as the limit position of the secant with "infinitely close" intersections with the curve. In such a view of the tangent, various physical factors stemming from Galileo's theory of motion could have entered into the tangent theory. Isaac Newton (1642 - 1727), a mathematician and physicist, proved the solution to the tangent problem from the perspective of infinitesimal calculus by his methods and he described his methods of finding approximate algebraic solutions in 1699 in his work *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas,* published 12 years later by British mathematician William Jones. In 1740, based on this work, British mathematician Thomas Simpson introduced a new iterative method for solving general non-linear equations.

Suppose a given function $y = f(x)$ has a derivative. We choose the initial root approximation x_0. We run the tangent to the graph of function f through the point $[x_0, f(x_0)]$. Mark x_1 its intersection with the x axis. Then we lead the tangent through the point $[x_1, f(x_1)]$. Mark x_2 its intersection with the x axis. This proceeds further (Figure 6) [8].

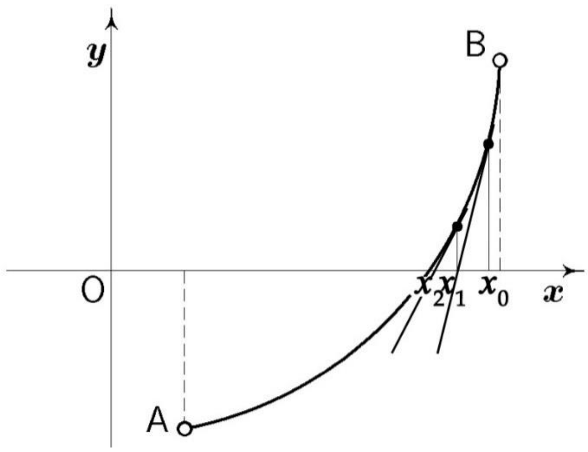


Figure 6: Newton method.

Suppose we know x_k and we want to calculate a closer approximation x_{k+1}. We run the tangent through the point $[x_k, f(x_k)]$ to the curve $y = f(x)$. Substitute to the tangent equation

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

by $y = 0$ to obtain the intersection of the tangent line with the x axis:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

We will now deduce the error of this method. Let $e_k = x_k - x^*$ is an error in the k-th step. Let us make Taylor expansion [9] $f(x^*)$ around x_k. Now suppose that the second derivative also exists. It is valid from the definition of Taylor expansion that its sum around the point equals the functional value at this point, so

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k) + \tfrac{1}{2}(x^* - x_k)^2 f''(\varphi),$$

where φ is a point of the interval whose limit values are x_k and x^*.
After simplification we get

$$-\frac{1}{2}(x^* - x_k)^2 \frac{f''(\varphi)}{f'(x_k)} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (x^* - x_k)$$

$$-\frac{1}{2}(x^* - x_k)^2 \frac{f''(\varphi)}{f'(x_k)} = x^* - \left[x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right] = x^* - x_{k+1}$$

$$\frac{1}{2} e_k^2 \frac{f''(\varphi)}{f'(x_k)} = e_{k+1}$$

Then

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \frac{|f''(\varphi)|}{|f'(x_k)|}$$

And we see that the Newton method converges quadratically. We can now find the root of the equation $f(x) = x - 2\sin x^2$ using the Newton method. For this purpose we created 3 functions in Matlab. The first represents the given function, the second represents its derivative:

```
function y = f(x)
y = x - 2*sin(x.^2);
function y = f2(x)
y = 1 - 4*x.*cos(x.^2);
```

The third function is the algorithm of the Newton method itself.

```
function [f_root, term_type] = newton(tol, x, maxiter)
 iterations = 0;
 while (iterations < maxiter) && (abs(f(x)) > tol)
  x = x - f(x) / f2(x);
  iterations = iterations + 1;
end
if (iterations == maxiter)
  term_type = 1;
else
  f_root = x;
  term_type = iterations;
end
 end
```

We call the `newton` function by running the script (`newton2.m`) lower with precision $\varepsilon = 10^{-4}$ and a maximum of 50 iterations allowed.

```
[f_root, term_type] = newton(1e-4, 1, 50);

if (term_type == 1)
  disp('Root not found!')
else
  disp(['Root = ' num2str(f_root) ' found in '
                       num2str(term_type) ' iterations.'])
end
```

We get the result:

```
>> newton2
Root = 0.50548 found in 4 iterations.
```

We can see that compared to the bisection method, we have obtained a root approximation with a significantly lower number of iterations due to quadratic convergence. The Newton method can also diverge. However, the method always converges, provided that the initial approximation is sufficiently close to the root. By appropriate combining the bisection method with the Newton method, it is possible to construct a combined method that always converges.

Conclusion

Mathematics provides a variety of analytical or algebraic tools to solve practical problems from different industries. However, many practical tasks result from the compilation of such equations or functions that are analytically insolvable or very difficult to solve. Thanks to numerical mathematics and computers, we can now construct algorithms for virtually every problem. These algorithms are able to find approximate (or even accurate) solutions within the accuracy we require, and our analytical task remains to determine the error estimate of the inaccurate solution. Root approximation means expressing the problem of solving the equation in a form useful in the field of iterative processes, which is also the bisection method, the chord method or the Newton method, obtaining a root value that is as accurate as possible to the true value. The roots approximation in the Matlab computational environment in terms of computations includes convergent methods, by means of which we can find solutions of non-linear equations with any degree of accuracy and thus Matlab proves to be a very suitable tool for implementing algorithms of various numerical methods.

References

1. Pickover C. A. (2011). *The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics*. New York, NY: Sterling Publishing, ISBN: 9781402757969.

2. Higham D. J., Higham N. J. (2017). *MATLAB Guide, 3e*. USA: SIAM, ISBN: 9781611974652.

3. Mathworks. (2019). *Online documentation*. Available at: https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/optimset.html, accessed 7th of June, 2019.

4. Otto S. R., Denier J. P. (2005). *An introduction to Programming and Numerical Methods in MATLAB*. London: Springer-Verlag London Limited, ISBN: 9781852339197.

5. Palumbíny D., Palumbíny O. (2002). *Algebra 2*. Nitra: Constantine The Philosopher University, ISBN: 8080505454.

6. Fulier J., Ďuriš V., Frantová P. (2007). *Systémy počítačovej algebry CAS vo vyučovaní matematiky*. Nitra: Constantine The Philosopher University, ISBN 9788080941390.

7. Čižmár J. (2017). *Dejiny matematiky – od najstarších čias po súčasnosť*. Bratislava: PERFECT, Slovak Republic, ISBN: 9788080468293.

8. Polyak B. T. (2007). *Newton's method and its use in optimization*. In: European Journal of Operational Research, Vol. 181, No. 3, p. 1086-1096, DOI: 10.1016/j.ejor.2005.06.076.

9. Plofker K. (2001). *The "Error" in the Indian "Taylor Series Approximation" to the Sine*. In: Historia Mathematica, Vol. 28, No. 4, p. 283–295, DOI:10.1006/hmat.2001.2331.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 5, No. 2, p. 11-22
ISSN 2453-6083

Vyučovanie matematiky orientovaného na budovanie mentálnych schém a výsledky z pozorovania žiakov počas vyučovania

Scheme-Oriented Approach to Mathematics Education and Results of an Observation of Pupils during the Educational Process

Kitti Páleníková[a] – Katarína Senderáková[b]

[a*]*Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr, A. Hlinku 1, 949 74 Nitra*
[b]*Cirkevná základná škola – NARNIA, Beňadická 38, 851 06 Bratislava*

Received September 20, 2019; received in revised form October 10, 2019; accepted October 11, 2019

Abstract

The following paper describes an alternative approach in mathematics education, known as Scheme-oriented mathematical education elaborated by prof. Milan Hejný from the Charles University, Prague, Czech Republic. We present the background of the approach: the theory of generic models; formalism and constructivism; schemes and structures and at least the principles of the approach. The paper then presents the results obtained by a structured observation of pupils of grade 5, 6 and 7 educated by this approach. We focused on the twelfth principle of the approach called Supporting collaboration – acquiring knowledge through discussion. We were interested in which portion of the lesson the students work together in pairs/in groups or in whole class discussion. We found out that pupils' collaboration takes more than 60 % of lesson. The findings are accompanied by other notes implicated by independently observation during the lessons.

Keywords: mathematics education, constructivism, mental schemes. Observation, collaboration of students.

Classification: D10, D40

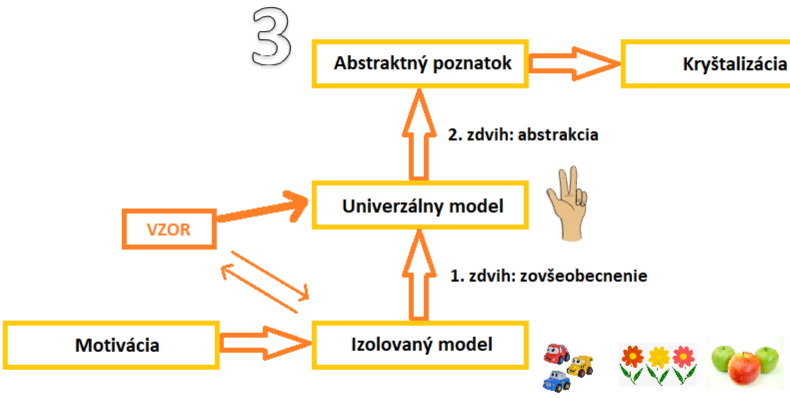
Úvod

Metóda Vyučovanie orientované na budovanie schém (VOBS) je na Slovensku známa aj ako Hejného metóda – podľa profesora Hejného, ktorý ju podrobne rozpracoval a implementoval spolu so svojím otcom a tímom spolupracovníkov. VOBS využíva už asi pätina základných škôl v Čechách [1] a takáto výuka sa začína šíriť aj na Slovensku. Medzi českými odborníkmi na didaktiku matematiky prebieha v posledných rokoch čoraz búrlivejšia diskusia o tom, či je táto metóda vhodná. V roku 2017 ukončilo v Českej republike základnú školu prvých 100 žiakov, ktorí sa na druhom stupni učili metódou VOBS a testovali pilotné učebnice k tejto metóde. Títo žiaci napísali prijímacie testy o niečo úspešnejšie ako žiaci učiaci sa matematiku inými metódami [2]. Novší výskum s väčšou výskumnou vzorkou (vyše 4000 žiakov) realizovala v roku 2018 spoločnosť Kalibro Projekt, s.r.o., kde v porovnávacích testoch z matematiky dosiahli žiaci vyučovaní metódou VOBS vyššie skóre ako žiaci vyučovaní inými metódami. Uvidíme, či žiaci vyučovaní metódou VOBS budú tí úspešnejší aj naďalej v ďalších ročníkoch.

*Corresponding author; email: kpalenikova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2019.5.2.11-22

Teória generického modelu

Na to, aby sme porozumeli vyučovaniu orientovanému na budovanie schém, potrebujeme poznať to, ako sa na poznávací proces pozeral Vít Hejný (slovenský pedagóg a matematik, otec Milana Hejného). Svoju koncepciu vytvoril v rokoch 1947 – 1977 a nazval ju teóriou generického modelu. Tento model ilustruje zasadzovanie sa novej myšlienky do už vytvorenej kognitívnej štruktúry a opiera sa o základné myšlienky Jeana Piageta [3]. Pozostáva z 5 fáz: 1. motivácia, 2. izolované modely, 3. generický model (procesuálny → konceptuálny), 4. abstraktný poznatok, 5. kryštalizácia. Medzi 2. a 3. fázou a medzi 3. a 4. fázou nastáva zdvih. Prvý zdvih sa nazýva zovšeobecnenie a druhý zdvih zasa abstrakcia [4]. Tento model využíva poznatok, že žiak zväčša najprv porozumie zopár jednotlivým úlohám, pozoruje podobné znaky a až potom prechádza k všeobecnejším a abstraktnejším poznatkom.



Obr. 1 Mechanizmus poznávacieho procesu. Upravené z [3]

V celom tomto procese hrá veľmi dôležitú úlohu abstraktný zdvih, ktorý sa nazýva tiež hladinový prechod. V matematike, ale aj v celom poznávaní je moment objavu tým najdôležitejším. Ak žiak nezažije tento „AHA moment" je ochudobnený o radosť z matematického poznávania [5].

Formalizmus a konštruktivizmus

K jedným z hlavných dôvodov, prečo sa profesor Milan Hejný hľadal inú cestu vo vyučovaní matematiky patrí aj fakt, že žiaci mali len formálne poznatky z matematiky, preto sa veľmi snažil vyhýbať formalizmu. Jeho metóda čerpá veľa z konštruktivizmu [6].

Formalizmus

K formalizmu často prispievajú aj učitelia. Spôsobujú ho tým, že veľmi dbajú na pamäťové učenie, zdôrazňujú vedomosti a vedú žiakov v prvom rade k tomu, aby mali poznatky a až neskôr sa budú zaoberať interpretáciou a aplikáciou. Namiesto toho, aby viedli k žiakov k väčšiemu porozumeniu, vedú ich len k väčšej snahe, väčšiemu drilu. Formalizmus u žiakov spôsobuje aj to, ak sa vo výuke nedáva dostatočný dôraz na etapu separovaných modelov a na vznik abstraktného poznatku [7].
Nie je ľahké spozorovať formalizmus, lebo prichádza nebadane a šíri sa pomaly. Jeho pomalému rozvoju napomáha aj to, že formalizmus nie je pre žiaka prirodzený, a preto sa mu bráni. Má tri štádiá:
1. **štádium**: Žiak si je vedomý toho, že jeho poznatky nie sú také, aké by chcel. Bráni sa tomu, keď mu učiteľ/rodič vnucuje formálne poznanie.

2. **štádium**: Žiak tu prechádza rozhodujúcou fázou. Formalizmus už prešiel do kognitívnej štruktúry žiaka. Nastáva tu pre žiaka moment voľby. Môže si vybrať, že sa bude snažiť matematiku pochopiť alebo rezignuje na skutočné porozumenie.

3. **štádium**: Keď si žiak v druhom štádiu vyberie druhú možnosť a rozhodne sa učiť sa všetko naspamäť bez hlbšieho porozumenia prechádza do tretieho štádia. Žiak tu už nejaví žiadne známky túžby porozumieť podstate a chce sa učiť už len mechanické postupy ako niečo vyriešiť [7].
Následky formalizmu nevidno hneď. Pre učiteľov nie je jednoduché diagnostikovať formalizmus u svojich žiakov. Deje sa to obvykle pri diskusii so žiakmi, pri domácej úlohe, pri tom, keď žiak rieši nejakú úlohu na tabuľu, pri rozbore písomnej práce alebo pri riešení netradičných úloh [8]. Dôležitá je tu komunikácia učiteľa so žiakom. Učiteľ sa pri tom snaží odhaliť, či je daný poznatok v žiakovej mysli prepojený s ostatnými a či dokáže na poznatok uviesť príklad (graficky alebo inak znázorniť). Učiteľovi pri diagnostike môžu pomôcť pravidlá, ktoré sformuloval Hejný [9].

Konštruktivizmus

Konštruktivizmus je široký prúd teórií vo vedách o správaní a sociálnych vedách. Konštruktivizmus zdôrazňuje aktivitu subjektu a dôležitosť jeho vnútorných predpokladov v pedagogických a psychologických procesoch a tiež významnosť interakcie subjektu s prostredím a so spoločnosťou [10]. Pedagogický konštruktivizmus spája kognitívny a sociálny konštruktivizmus. Snaží sa o to, aby sa vo vyučovaní viac pracovalo v skupinách, aby sa viac používali názorné pomôcky, aby sa viac manipulovalo s predmetmi a aby bolo prítomných viac konkrétnych úloh z reálneho života [11]. Tiež sa snaží o rozvoj tvorivého myslenia [12]. Cieľom konštruktivistickej teórie je zisťovať čo je objektom poznania, ako poznávame, podmienky na zlepšenie učenia a poznávania [13]. Konštruktivizmus sa opiera najmä o fakt, že to ako človek poznáva, je konštrukčného charakteru [14], [15]. Naše chápanie sveta vzniká podľa našich skúseností. Človek najprv nadobudne skúsenosti a tieto skúsenosti naša myseľ spracuje a interpretuje tak, aby boli pre nás užitočné. Realita teda vzniká v mysli toho, kto poznáva. Deje sa to vďaka poznávacím štruktúram, ktoré si vytvárame [16]. Konštruktivizmus tvrdí, že človek pomocou svojej aktivity a empírie vytvára svet. Teda človek je tu aktívnym, prepája si nové informácie s už poznanými a vytvára si svoje interpretácie. V konštruktivizme je učiaci sa aktívnym subjektom. Do učenia ho nemusí nikto stimulovať a sám hľadá význam vecí [17].

Hejného metóda veľa čerpá z najmä z genetického konštruktivizmu. Genetický konštruktivizmus je typický spojením genetického prístupu k učeniu matematiky a konštruktivistického prístupu k vyučovaniu. Genetický prístup k matematike sa zakladá na dôslednom poznaní jej dejín a epistemológie. Žiak by teda podľa genetického konštruktivizmu mal dosahovať svoje matematické vzdelanie na základe rekonštrukcie procesu historickej genézy matematiky čiže žiak by teda mal dostávať úlohy v takom poradí, aby opakoval proces genézy matematických poznatkov. Genetická metóda má aj epistemologickú rovinu. Neskúma matematické poznanie len v nejakom poradí. Venuje sa tiež procesom, ktoré prispeli k utváraniu a pretváraniu matematického poznania. V genetickom konštruktivizme sa vo vyučovaní dbá aj na jednotlivca, ktorý sa učí sám a aj na sociálnu zložku (žiaci sa učia v skupine). Spájanie týchto dvoch zložiek vedie k tomu, aby žiak dosiahol skutočné matematické poznanie [18].

Schémy a štruktúry

Pojem ***schéma*** sa chápe rôznorodo, je preto dôležité vymedziť, čo v sa v tomto kontexte pod pojmom schéma myslí. Schéma sa v tomto prípade chápe ako súčasť vedomia jednotlivca [4], [16]. Na to aby sme dokázali objasniť pojem schéma, musíme najprv vysvetliť procept, z ktorého schéma v tomto ponímaní vychádza. Pojem procept ako prví zavádzajú v roku 1994 matematici E. Gray a D. Tall. V matematike sa niekedy používa rovnaká symbolika pre proces (napr. sčítanie čísel 5 + 6) a aj produkt tohto deja (súčet 5 + 6). Symbol, ktorý označuje proces aj koncept sa nazýva procept. Nejednoznačnosť takéhoto zápisu poskytuje mysliacemu jedincovi možnosť sa flexibilne pohybovať v mysli od deja, ktorým úlohu rieši a konceptom, s ktorým operuje ako s časťou komplexnejšej schémy. Procept má svoju viacvrstvovú štruktúru (základ – elementárny procept a komplex elementárnych proceptov- procept vyššieho stupňa). Vrstvy proceptu sú systematicky usporiadané. Gray a Tall [19] vyzdvihujú dôležitosť proceptu, keď ukazujú, že na to, aby dokázal žiak napr. počítať mu nestačí len rýchlosť a tréning, ale musí vedieť pracovať s danými zložkami ako s časťami komplexnejšej schémy. Schéma je teda pamäťová štruktúra obsahujúca klastre údajov, ktoré sú podstatné pre porozumenie. Poznatky sa totiž nenachádzajú v ľudskej mysli izolovane, ale spájajú sa do väčších celkov. Klaster v tomto prípade znamená množstvo nejakým spôsobom spoločne uložených skúseností a izolovaných informácií pripadajúce jednej schéme alebo proto-schéme [20]. Napr. slová jeden, dva, tri, päť vníma ako slová klastru počtu, aj keď ešte nerozumie ich náplni [21]. Aby sa mohla schéma nazývať ***matematickou schémou*** v tomto zmysle musí podľa [4] spĺňať tieto dva predpoklady: 1. Zrod matematickej schémy je vytvorenie generického modelu, ktorý patrí do schémy. Izolované modely, ktoré stoja za vznikom generického modelu sú poznatky spájajúce sa do klastru. Ten vytvára podmienky pre vznik schémy. Vytvára sa proto-schéma – priestor pre uloženie izolovaných modelov. 2. Schéma je meniaca sa organizácia rozdielnych prvkov, teda prvky a vzťahy medzi nimi. Prvky v tejto organizácie aj vzťahy medzi nimi sú premenlivé a teda aj schémy sú viac alebo menej flexibilné. Pri zmene schémy je dôležitý nový izolovaný model, ktorý vytvára rozpor s predchádzajúcim pochopením danej veci (napr. zistenie, že aj 1/3 je číslo). Obvykle sa schéma mení rýchlo vtedy, keď s ňou žiak pracuje. Stáva sa však aj to, že nejaký objav ovplyvní aj iné schémy.

Schéma v uvedenom zmysle slúži aj ako mentálny nástroj, pomáha pri rozhodovaní sa, pri voľbe mét. Veľa tvrdení, ktoré platia o schémach v bežnom živote sa dajú aplikovať aj na schémy v matematike. O schéme ako o mentálnom nástroji platia podľa [4] nasledujúce tvrdenia: 1. Schémy sú veľkou pomôckou pri orientovaní sa v živote. Budovanie mentálnych schém v matematike je postavené na samostatnej intelektuálnej činnosti jedinca. To pomáha k tomu, aby si človek prepájal súvislosti, organizoval údaje, tvoril nové predstavy. 2. Schémy sa tvoria mimovoľne, ako následok jedincových potrieb. Ak nemá jedinec potrebu, schéma sa nevybuduje. 3. Schéma nejakého kúska reality je u každého človeka odlišná. Často kvôli tomu vzniká nedorozumenie medzi učiteľom a žiakom a učiteľ má potom tendenciu myslieť si, že žiak sa mýli, často to však len hovorí iným spôsobom, ktorému rozumejú viac iní žiaci ako učiteľ. 4. Pri spoločnom riešení nejakej úlohy ľudia dospejú k lepšiemu výsledku ako keď by každý z nich riešil úlohu sám. Keď sa žiaci medzi sebou rozprávajú, obohacujú sa navzájom a ich schémy sa môžu zlepšovať. 5. Prvky, ktoré človek dostal do schémy tak, že ich často používal a uvedomoval si ich, mu ostanú dlho. Naopak tie, ktoré používal len zriedka a uvedomoval si ich len málo, mu v pamäti neostanú dlho. 6. Tie prvky schémy, ktoré človek nevyužíva až tak často by mal mať prístupné v externej pamäti, aby ich vedel v prípade potreby využiť a tak sa môže sústrediť na náročnejšie operácie. Napríklad keď má žiak na lavici tabuľku malej násobilky dokým sa mu zautomatizuje, môže sa sústrediť na náročnejšie časti úlohy ako len na násobenie.

Štruktúra je tiež pojem, ktorý má mnoho významov, preto je potrebné vymedziť jeho význam tak ako to chápe Hejný. Pod štruktúrou rozumieme časť ľudského vedomia, kompletný systém pojmov a ich vzájomných vzťahov, pričom jednotlivé prvky sú jasne terminované a artikulované cez minimálne jeden formalizovaný jazyk. Líši sa od schémy tým, že tam musí byť formalizovaný jazyk a prvky musia mať jasné ohraničenie. Schéma je viac intuitívne porozumenie a štruktúra zas axiomatické. Štruktúra však nemôže byť bez schémy. Na vysokej škole sa tak často vyučuje, že sa najprv ponúknu definícia pojmu a až potom sa začnú riešiť úlohy, ktoré s tým súvisia. Môže sa zdať, že sa tak vybuduje štruktúra. Avšak, ak si študent sám nedotvorí schému, nikdy nepríde k podstate poznania [21].

Základné princípy „Hejného metódy"

Táto metóda sa zakladá na 12 kľúčových princípoch, ktoré sú navzájom prepojené a čerpajú veľa z predchádzajúcich teoretických východísk. Princípy sú nasledovné (spracované z [4] [22], [23], [24]):

1. Budovanie schém: vytváranie schém matematických pojmov, poznatkov, dejov v mysliach žiakov je základom tejto metódy. Tento princíp hovorí o tom, že deti majú v hlavách prirodzene schémy a je dôležité ich posilňovať, prepájať a vyvádzať z nich zákonitosti. Hejného metóda využíva napr. schému autobusu, rodiny atď. Tieto schémy majú žiaci prirodzene už vytvorené v svojich mysliach a vďaka nim môžu objavovať matematické poznanie autonómne.

2. Práca v prostrediach: učíme sa opakovanou návštevou. Žiak je sústredenejší ak vykonáva činnosti v prostredí, ktoré je mu už známe a nemusí venovať pozornosť rozptyľujúcim faktorom.

3. Prepájanie tém: matematické zákonitosti neizolujeme. Nové poznatky nie sú žiakovi dávané samostatné, ale sú vždy zasadené do nejakej už poznanej schémy. Ak si totiž žiak spája jednotlivé témy a nachádza medzi nimi prepojenia, dokáže si hocikedy odvodiť nejaký poznatok. Zatiaľ čo pri učení sa, ktoré izoluje jednotlivé zákonitosti a nesnaží sa o to, aby im žiak naozaj porozumel, si potom žiak ťažko vybaví, čo sa učili pred nejakým časom a nedokáže si to sám odvodiť, lebo tomu neporozumel do hĺbky. Funguje to dvojako: jednak daná úloha rozvíja viaceré žiacke matematické schopnosti a prepája rôzne matematické celky a tiež nejaká matematická schopnosť sa vytvára v rôznych prostrediach.

4. Rozvoj osobnosti: podporujeme samostatné uvažovanie detí. Učiteľ k tomu prispieva tak, že namiesto toho, aby bol nositeľom poznania sa snaží o to, aby sa deti naučili diskutovať, hodnotiť, vyjadriť svoj názor a obhájiť si ho. Deťom to pomáha k tomu, aby sa vedeli rozhodnúť, aby dokázali rešpektovať druhých ľudí a aby dokázali niesť dôsledky za svoje správanie. Takisto sa žiak môže často sám rozhodnúť, akú náročnosť úlohy/testu/domácej úlohy si zvolí. Môže si tiež zvoliť tempo a spôsob práce.

5. Skutočná motivácia: keď „neviem" , a „chcem vedieť". Tento princíp je založený na viere v to, že každé dieťa je prirodzene zvedavé, že túži poznávať a že stačí jeho motiváciu podporovať. Dieťa má však inú motiváciu ako dospelý. Dieťa chce poznávať neodbytne a hneď, zaujíma ho mnoho vecí a často prebieha od jednej k druhej. V Hejného metóde je snaha o vnútornú motiváciu, keďže je kľúčovou v poznávacom procese. Úlohy sú koncipované tak, aby žiakov bavili a žiaci ich riešia sami a potom majú zo svojho úspechu radosť. Tešia sa zo svojich

„aha momentov“. V Hejného metóde je žiakovi ponúknutá matematika, ktorá je založená na jeho skúsenostiach.

6. Reálne skúsenosti: staviame na vlastných zážitkoch dieťaťa. Veľmi sa tu využívajú reálne skúsenosti dieťaťa, ktoré si vytvorilo doma, vonku, s kamarátmi atď. Pri skúsenostiach je dôležité to, že sú neprenosné, žiak to musí sám zažiť, sám sa musí zaoberať danou úlohou. Skúsenosť pre neho je, aj keď úlohu nevyrieši. Ale skúsenosť s tým, že našiel spôsob, ktorým sa nedostane k riešeniu alebo s tým, že zistil, čo ešte nevie na to, aby úlohu vyriešil. Naopak ak žiakovi niekto len povie nejaký poznatok, stane sa len formálnym a neosvojí si ho skutočne.

7. Radosť z matematiky: výrazne pomáha pri ďalšej výuke. Ak má žiak radosť z toho, že sa mu niečo podarilo, že ho pochválil učiteľ alebo spolužiaci, má omnoho väčšiu motiváciu pustiť sa do ďalšieho poznávania a aj do náročnejších úloh. Pričom objavovaniu výrazne napomáhajú matematické prostredia, ktoré sú koncipované tak, aby žiaci prichádzali k objavom. Keďže je mnoho rozličných prostredí, každý žiak môže nájsť nejaké, v ktorom mu to ide veľmi dobre. Rozličné úrovne náročnosti úloh zas prispievajú k tomu, aby mali radosť z úspechu všetci žiaci.

8. Vlastný poznatok: má väčšiu váhu ako ten prevzatý. Žiak na svojej ceste získava skúsenosti, diskutuje so spolužiakmi, koncipuje si nejakú teóriu, ktorú potom preveruje a vysvetľuje ostatným. Vďaka tomu sa sám dostáva k objaveniu nejakého poznatku. Napr. skladanie penových zlomkov do koláča, ciferník, čokoláda – to všetko žiakovi pomáha k tomu, aby objavil zákonitosti, ktoré platia pri práci so zlomkami. Nikto mu to nepovedal, sám to zistil. Každý žiak má svoje tempo a na rôzne poznatky príde v rôznom čase alebo mu vysvetlí nejaký objav spolužiak. Aj tak však prešiel cestu objavovania, preto si dokáže tento poznatok zvnútorniť a rozumie mu a je cennejší ako keby si ho iba niekde prečítal. Keď žiak na niečo sám príde, je mu jednoduchšie to zovšeobecniť a prijať matematický jazyk. Tento princíp verí tomu, že žiak dokáže sám objaviť všetko v matematike, dokonca aj tak zložitú vec ako integrály.

9. Rola učiteľa: sprievodca a moderátor diskusií. Dôležitým princípom v metóde VOBS je to, akú rolu zohráva učiteľ. Učiteľ má podľa Hejného vo vyučovaní nasledovné úlohy (okrem tých, ktoré sú už spomenuté v iných princípoch):
a) Učiteľ by mal byť tvorcom dobrej pracovnej klímy. Žiakov by mal motivovať, povzbudzovať a prežívať s nimi radosť z ich úspechov.
b) Učiteľ by mal žiakom nechať priestor. Nemal by im vnucovať svoje riešiteľské stratégie, aj keď žiacke postupy nepovažuje za najlepšie. Mal by žiakom nechať priestor na premýšľanie a neprerušovať ich myšlienkové procesy. Žiakom pomáha doplňujúcimi otázkami, len ak sa naozaj snažili a už nevedia čo ďalej.
c) Učiteľ by mal žiakov podporovať v túžbe rozumieť matematike, objavovať ju. Mal by oceňovať najmä to, že žiaci pracujú a nie to, že sa dokážu niečo naučiť naspamäť alebo že dokážu urobiť niečo rýchlo.
d) Učiteľ by mal žiakov viesť k diskusii v rôzne veľkých skupinách a mal by byť moderátorom týchto diskusií. V diskusii by mal zapájať všetkých žiakov a aj chybné riešenia by nemal hneď označiť za chybné. Nemal by dať najavo, ktoré riešenie je správne alebo ak sa objaví viacero postupov riešenia nejakého typu úloh nemal by povedať ktorý z nich je lepší alebo ktorý preferuje, ale mal by žiakov nechať možnosť vybrať si. Takto pomáha žiakom, aby boli otvorení voči iným názorom a aby sa učili im rozumieť, čím tiež podporuje kritické myslenie.

10. Práca s chybou:

Hejného metóda sa pozerá na chybu ako na niečo prirodzené, ako na normálny sprievodný jav učenia sa. Opiera sa o tvrdenie, že chybami sa človek učí. V tejto metóde je chyba vítaná a je cestou k tomu, aby žiak niečomu skutočne rozumel. Na to, aby bola žiakovi pomocníkom na ceste poznávania, s ňou musí učiteľ správne pracovať. Je dôležité, aby učiteľ vedel v akej fáze prítomnosti chyby sa žiak nachádza a na základe toho mu poskytol potrebnú pomoc. Týchto fáz je päť:

1. žiak vie o prítomnosti chyby nevie,
2. žiak sa domnieva, že má chybu, ale nie je o tom úplne presvedčený,
3. vie, že niekde spravil chybu, ale nevie nájsť kde,
4. vie, že má chyba a má tušenie, kde by mohla byť,
5. vie, že má chybu a presne vie kde.

Učiteľ by mal so žiakovou chybou pracovať pomocou nasledovných rád:
a) Keď spraví učiteľ nejakú chybu, snaží sa hľadať jej príčinu a ak nejaký žiak upozorní učiteľa na chybu, mal by mu byť za to vďačný. Tak vytvára v triede atmosféru, v ktorej sa žiaci chýb neboja.
b) Učiteľ by mal žiaka viesť k tomu, aby ho chyba neodradila, ale aby sa z nej poučil.
c) Keď žiak vie, v ktorej fáze riešenia urobil chybu, ale stále ju nevidí, učiteľ mu môže pomôcť tak, že mu dá úlohu, ktorá nadväzuje na predchádzajúcu alebo úlohu, ktorá mu jasnejšie ukáže, v čom chyba spočíva.
d) Ak učiteľ zistí, že žiak nie je schopný odstrániť svoju chybu, mal by pristúpiť k diagnostike chyby a následne k reedukácii.
e) Učiteľ by mal žiaka viesť k tomu, aby si sám uvedomil, prečo urobil chybu a čo by mohol urobiť v budúcnosti, aby sa tejto chybe vyhol.

11. Primerané výzvy: pre každé dieťa zvlášť podľa jeho úrovne. Tento princíp nadväzuje na predchádzajúce tým, že sa opiera o tvrdenie, že ak sa dieťaťu dá primeraná výzva, má z riešenia radosť. Môže k tomu prispieť učiteľ tým, že dá dieťaťu možnosť výberu úloh na hodine alebo tým, že zostaví test, kde sú rôzne náročnosti úloh. Učiteľ by mal k tomu prispievať tiež tak, že diferencuje prácu na hodine pre žiakov, ktorí sú na rôznych úrovniach. Potom žiaci, ktorí sú slabší majú potom radosť z úspechu, keďže sa im podarilo vyriešiť niečo na ich úrovni a najlepší žiaci majú tiež radosť, lebo sú im predkladané úlohy, ktoré sú na ich úrovni a nenudia sa. Učiteľ tu musí byť citlivý na to, že pre slabšieho žiaka môže byť novým poznatkom niečo, čo je pre ostatných zrejmé. Tiež by mal venovať dostatok pozornosti nadaným žiakom. Veľkou pomôckou sú v tom Hejného učebnice, ktoré poskytujú gradované úlohy podľa náročnosti a tiež špeciálne úlohy pre nadaných žiakov. Hejného učebnice tiež rešpektujú vývojové fázy dieťaťa a snažia sa o to, aby úlohy mali svoju kontinuitu a neboli medzi nimi priveľké skoky.

12. Podpora spolupráce: poznatky sa rodia vďaka diskusii. Tento princíp hovorí o tom, je dobré, ak sa striedajú rôzne formy práce: jednotlivo, vo dvojici, v skupine. Každému žiakovi vyhovuje v danom čase niečo iné. Aj keď nejaký žiak pracuje rád sám, zväčša svoje riešenie veľmi rád s niekým prediskutuje. Riešenie vzniká vďaka spolupráci. Veľká časť žiackeho poznania sa vytvára na základe skúsenosti a vďaka diskusii, práve preto je diskusia a spolupráca dôležitá. Diskusia je dôležitá kvôli tomu, že tam žiaci môžu vyjadrovať svoje názory, môžu prehodnocovať rôzne možnosti, argumentovať a hájiť svoj názor. V diskusii sa tiež vyjasňujú mylné predstavy. Tak sa buduje nový poznatok. Učiteľ sa snaží o organizáciu vyučovania tak, aby mali žiaci možnosť spolupracovať, aj keď obmieňa formy práce. Mal by vyberať také organizačné formy, pri ktorej žiaci medzi sebou interagujú. Môže to byť práca vo dvojici, práca v štvorici alebo aj práca v celej triede. Žiaci pri práci môžu medzi sebou komunikovať, čo je veľmi dôležité. Vďaka tomu, že učiteľ podporuje spoluprácu a žiakov k tomu vedie môže v triede prebiehať tzv. „kognitívna osmóza“

Popis a výsledky pozorovania

Počas pozorovania sme sa zamerali najmä na dvanásty princíp Hejného metódy – podpora spolupráce: poznatky sa rodia vďaka diskusii. Hlavným cieľom pozorovania bolo zistiť, akú časť hodiny je prítomná spolupráca na hodinách matematiky vyučovaných metódou VOBS. Sledovali sme, koľko minút z vyučovacej hodiny tvorí skupinová práca, resp. práca v dvojici u jednotlivého žiaka a koľko času z hodiny tvorí spoločná diskusia všetkých žiakov v triede. V pozorovacích hárkoch sme sledovali každého žiaka osobitne, pretože v metóde VOBS sa niekedy postupuje tak, že žiak dostane na výber, či chce pracovať sám/v dvojici/v skupine, či sa chce zapojiť do diskusie, alebo si chce ešte dokončiť rozpracované.

Pre účely pozorovania žiakov sme dostupných výberom vybrali dve základné školy, ktoré vo výučbe aplikujú metódu VOBS aj na druhom stupni vzdelávania, a to Súkromná základná škola Felix a Súkromná cirkevná základná škola Narnia. Na týchto školách učia matematiku metódou VOBS od 1. ročníka, ale majú aj takých žiakov, ktorých prijali až do 5. ročníka, a tak sa Hejného metódu učia až od 5. ročníka. Pozorovanie žiakov na hodinách vedených metódou VOBS prebiehalo na troch základných školách: dvoch v Bratislave – SZŠ Felix (v dvoch triedach 5. ročníka a jednej triede 7. ročníka) a SCZŠ Narnia (tri triedy 6. ročníka) a jednej v Prahe – FZŠ Táborská (jedna trieda v 5. ročníku a 1 trieda v 9. ročníku).

Z pozorovania jednotlivých vyučovacích hodín matematiky učených metódou VOBS sme zistili, že skupinová práca alebo práca v dvojici tvorí u jednotlivého žiaka počas 45-minútovej vyučovacej hodiny matematiky približne 41,30 % a spoločná diskusia žiakov tvorí u jednotlivého žiaka približne 18,16 % (bližšie v tab. 1). Spolu je to 59,46 %, čo tvorí skoro dve tretiny vyučovacej hodiny. Vyučovacie hodiny boli rôzne, na niektorých sa vôbec nediskutovalo alebo sa vôbec nepracovalo v skupine.

Avšak priemerné výsledky výskumu hovoria o tom, že diskusia, práca v dvojici a skupinová práca tvoria veľmi významnú časť každej vyučovacej hodiny matematiky vyučovanej metódou VOBS. Tento výsledok odráža reálnu aplikáciu dvanásteho princípu metódy VOBS do vyučovacej hodiny. Tieto výsledky tiež ukazujú na to, že táto metóda skutočne dbá aj na sociálny charakter vyučovania, aby sa žiaci naučili pracovať v tíme, spolupracovať, riešiť konflikty, vyjadrovať sa, diskutovať, argumentovať, prezentovať (rozvoj tzv. soft skills = mäkké zručnosti). Výsledky výskumu nepriamo ukazujú na to, že metóda VOBS nedbá len o výučbu matematiky, ale aj o výchovu.

Tab. 1: Priemery a smerodajné odchýlky času žiakov pri práci v dvojici/skupine alebo diskusii celej triedy počas 45-minútovej vyučovacej hodiny matematiky vyučovanej metódou VOBS

	Priemer	**Smerodajná odchýlka**
Práca v dvojici/v skupine	18,58 min	11,85 min
Diskusia v celej triede	8,17 min	8,69 min

Počas pozorovaní vyučovacích hodín matematiky vyučovaných touto metódou sme si všimli aj ďalšie zaujímavosti: To ako vo vyučovacích hodinách prebiehalo *rozdelenie do skupín* bolo zaujímavé. Keď sa žiaci mali zoznámiť s nejakým novým prostredím, skôr zvykli pracovať v dvojici. Často sa stávalo, že žiaci sa mohli rozdeliť do skupín sami tak, ako chceli, resp. mohli si vybrať či chcú pracovať samostatne alebo v dvojici/skupine.

Niekedy sa stávalo, že žiaci boli do skupín rozdelení náhodne. To, či si mohli vybrať sami skupinu alebo boli rozdelení lósom, odráža to, na čo bola viac zameraná vyučovacia hodina: či jej dôležitejším cieľom bol rozvoj myslenia a matematických vedomostí, zručností, schopností alebo naučiť sa spolupracovať, pracovať v skupine. Pri pozorovaní sme si všimli, že skupiny sa vytvárali ešte aj iným spôsobom. Žiaci mali najprv riešiť nejaké úlohy samostatne a potom tí, čo ich vyriešili si začali vytvárať „hniezda“ – skupiny, kde diskutovali o tom, kto to ako vyriešil a kto má správne riešenie.

Rola učiteľa: Pri pozorovaní sme si všimli, že učiteľ má pri skupinovej práci/práci v dvojici a v diskusii špeciálnu úlohu. V diskusii je moderátorom – veľa sa žiakov pýta, usmerňuje diskusiu, dáva slovo, neprezrádza správne riešenie, keď sa ho nejaký žiak niečo opýta, tak sa opýta ostatných žiakov, čo si o tom myslia, vyzve ostatných žiakov, aby sa mu to pokúsili vysvetliť. Učiteľ sa v diskusii tiež zvykne pýtať, či žiaci porozumeli tomu, ako jeden žiak niečo vysvetľoval. Učiteľ usmerňoval diskusiu tak, aby sa žiaci sami dopracovali k novému poznatku, k správnemu riešeniu. Pri skupinovej práci/práci v dvojici učiteľ žiakov motivoval, zisťoval ako sa im pracuje, snažil sa im pomôcť, ak potrebovali. Snažil sa im však pomôcť tým, že im napr. radil, aby si znova prečítali zadanie úlohy alebo sa ich otázkami snažil priviesť k tomu, aby porozumeli, čo majú robiť.

Reálny *obraz o sebe a spätná väzba*: Žiaci si po skupinovej práci/diskusii dávali spätnú väzbu na to ako pracovali/diskutovali. Prebiehalo to napr. tak, že žiaci povedali koľko bodov by si dali za to, ako dnes pracovali v skupine, čo sa im podarilo, na čo sú hrdí. Po diskusii hodnotili to, kto prispel do diskusie dobrými argumentmi. Vďaka takejto spätnej väzbe si žiak buduje reálny obraz o sebe. Všimli sme si, že vďaka tomu, že si spätnú väzbu dávajú často, sa žiaci vedia realisticky ohodnotiť. Hodnotenie vlastných schopností vo vyučovaní je pre žiakov potrebné, a na školách málo využívané [25] V rámci diskusie sme spozorovali, že sa tu zaujímavým spôsobom *pracovalo s chybou*.

Keďže žiaci spolu často diskutovali a boli zvyknutí prezentovať svoje riešenie, nemali s tým problém, aj keď si ním neboli istí. V diskusii sa potom rozprávalo o ich riešení a žiaci si navzájom vysvetľovali, prečo je nejaké riešenie správne alebo nesprávne. Aj Boaler [5] zdôrazňuje, že jedným z najdôležitejších krokov, ktoré môže učiteľ spraviť, je zmeniť celkový prístup k robeniu chýb – jeden malý krok, no veľký rozdiel pre študentov. potrebu robiť chyby, nakoľko sa podľa nej pri chybe. Najmä *skupinová práca a práca v dvojici žiakov bavila*. Tešili sa na aktivitu, lebo mali pocit, že sa budú hrať. Často žiaci prejavovali radosť aj z toho, že mohli prispieť do diskusie a prezentovať vlastné riešenie. Potvrdzuje to aj výsledky autoriek Medová a Bakusová [13].

Samotná *diskusia* sa vyznačovala niektorými charakteristikami. Diskusia prebiehala až po tom, ako žiaci skončili nejakú prácu, aby nebol prerušený ich myšlienkový tok a žiak mohol ostať pracovať na nejakej úlohe, ak chcel. V rámci diskusie žiaci ukazovali svoje riešenia alebo prezentovali svoje názory a niekedy ostala diskusia aj otvorená, či už do ďalšej hodiny alebo na neurčito. Poukazovalo to na aspekt, že učiteľ nie je v tejto metóde nositeľom poznania. Diskusia sa niekedy diala na koberci, aby sa tak odbúrali bariéry medzi žiakmi. A keď nejaký žiak niečomu nerozumel a opýtal sa to, tak mu to vysvetľoval iný žiak a nie učiteľ. Žiaci majú medzi sebou podobnejší spôsob komunikácie a preto si skôr porozumejú. Správna organizácia diskusie napomáha aj slabším žiakom zapájať sa do riešenia úloh [26].

Poznatok sa rodí v diskusii: Pri diskusii som mohla vidieť, že žiaci dospeli k nejakému poznaniu spolu, vďaka diskusii- napr. po aktivite pri diskusii dospeli k poznaniu vzťahov medzi sčítaním párnych čísel, nepárnych čísel a párneho a nepárneho čísla.

Napriek tomu, že sme sa pri pozorovaní zameriavali najmä na princíp spolupráce, na všetkých pozorovaných vyučovacích hodinách sme si všimli, ako sa jednotlivé princípy dopĺňajú.

Záver

Metóda vyučovania orientovaného na budovanie schém nás zaujala najmä tým, že je naozaj orientovaná na aktívnu prácu žiakov na hodinách. Je však dôležité dodať, že ak sa učiteľ na vyučovanie touto metódou nepripravuje s dodatočných predstihom, a nezíska tak celkový nadhľad nad koncepciou celého prístupu, sa výhody tejto metódy môžu úplne stratiť. Spolupráca žiakov vo vyučovaní matematiky je veľmi dôležitá, prácu v skupinách odporúčajú viacerí odborníci, napr. v [27], [28].

Autorky Jančaříková a Scholleová [29] uvádzajú aj návrh rozdelenia žiakov do skupín tak, aby bola ich spolupráca v rámci skupiny čo najefektívnejšia. Pozorovaním sme zistili, že približne dve tretiny z vyučovacej hodiny sa práca žiakov na hodinách vyučovaných metódou VOBS prebiehala vo dvojici/v skupine alebo spoločnou diskusiou v celej triede.

Učiteľ, ktorý nevie viesť diskusiu v triede správnym spôsobom ako facilitátor a diskusia nahradí iba jeho výklad učiva, nie je pripravený vyučovať touto metódou. Ďalej musíme poznamenať, že táto metóda nemusí vyhovovať každému žiakovi.

Z vlastnej skúsenosti vieme, že žiaci „s vlohami na matematiku“ zvládnu učivo matematiky na výbornú bez ohľadu na vyučovaciu metódu, ale myslíme si, že táto metóda najviac pomôže takým žiakom, ktorí potrebujú na pochopenie učiva viac času a dlhšie pracovať so separovanými alebo univerzálnymi modelmi.

Poďakovanie

Výskum popísaný v príspevku bol realizovaný v rámci diplomovej práce Mgr. Kataríny Senderákovej (rod. Gáborovej) pod vedením RNDr. Kitti Páleníkovej, PhD.

Literatúra

1. Koubová, K.,. Svoboda, V.: *Hejného metóda je nebezpečný experiment. Nevíme, jaký dopad má na žáky, varuje matematiky Pokorný.* In *Český rozhlas*. 2018. Citované 9. 10. 2019. Dostupné na https://plus.rozhlas.cz/hejneho-metoda-je-nebezpecnyexperimen t-nevime-jaky-dopad-ma-na-zaky-varuje-7202114
2. Trachtová, Z.: *U přijímaček se dařilo „Hejného dětem“. Myslí logicky a počty je baví*. In *iDNES*. 2017. Citované 9. 10. 2019. Dostupné na https://www.idnes.cz/zpravy/domaci/hejneho-metoda-prijimacizkousky.A170630_110555_domaci_zt
3. Chytrý, V.: *Netřadiční přístupy k vyučování matematice*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně v Ustí nad labem, 2015. Citované 9. 10. 2019. Dostupné na http://old.projekty.ujep.cz/podpuc/wp-content/uploads/2014/06/Netradicni_pristupy_k_vyucovani_matematice.pdf
4. Hejný, M.: *Vyučovaní matematice orientované na budování schémat: aritmetika I. stupně*. Praha: Univerzita Karlova, 2014. 229 s. ISBN 978-80-7290-776-2.

5. Boaler, J.: *Mathematical Mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. California: John Wiley & Sons, 2015. 292 p. ISBN 978-0-470-89452-1
6. Hejný, M., Michalcová, A. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. Bratislava: Metodické centrum, 2001. 188 s. ISBN 80-8052-085-2
7. Strečko, V., *Technologické prvky nápravy typických chýb a nedostatkov žiakov SŠ v matematickej činnosti.* In Slovenský učiteľ, roč. 18, č. 5, 2010. s. 6-12. ISSN 1338-1202
8. Vallo, D., Rumanová, L., Ďuriš, V.: *Some Spatial Competences and Formalism in Solutions of Stereometrical Tasks.* In Procedia - Social and Behavioral Sciences, no. 197, 2015. pp. 2320-2324. ISSN 1877-0428
9. Hejný, M.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. 554 s. ISBN 80-08-01344-3
10. Škoda, J., Doulík, P.: *Psychodidaktika*. Praha: Grada publishing, a.s., 2011. 208 s. ISBN 978-80-247-3341-8
11. Steffe, L.P., Kieren T.: *Radical Constructivism and Mathematics Education.* In Journal for research in Mathematics Education, vol. 25, no. 6, 1994. pp. 711-733. ISSN 0021-8251
12. Perný, J.: *Konstruktivizmus ve vyučování matematice.* In *Matematika v škole dnes a zajtra*. Ružomberok: Katolícka univerzita v Ružomberku, 2006. s. 237-244. ISBN 80-8084-066-0
13. Medová, J., Bakusová, J.: *Application of Hierarchical Cluster Analysis in Educational Research: Distinguishing between Transmissiveand Constructivist Oriented Mathematics Teachers.* In Statistika: Statistics and Economy Journal, vol. 99, no. 2, 2019. pp. 142-150. ISSN 1804-8765
14. Krpec, R.: *My Way to Constructivism*. In SGEM 2015 International Multidisciplinary Scientific Conferences on Social Sciences and Arts. Albena: SGEM, 2015. pp. 685-692.
15. Krpec, R.: *Konstruktivistický přístup k výuce kombinatoriky*. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, 2015. 96 s. ISBN 978-80-7464-800-7
16. Jančařík, A.: *Vybrané teorie učení a jejich projekce do využívání ICT ve výuce matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, 2013. 187 s. ISBN 978-80-7290-766-3
17. Veselský, M.: *Pedagogická psychológia 2: Teória a prax*. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 2005. 168 s. ISBN 80-223-1911-2
18. Kvasz, L.: *Princípy genetického konštruktivizmu.* In Orbis Scholae, roč. 10, č. 2, 2016. s. 15-45. ISSN 1802-4637
19. Gray, E., Tall, D.: *Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic.* In The Journal for Research in Mathematics Education, vol. 25, no. 2, 1994. pp. 116-140. ISSN 0021-8251
20. Schoenfeld, A. H.: *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics*, in Grouws, D. A. (ed.) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan: New York, 1992. pp. 334-370. ISBN 978-0029223819
21. Hejný, M.: *Schéma – pilíř matematické znalosti*. in *Letná škola pytagoras 2007*. Bratislava: P-mat, 2007. s. 3-18. ISBN 80-969414-7-X
22. H-mat. *Hejného metoda*. Citované 9. 10. 2019. Dostupné na https://www.h-mat.cz/principy.
23. Hejný, M.: *Scheme – oriented educational strategy in mathematic*. In *Supporting Independent Thinking Through Mathematical Education*. Wydawnictvwo Uniwersytetu Rzeszowskiego: Rzeszów, 2008. pp. 40-49. ISBN 978-83-7338-420-0

24. Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, 2004. 470 s. ISBN 80-7290-189-3
25. Říčan, J., Chytrý, V.: *Metakognice a metakognitivní strategie jako teoretické a výzkumné konstrukty a jejich využití v moderní pedagogické praxi*. Ústí nad Labem: Most, Hněvín, 2016. 310 s. ISBN 978-80-86654-93-3
26. Stein, M. K., et al.: *Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell.* In Mathematical Thinking and Learning, vol. 10, no. 4, 2008. pp. 313-340. ISSN 1098-6065
27. Zakaria, E., Chin, L. Ch., Daud, Y.: *The Effects of Cooperative Learning on Students' Mathematics Achievement and Attitude towards Mathematics.* In Journal of Social Sciences, vol. 6, no. 2, 2010. pp. 272-275. ISSN 1549-3652
28. Pirie, S. E. B., Schwarzenberger, R. L. E.: *Mathematical discussion and mathematical understanding.* In Educational Studies in mathematics, vol. 19, no. 4, 1988. pp. 459-470. ISSN 0013-1954
29. Jančaříková, K., Scholleová, H.: *Methodology for team member selection for the need of work in course of daily and distance learning education*. In *International Conference Efficiency and Responsibility in Education*, Prague, 2010. pp. 137-145. ISBN 978-80-213-2084-0

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 5, No. 1, p. 23-29
ISSN 2453-6083

Chyby v riešeniach vybraných úloh z geometrie

Mistakes in Solving Selected Geometry Problems

Lucia Rumanová [a*] – Júlia Záhorská [b]

[a,b] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra, Slovakia*

Received October 15, 2019; received in revised form October 19, 2019; accepted October 20, 2019

Abstract

The aim of this article is an analyze students´ tasks related to spatial ability from the point of view of the theory of the didactical constructivism. We specify some misconceptions in students' knowledge structure in the conception of the cube buildings and we identify the causes of failure in the students' solutions. Selected sample of respondents were the students in the study field Pre-school and Elementary Education at Pedagogical faculty CPU in Nitra.

Keywords: misconceptions, geometry, problems, spatial ability, future teachers.

Classification: G10, G20, D32

Úvod

Vo vyučovacom procese sa často prejavujú nejasné, navzájom neprepojené alebo aj mylné poznatky žiakov. Žiacke zistenia sú z toho dôvodu nesprávne interpretované, smerujú k nesprávnym vysvetleniam alebo riešeniam problémov. Niekedy sa žiak snaží vo svojej odpovedi používať rôzne vedecké pojmy, snaží sa odborne argumentovať a riešiť danú problematiku. Používa pritom pojmy, ktoré sú nezriedka formálne vytvorené, žiak im poriadne nerozumie a hlavne mu chýba prepojenosť s bežnou praxou. Toto všetko negatívne ovplyvňuje vyučovací proces a aj ďalšie nadobúdanie vedomostí v rámci jeho priebehu. Ďalším problémom vo vyučovaní býva tiež izolované nadobúdanie vedomostí, ktoré je jednou z príčin, že nadobudnuté poznatky nie sú pre žiakov trvácne.

V našom článku sa preto budeme venovať miskoncepciám vo vyučovaní geometrie. Sústredíme sa na ich rozbor v riešeniach úloh, ktoré súvisia so stavbami z kociek. Našim cieľom je identifikovať najčastejšie miskoncepcie v riešeniach geometrických úloh, ktoré boli zadané budúcim učiteľom predprimárneho vzdelávania.

Úlohy súvisiace so stavbami z kociek majú v učebniciach matematiky nezastupiteľné miesto, žiaci túto problematiku obľubujú, preto je potrebné zaraďovať ich do vyučovacieho procesu.

Konštruktivisticky orientované vyučovanie a miskoncepcie vo vyučovacom procese

Východiskami pre konštruktivistickú výučbu, ako sa uvádza v [1], sú konštruktivizmus („umožni mi, aby som objavil" – Piaget, Vygotskij) a konštrukcionizmus („najlepšie sa učím, keď niečo

*Corresponding author; email: lrumanova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2019.5.2.23-29

vytváram, konštruujem“ – Papert). Ďalej autor [1] konštatuje, že učiteľ v konštruktivisticky orientovanom vyučovaní pôsobí predovšetkým ako facilitátor, čiže uľahčovateľ žiakovho učenia sa, pomáha žiakovi na jeho požiadanie. Vedie ho na ceste poznávania, nemôže však, ak za žiaka vykonštruuje požadované vedomosti. K poznatkom sa musí žiak dopracovať sám a vlastnou aktivitou. Konštruktivistické koncepcie vyučovania predpokladajú, že poznanie je štruktúrované aktivitou subjektu. [2] Významným pojmom vo väčšine konštruktivistických didaktík je pojem prekoncept, ktorý je nástrojom konštrukcie poznania. Prekoncepty sú neustále prebudovávané a nový poznatok musí byť integrovaný do už existujúcich štruktúr, ktorými žiak disponuje. [3] Prekonceptom je predstava žiaka o danom pojme, ktorú má žiak pred preberaním daného učiva. Niektoré prekoncepty môžu byť miskoncepciami, zároveň však platí, že nie každý prekoncept je zároveň miskoncepciou, čiže mylnou predstavou žiaka o danom pojme.

Mnohé zahraničné pedagogické výskumy 80-tych rokov, ktoré boli personálno-konštruktivisticky orientované, poukazovali na to, že žiacke predstavy o obsahu prebratého učiva často nezodpovedajú predstavám o tom, čo má žiak po prebratí konkrétneho učiva ovládať. Výskumy potvrdzovali, že v žiakovej mysli existujú tzv. miskoncepcie, mylné poňatia učiva. Možnou príčinou ich vzniku je aj skutočnosť, že učiteľ zvyčajne nezisťuje pred preberaním novej témy, aké sú predstavy žiakov o obsahu jednotlivých pojmov nového učiva, ako žiaci chápu jednotlivé načrtnuté problémy a čo si o danom učive myslia. Preto môže pôvodná predstava žiaka o učive (prekoncepcia) rušivo pôsobiť v mysli žiaka počas učiteľovho výkladu učiva. To môže zapríčiniť vznik formálnych vedomostí žiaka, ktoré nie sú prakticky použiteľné. [1]

Dôležitou súčasťou inovatívnych stratégií vo vyučovaní sú aj nové formy dialógu a interakcií medzi učiteľom a žiakom. Diskusiu vedie učiteľ tak, aby počas nej analyzoval odpovede žiakov a zohľadňoval podľa možnosti pri kladení nových otázok najčastejšie chyby žiakov. Na základe zistených nedostatkov a miskoncepcií uvedie žiakom vhodné príklady aj protipríklady tak, aby podporil rozvoj schopnosti argumentácie a rozvíjal u žiakov kritické myslenie. Rýchla a účinná spätná väzba je zároveň kľúčovým faktorom formatívneho hodnotenia. Vytvorenie skreslených a chybných predstáv, ako aj nepochopenie základných súvislostí je tiež zdrojom miskoncepcií a dôvodom neúspešnosti žiakov pri riešení úloh. [4]

V [5] sa uvádza, že deformované mentálne štruktúry, čiže miskoncepcie, vznikajú, ak sa vo výučbe nezohľadňujú prekoncepcie žiakov, ak sa žiakom predkladajú tzv. hotové poznatky alebo ak dochádza k neprípustnému zovšeobecňovaniu. Miskoncepcie zároveň považujeme za príčinu nesprávnych predpovedí, interpretácií, vysvetlení alebo riešení problémov v oblasti vedy. Identifikácia aktuálnych prekoncepcií i miskoncepcií žiakov je jedným z nutných predpokladov navodenia mentálneho konfliktu, čo je významné z hľadiska vnútornej motivácie k učeniu sa žiaka. Táto identifikácia je možná „premýšľaním nahlas“ o riešenom probléme, analýzou verbálnych protokolov, resp. videozáznamov, prostredníctvom interview a testov alebo dotazníkov s možnosťou výberu odpovede. Dobre pripravený test umožňuje rýchle zistenie žiackych predstáv s relatívne jednoduchým vyhodnocovaním. Kvalitná príprava testu si však vyžaduje znalosť najčastejších prekoncpecií a miskoncepcií.

Pri nadobúdaní nových poznatkov je nevyhnutné odstrániť u žiakov miskoncepcie a zabezpečiť tak, aby vedomosti neboli formálne. Ako príklad postupu odstraňovania miskoncepcií uvádzame postup Kubiatka (2007, in [6]):

1) Navodiť u žiaka nesúhlas, nespokojnosť, rozpor s jeho pôvodným chápaním učiva. Žiak musí sám dospieť k presvedčeniu, že jeho doterajšia predstava je nesprávna.

2) Nové učivo musí byť vysvetlené tak, aby bolo žiakovi zrozumiteľné, aby ho dokázal pochopiť a začal o ňom rozmýšľať.

3) Vysvetľovanie učiva musí byť pre žiaka presvedčivé, hodnoverné a hlavne prijateľné. Pri akceptovaní týchto podmienok je žiak ochotný si vyskúšať, či by bolo pre neho akceptovateľné a aké veľké zmeny by musel urobiť.

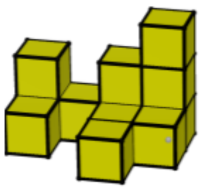
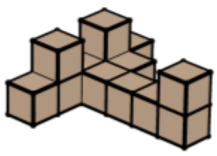
4) Pochopenie učiva musí byť pre žiaka použiteľné a užitočné. Žiak by si mal vyskúšať, nakoľko je nové prijatie výhodnejšie pri riešení problémov a situácií, s ktorými sa stretáva.

Charakteristika výskumnej vzorky a miskoncepcie v riešeniach geometrických úloh

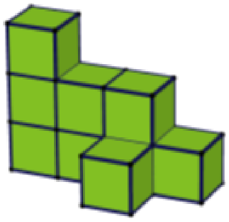
Výskumnú vzorku tvorilo 68 študentov 2. ročníka študijného odboru „Predškolská a elementárna pedagogika" Pedagogickej fakulty Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre. Túto vzorku môžeme považovať za reprezentatívnu, nakoľko sú to absolventi rôznych slovenských stredných škôl. Výskum mal len deskriptívny charakter.

Uvedení študenti riešili štyri úlohy:

1. Nakreslite do pripravenej štvorcovej siete uvedené pohľady na danú stavbu z kociek.

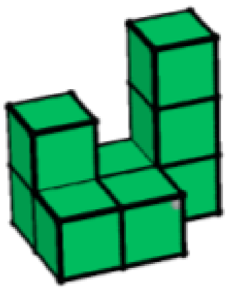
	Pohľad zhora
	Pohľad sprava
	Pohľad zdola
	Pohľad spredu

2. Z koľkých kociek je postavená stavba, ktorú vidíte na obrázku, ak žiadna kocka vzadu nechýba ani nevyčnieva?



Stavba je postavená z/zo _____ kociek.

3. Koľko kociek je potrebných na dostavanie kockovej stavby tak, aby vznikol čo najmenší kváder (žiadna kocka vzadu nechýba ani nevyčnieva)?



Potrebných je _______kociek.

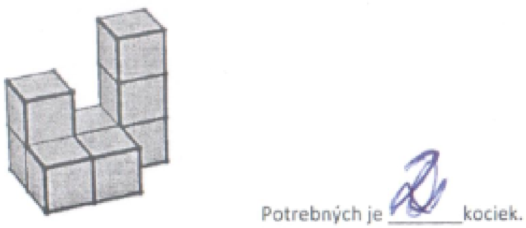
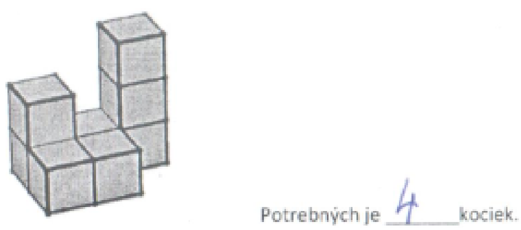
4. V úlohe 3. ste vytvorili kváder.

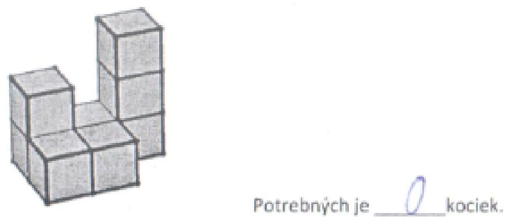
   a) Načrtnite daný kváder, určte jeho rozmery, ak viete, že jedna kocka má dĺžku hrany 1 cm.

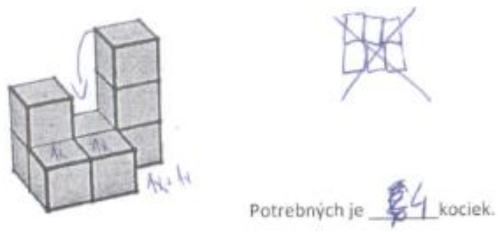
   b) Postavený kváder chcete teraz natrieť červenou farbou. Koľko štvorcov natriete touto červenou farbou?

V nasledujúcej časti uvedieme konkrétne riešenia úloh, ktorých súčasťou budú miskoncepcie (viď Tabuľka 1).

***Tabuľka 1**: Miskoncepcie v študentských riešeniach*

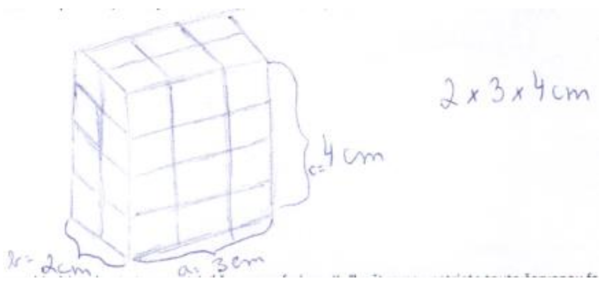
Úl. 3	Riešenie študenta	Popis možnej miskoncepcie
	 	- chybná predstava o kvádri ako telese - snaha o doplnenie kockami len tzv. prázdnych miest v predlohe



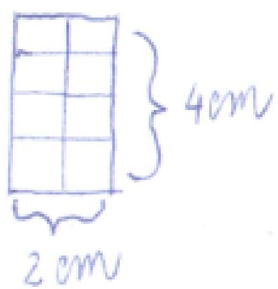


- chybná predstava o kvádri ako telese
- úvaha, že jednotlivé časti telesa v predlohe sú už kvádrami, preto netreba doplniť ďalšiu kocku
- nepochopený pojem dopĺňania predlohy kockami na kváder (úloha bola vyriešená premiestnením a doplnením kociek do požadovaného kvádra)

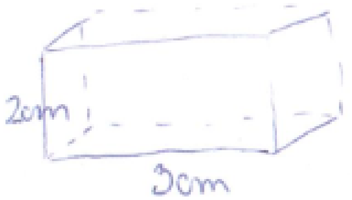
Úl. 4 a) Riešenie študenta **Popis možnej miskoncepcie**

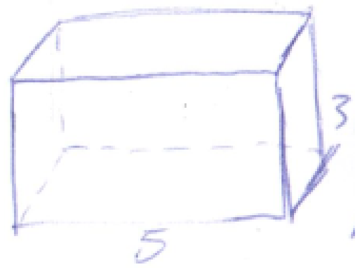


- riešenie nespĺňa podmienku doplnenia na najmenší kváder
- chybná predstava o možných rozmeroch kvádra (často uvažujú len o kvádri s hranami rôznych dĺžok)



- zámena rovinného a priestorového útvaru
- nesprávna predstava o jednoznačnom určení rozmerov telesa

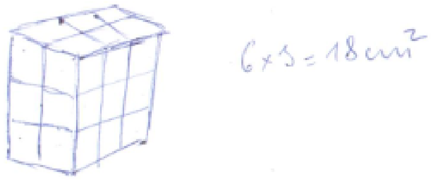




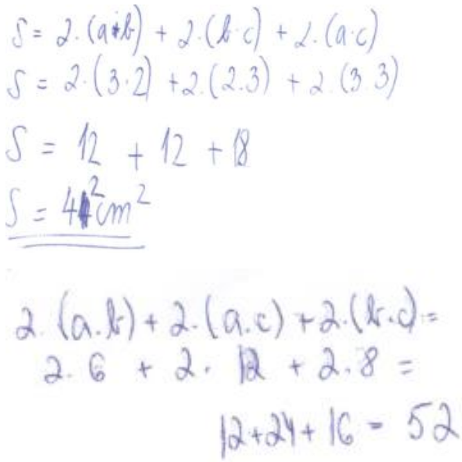
- nesprávna predstava o jednoznačnom určení rozmerov telesa pri správnom načrtnutí telesa

Úl. 4 b) Riešenie študenta

Popis možnej miskoncepcie



- zamieňanie pojmov objem a povrch telesa (využitie vzorca pre objem telesa s uvedenými jednotkami pre povrch telesa)



- riešenie je správne pre kocku s dĺžkou hrany 1 cm, pre iný rozmer kocky by prijaté závery neboli správne

Záver

Rôzne testovania poukazujú na časté chyby v riešeniach geometrických úloh. Tento fakt potvrdili aj naše zistenia, ktoré sú v súlade so zisteniami aj iných autorov. Napríklad v [7] sa uvádza: „*Výsledky testovania žiakov štvrtých ročníkov ukázali, že pri identifikácii rovinných útvarov je častou chybou zámena rovinného a priestorového útvaru. Uvedený jav sme si všimli aj pri testovaní detí predškolského veku, nielen u nich ale aj v študentoch učiteľského štúdia, ktorí deťom kládli otázky. Príkladmi sú dvojice kocka – štvorec, trojuholník – ihlan, obdĺžnik – kváder. Tieto časté miskoncepcie pretrváva z predškolského veku a vôbec nie sú eliminované*.“

Cieľom výchovno-vzdelávacieho procesu nie je len sprostredkovať žiakom rôzne informácie, ale hlavne rozvíjať ich schopnosť myslieť, čo sa v matematike dá jednoznačne riešením rôznych úloh. Učiteľ tak môže zistiť chyby žiakov a to vrátane miskoncepcií, ktoré sú príčinou žiackeho neporozumenia. Navodí sa tým v rámci vyučovacieho procesu diskusia učiteľa so žiakmi, resp. medzi žiakmi samotnými. Získa sa spätná väzba, prečo sa miskoncepcie vyskytli, čo môže smerovať k zlepšeniu žiackych vedomostí a teda aj ich výsledkov žiakov z predmete matematika.

Literatúra

1. Tóthová, R. 2014. Konštruktivistický prístup vo výučbe ako možnosť rozvoja myslenia žiakov. Metodicko-pedagogické centrum Bratislava. [5. 9. 2019] Dostupné: https://mpc-edu.sk/sites/default/files/projekty/vystup/tothova.pdf. ISBN 978-80-565-0004-0 .
2. Skalková, J. 2007. Obecná didaktika. Havlíčkův Brod. Grada Publishing, a. s. ISBN 978-80-247-1821-7.
3. Bertrand Y. 1998. Soudobé teorie vzdělávání. Praha: Portál, s. r. o., 1998. 247 s. ISBN 80-7178-216-5.
4. Lukáč, S a kol. 2016. Bádateľsky orientované vyučovanie matematiky a informatiky na stredných školách. 1. vydanie. Košice: Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach, 2016. 222 s. ISBN 978-80-8152-471-4.
5. Biznárová, V. 2005. Možnosti zisťovania koncepcií súvisiacich s pojmami teplota, teplo a tepelná výmena, In Zborník z konferencie Šoltésove dni 2005. Bratislava: MCMB, 2005. s. 14-18. [5. 9. 2019] Dostupné:http://www.scholaludus.sk/new/index.php?go=projektova_skupina&sub1=haverlikova_publikacie . ISBN 80-7164-398-X.
6. Bystrianska, M., Čerňanský, P. 2013. Diagnostika miskoncepcií pri téme hustota. In Tvorivý učiteľ fyziky VI. Smolenice 7. - 10. 4. 2013. [3. 9. 2019]. Dostupné: https://ufv.science.upjs.sk/_projekty/smolenice/prispevky_13.htm
7. Gunčaga, J., Tkačik, Š. 2017. Príčiny miskoncepcií základných geometrických útvarov u žiakov na prvom stupni základných škôl. In Sborník příspěvků z 11. mezinárodní vědecká konference – Didaktická konference 2017 1. a 2. června 2017 / Brno, Česká republika. [2. 9. 2019] ISBN 978-80-210-8590-9. s. 48 – 59. Dostupné:https://katedry.ped.muni.cz/didaktickakonference/wpcontent/uploads/sites/37/2018/02/did_konf.pdf .