Vol. 4, No. 2, 2018

Acta Mathematica Nitriensia

free electronic journal

AM

Nitriensia

ISSN: 2453-6083

Názov / Title
Acta Mathematica Nitriensia

Všeobecne o časopise
ISSN 2453-6083 (online)
On-line elektronický vedecký časopis venovaný otázkam teórie vyučovania matematiky
Periodicita: 2x ročne
Otvorený prístup

Pokyny pre autorov
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php

Recenzné konanie
Časopis uskutočňuje dvojité anonymné a nezávislé recenzné konanie zaslaných príspevkov.

Dostupnosť
www.amn.fpv.ukf.sk

Vydavateľ
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovensko

General information
ISSN 2453-6083 (online)
Free electronic scientific journal focused to current problems in mathematical education theory
Periodicity: twice a year
Open Access

Guidelines for authors
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php

Review process
The journal carries out a double -blind peer review evaluation of drafts of contributions.

Available from
www.amn.fpv.ukf.sk

Publisher
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences
Constantine the Philosopher University in Nitra
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovakia

Údaje k aktuálnemu číslu
Ročník: 4
Číslo: 2
Rok: 2018
Dátum vydania: 10. 10. 2018

Information to current issue
Volume: 4
No.: 2
Year: 2018
Publication date: October 10, 2018

Obsah

Content

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 4, No. 2, p. 1 – 8
ISSN 2453-6083

Rovnice druhého stupňa v prostredí programu GeoGebra

Second Degree Equations in GeoGebra Environment

Martin Billich[a]

[a*]*Department of Mathematics, Faculty of Education, Catholic University in Ružomberok, Hrabovská cesta 1A, SK-034 01 Ružomberok*

Received 5 September 2018; received in revised form 20 September 2018; accepted 22 September 2018

Abstract

GeoGebra is one of the most popular dynamical mathematical software that joins geometry, algebra and calculus. This tool help students to acquire knowledge about not only geometric objects. The relationships between the sum and product of the roots of a quadratic equation and the coefficients of the equation (Viete's theorem) are considered. We give several geometrical (or graphical) methods of solving quadratic equations such as using the right triangle altitude theorem and the power of a point theorem. We will try to show some possibilities of the software GeoGebra to visualize these ways. In addition, we show that this can be solved by elementary geometry always using only ruler and compass.

Keywords: GeoGebra, quadratic equations, Vieta's formula.

Classification: H30, R20

Úvod

V súčasnosti je GeoGebra jedným z voľne dostupných programov dynamickej geometrie, ktorý sa čoraz častejšie dostáva na všetky úrovne matematického vzdelávania, od základných škôl, cez rôzne typy stredných škôl až po univerzity. O GeoGebre možno hovoriť aj ako o multiplatformovom matematickom systéme, ktorý v sebe spája geometriu, algebru a matematickú analýzu. Skúmanie matematických situácií, riešenie problémov a osvojenie nových matematických pojmov žiakmi alebo študentmi v prostredí programu GeoGebra sa môže stať prístupnejšie a zrozumiteľnejšie, keďže je podporované vhodnými ilustráciami formou dynamických obrázkov. GeoGebra ponúka hlavne ľahko použiteľné rozhranie, ktorého dynamika, spojená s manipuláciou s voľnými objektmi, poskytuje dostatočný priestor na mnohé študentské aktivity nielen v škole ale aj v domácom prostredí. V tomto článku sa bližšie pozrieme na problematiku riešenia rovníc druhého stupňa, ich geometrickú interpretáciu, pri ktorej využijeme viaceré možnosti programu GeoGebra.

Trochu z histórie

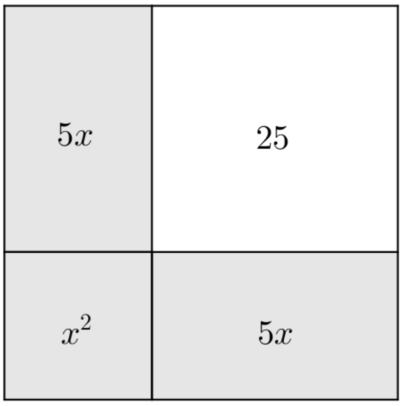
Na úvod uvedieme jednu geometrickú interpretáciu riešenia určitej a v stredoveku azda najznámejšej kvadratickej rovnice, ktorá by mohla slúžiť pre študentov nielen ako motivácia ale hlavne ako dobrá vizualizácia toho, čo sa odohráva pri algebraickom riešení kvadratickej

*Corresponding author: martin.billich@ku.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.2.1-8

rovnice, keď hľadáme iba jej kladné korene. V nasledujúcom príklade (pozri [3]) vychádzame z diela významného arabského matematika al Chvárizmího (780 - 850).

Príklad: Hľadajme (kladné) korene rovnice $x^2 + 10x = 39$.

Riešenie: Podstatou riešenia je doplnenie na štvorec (viď obr. 1). Najskôr zostrojíme štvorec so stranou dĺžky x. K tomuto štvorcu pripojíme dva obdĺžniky so stranami dĺžky 5 a x. Získaný obrazec má obsah 39 (tmavá časť). Tento doplníme na štvorec. Pridaná časť je štvorec s obsahom $5^2 = 25$. Výsledný štvorec má obsah $39 + 25 = 64$ a jeho strana má dĺžku 8. Východiskový štvorec má preto stranu dĺžky 3 (hľadaný koreň).



Obrázok 1

Predchádzajúci spôsob môžeme opísať pomocou dnešného algebraického jazyka:

$$x^2 + 10x = x^2 + 2(5x) = 39$$

$$x^2 + 2(5x) + 25 = 39 + 25 = 64$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3.$$

Takéto riešenie rovnice geometrickou cestou sa javí pre študentov ako veľmi užitočné, keďže im umožňuje nahliadnuť do podstaty veci. V podobnom duchu budeme pristupovať k riešeniu rovníc 2. stupňa aj v nasledujúcom texte, pričom dôraz bude kladený nielen na vizualizáciu, ale predovšetkým na podstatné charakteristiky metód ich riešenia v prostredí programu GeoGebra.

Východisková úloha

Získanie istej zručnosti pri riešení rovníc a ich sústav patrí medzi tie najzákladnejšie v stredoškolskej matematike. Nezriedka k nim vedie množstvo praktických úloh a problémov. S riešením kvadratickej rovnice je takmer neodmysliteľne spojená nasledujúca geometrická úloha:

Úloha 1: Aké sú rozmery obdĺžnika, ktorého polovičný obvod je 18 a obsah 65?

Riešenie: Našou úlohou je nájsť dve čísla, ak poznáme ich súčet a súčin. Ak označíme x, y dĺžky strán obdĺžnika, dostávame sústavu rovníc

$$x + y = 18$$
$$x.y = 65. \tag{1}$$

Ak z prvej rovnice vyjadríme neznámu y a dosadíme do druhej, dostávame po úprave kvadratickú rovnicu

$$x^2 - 18x + 65 = 0. \tag{2}$$

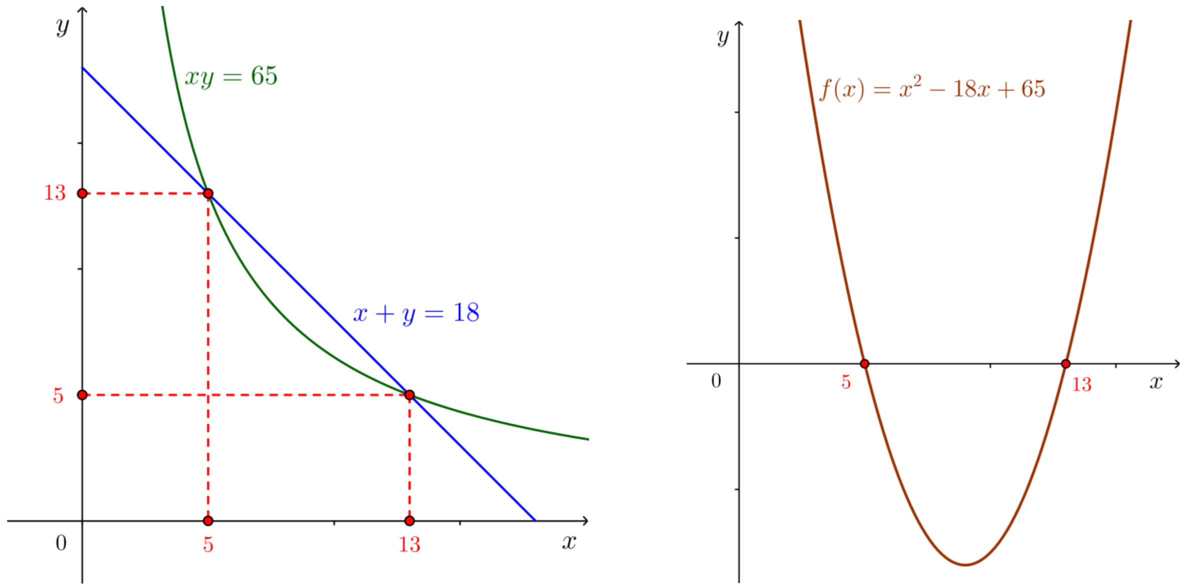
V stredoškolskej matematike sa spravidla na riešenie kvadratickej rovnice používa metóda algebraická alebo grafická (geometrická). Výsledkom prvej metódy, pomocou úpravy na štvorec, dostávame vzťah pre korene kvadratickej rovnice (2) v tvare:

$$x_{1,2} = 9 \pm \sqrt{9^2 - 65}.$$

Ak použijeme úpravu kvadratického trojčlena rovnice na súčin, tak pre korene dostávame:

$$(x-5).(x-13) = 0.$$

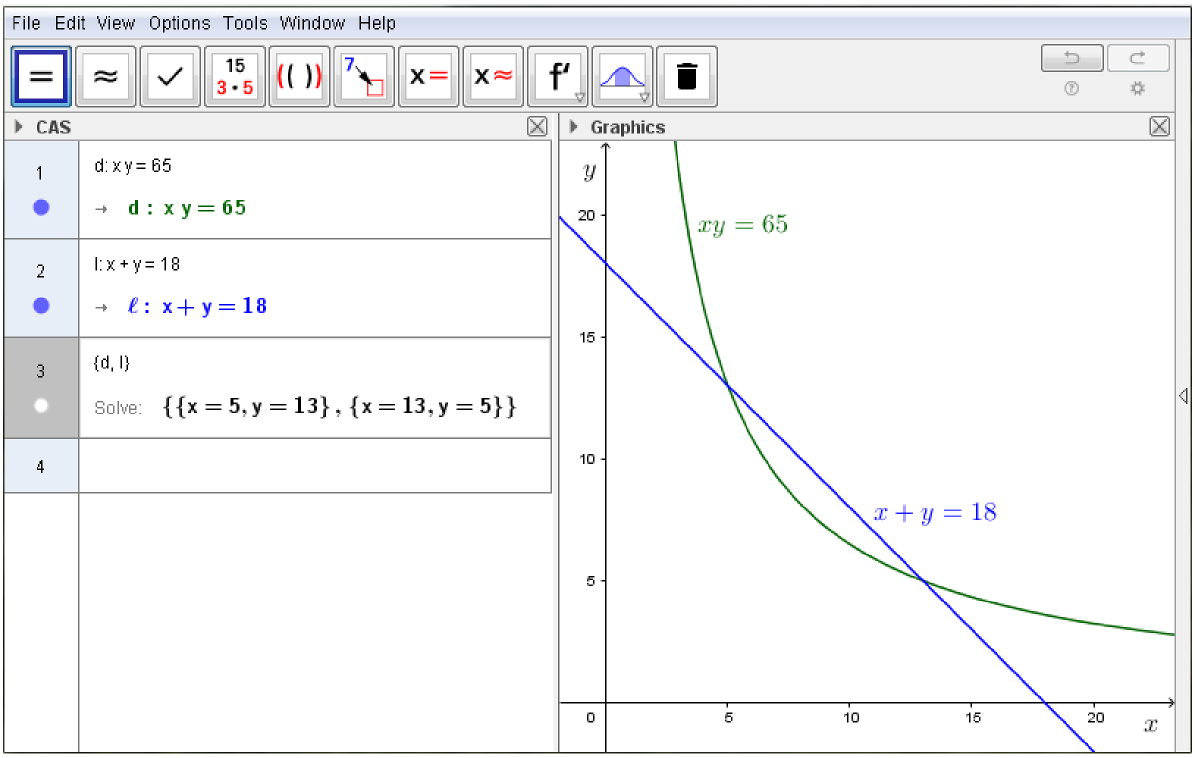
Korene rovnice $x_1 = 13$, $x_2 = 5$ sú dĺžkami strán hľadaného obdĺžnika. Grafická metóda je založená na hľadaní spoločných bodov častí priamky a hyperboly (pre kladné hodnoty x, y) určených rovnicami (1), alebo paraboly (grafu kvadratickej funkcie $f(x) = x^2 - 18x + 65$) s x-ovou osou. Obe tieto situácie vytvorené v prostredí programu GeoGebra sú načrtnuté na obrázkoch 2a,b.



a) b)

Obrázok 2

V tejto súvislosti treba zdôrazniť, že v školských podmienkam sa študentom podarí zostrojiť (na tabuli či v zošitoch) iba konečný počet bodov danej paraboly resp. hyperboly. Výsledkom tejto metódy je obyčajne iba približná hodnota premennej x, ktorá je jednou zo súradníc spoločných bodov priamky a hyperboly, resp. pri ktorej kvadratická funkcia nadobúda nulovú hodnotu. Grafické riešenie kvadratickej rovnice sa v takýchto podmienkach stáva často zdĺhavým a v konečnom dôsledku nám dáva iba približné výsledky. Avšak na overenie správnosti riešenia danej úlohy máme v GeoGebre niekoľko možností. Prvou voľbou je spravidla iba odčítanie súradníc vopred zostrojených priesečníkov priamky a hyperboly z algebraického okna programu. V prípade paraboly a jej priesečníkov s x-ovou osou, možno využiť z ponuky nástrojov namiesto príkazu „*Priesečník*“ priamo príkaz „*Korene*“ slúžiaci na určenie koreňov danej kvadratickej funkcie. Druhou, v riešení našej východiskovej úlohy aj prirodzenou pomôckou, je v GeoGebre integrovaný algebraický výpočtový systém CAS, ktorý umožňuje jednoducho riešiť sústavu rovníc (1) tak, ako to vidno na obrázku 3.



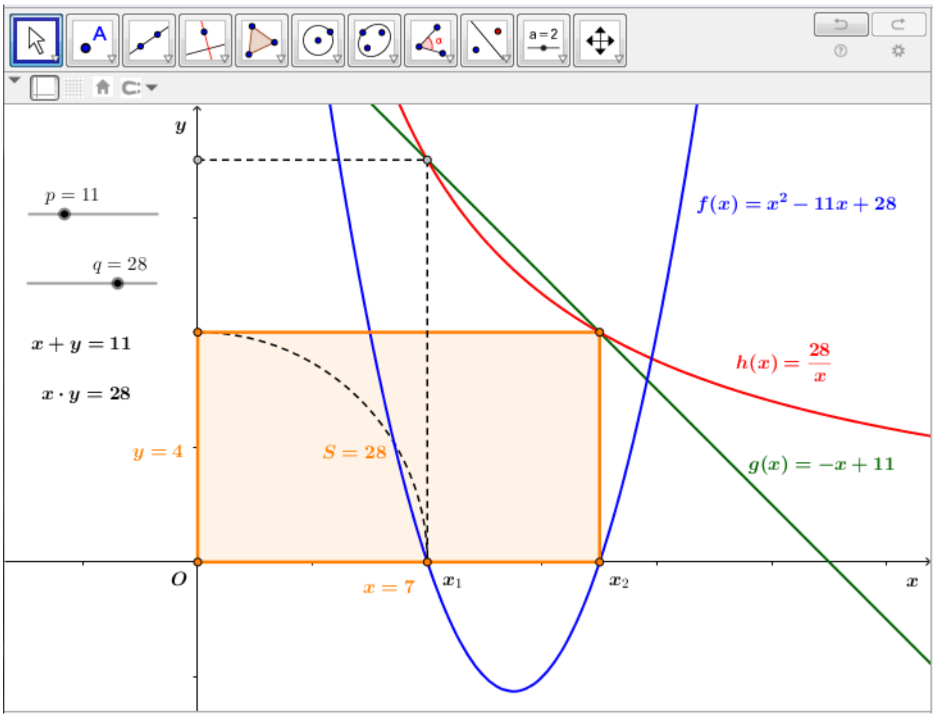
Obrázok 3

Variácie východiskovej úlohy

Bezprostredne po vyriešení východiskovej úlohy je vhodné pokračovať v numerickom ale i grafickom riešení (v prostredí programu GeoGebra) analogických úloh s rôznymi hodnotami pre polovičný obvod a obsah uvažovaného obdĺžnika. Týmto môže vzniknúť tzv. *strapec* úloh (viac o tejto metóde možno nájsť v [4]). Ako by to mohlo vyzerať v prípade našej základnej úlohy? Napriklad:

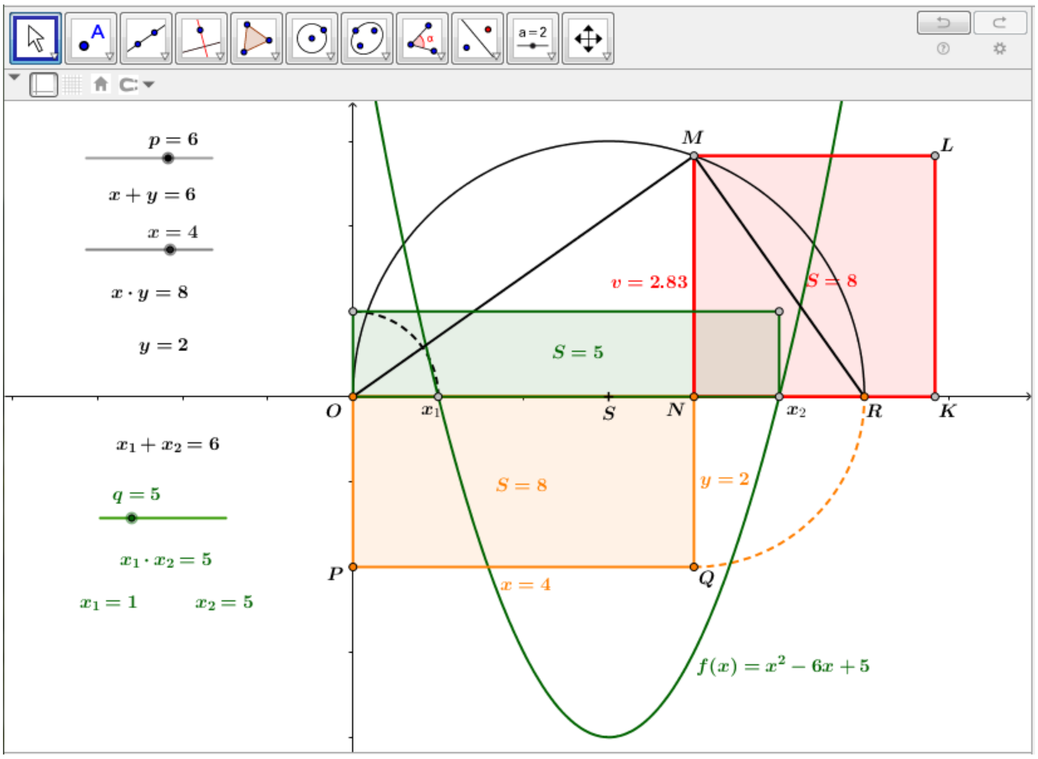
- Ak zmeníme napr. obsah obdĺžnika na 81 a polovičný obvod zostane rovnaký, tak riešením úlohy bude štvorec so stranou dĺžky 9. Príslušná kvadratická rovnica má v tomto prípade jedno riešenie (dvojnásobný koreň).
- Ak zvolíme napr. polovičný obvod 15 a obsah sa nezmení, tak neexistuje obdĺžnik požadovaných vlastností. Teraz zodpovedajúca kvadratická rovnica nemá riešenie.

Je dobré ešte zdôrazniť, že do vytvárania nových úloh určitého *strapca* možno vtiahnuť aj študentov. Je veľmi cenné, ak študenti dokážu sami sformulovať podmienky, kedy existuje obdĺžnik požadovaných vlastností, teda pre aké hodnoty jeho polovičného obvodu a obsahu má príslušná kvadratická rovnica jedno alebo dve riešenia, príp. nemá riešenie. Po takýchto aktivitách by už malo byť zrejmé, že pri malom obvode nemôže byť obsah ľubovoľne veľký, avšak obsah môže byť ľubovoľne malý pri akomkoľvek obvode obdĺžnika. Na tento účel je vhodné si zostrojiť v programe GeoGebra rôzne vizualizácie riešenia úlohy. Prvou z možností je vytvorenie modelu, v ktorom je možné meniť pomocou nástrojov „*posuvníkov*“ iba numerické zadanie úlohy a sledovať, ako zmeny týchto parametrov vplývajú na celkový počet riešení úlohy (viď obr. 4).



Obrázok 4

Okrem už vyššie uvedeného by bolo dobré si uvedomiť, že v geometrickej interpretácii riešení úloh možno využiť aj Euklidovu vetu o výške. Presnejšie, ak zostrojíme pravouhlý trojuholník nad preponou dĺžky $p = x + y$, tak obsah $q = x.y$ uvažovaného obdĺžnika je rovný druhej mocnine veľkosti výšky v tohto pravouhlého trojuholníka (obr. 5).



Obrázok 5

V prostredí programu GeoGebra vieme sledovať nielen závislosť obsahu q na veľkosti x pri konštantnom p, ale súčasne aj závislosť koreňov x_1 a x_2 na hodnote q pri konštantnom p a naopak. Odtiaľ je zrejmé, že obsah obdĺžnika q je maximálny v prípade, ak $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}p$, a teda hľadaný obdĺžnik je štvorec. Rovnako platí, že pre $q > \left(\frac{1}{2}p\right)^2$ neexistuje obdĺžnik požadovaných vlastností a úloha nemá riešenie. Predchádzajúce postupy môžeme jazykom algebry zhrnúť nasledovne:

Ak polovičný obvod označíme p a obsah q, tak sústave rovníc

$$x + y = p$$
$$x.y = q$$

zodpovedá kvadratická rovnica v tvare

$$x^2 - px + q = 0, \tag{3}$$

pre korene ktorej dostávame vzťah:

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{4}$$

Ak existujú korene x_1 a x_2, t. j. $p^2 > 4q$, tak rovnicu (3) možno písať v tvare súčinu

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

pričom platia *Vietove vzťahy* v tvare:

$$x_1 + x_2 = p, \quad x_1.x_2 = q. \tag{5}$$

Zovšeobecnený prístup

Zatiaľ sme sa zaoberali riešením kvadratickej rovnice v tvare (3) iba pre kladné hodnoty premenných p a q, pričom sme v geometrickej interpretácii použili jednu z Euklidových viet. Vo všeobecnosti, ak p a q sú ľubovoľné reálne čísla, tak na grafické (geometrické) riešenie kvadratickej rovnice v normovanom tvare

$$x^2 + px + q = 0 \tag{6}$$

použijeme mocnosť bodu vzhľadom na kružnicu (porovnaj v [1]). Tento prístup je vhodný aj pre školskú matematiku, keďže na hľadanie koreňov kvadratickej rovnice sú postačujúce iba euklidovské konštrukcie (viď [2]). V prostredí programu GeoGebra budeme postupovať nasledovne:

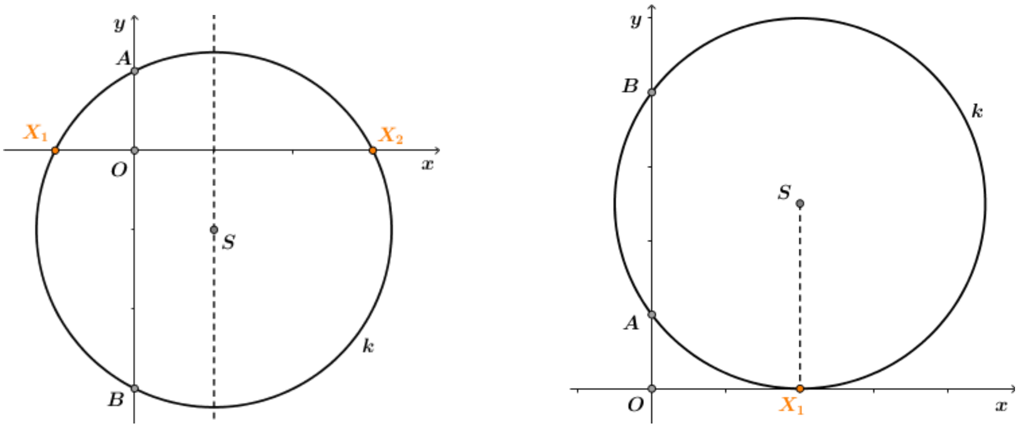
Najskôr zostrojíme body $O = [0; 0]$ $A = [0; 1]$, $B = [0; q]$ a $S = \left[-\frac{p}{2}; \frac{1+q}{2}\right]$. Nech k je kružnica so stredom v bode S a polomerom dĺžky $r = |AS|$. Pre vzájomnú polohu kružnice k a x-ovej osi nastane práve jedna z nasledujúcich možností:

a) Kružnica k pretína x-ovú os v dvoch rôznych bodoch $X_1 = [x_1; 0]$ a $X_2 = [x_2; 0]$ (viď obr. 6a). Potom pre mocnosť bodu O vzhľadom na kružnicu k platí:

$$(X_1 - O) \cdot (X_2 - O) = (A - O) \cdot (B - O).$$

Po dosadení súradníc jednotlivých bodov dostaneme

$$x_1 \,.\, x_2 = q.$$



a) b)

Obrázok 6

Stred S kružnice k leží na osi úsečky X_1X_2. Potom pre x-ové súradnice bodov X_1, X_2, S platí:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{p}{2}$$

alebo po úprave

$$x_1 + x_2 = -p.$$

b) Kružnica k sa dotýka x-ovej osi v bode $X_1 = [x_1; 0]$ (viď obr. 6b). Podobne ako v predchádzajúcom prípade, pre mocnosť bodu O vzhľadom na kružnicu k platí:

$$(X_1 - O) \cdot (X_1 - O) = (A - O) \cdot (B - O)$$

a dosadením súradníc jednotlivých bodov máme

$$x_1 \,.\, x_1 = q.$$

Navyše, x-ové súradnice bodov S a X_1 sú súčasne rovné $-\frac{p}{2}$, t. j. platí:

$$x_1 + x_1 = -p.$$

c) Kružnica k a x-ová os namajú žiaden spoločný bod.

Je vidieť, že pre kvadratickú rovnicu (6) sme týmto postupom dostali známe *Vietove vťahy*:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 . x_2 = q. \tag{7}$$

Konštrukciou kružnice k so stredom v bode S a polomerom AS a jej priesečníkov s x-ovou osou dostávame všetky riešenia kvadratickej rovnice (6). Ich počet zodpovedá práve počtu priesečníkov kružnice k s x-ovou osou.

Záver

V súčasnej školskej matematike má dynamická podpora výučby svoje nezastupiteľné miesto, keďže prispieva nielen k ľahšiemu a rýchlejšiemu pochopeniu učiva, ale aj k jeho hlbšej fixácii. V tomto článku sme sa zamerali na niektoré možnosti použitia voľne dostupného programu GeoGebra pri vizualizácií pojmov z algebry, pri riešení rovníc druhého stupňa. Používanie nástrojov tohto programu pomáha študentom nahliadnuť na podstatu veci aj v prípade riešenia kvadratických rovníc. Rôzne pohľady na geometrické či grafické hľadanie koreňov kvadratickej rovnice, prepojené s ich algebraickou podstatou (Vietove vzťahy), sú zdrojom viacerých študentských aktivít, ktoré prispievajú k prirodzenému osvojovaniu si nových pojmov. Aj keď sme sa v tomto príspevku venovali iba riešeniu kvadratickej rovnice v normovanom tvare, pozorný čitateľ si iste uvedomil, že všetky postupy môžeme využiť aj pri riešení kvadratickej rovnice vo všeobecnom tvare: $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c sú reálne čísla $(a \neq 0)$.

Literatúra

[1] Billich, M.: Solving Quadratic Equations. In: *Proceedings of the XIIth Czech-Polish-Slovak Mathematical School*, Hluboš 2005, s. 88-92.

[2] Čižmár, J.: Euklidovské konštrukcie. *Proceedings of Seminars on Computational Geometry SCG'99*, Volume 8, p. 31-47.

[3] Kopka, J.: *Ako riešiť matematické problémy*. Ružomberok: VERBUM, 2010.

[4] Kopka, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem, UJEP 1999.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 4, No. 2, p. 9 – 13
ISSN 2453-6083

Poznámka ku spojitému usporiadaniu reálnych čísel v Cantorovej konštrukcii

Remark to Continuous Ordering of Real Numbers in Cantor´s Construction

Peter Vrábel[a]

Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,

Received 20 September 2018; received in revised form 2 October 2018; accepted 3 October 2018

Abstract

The proof of the continuous ordering real numbers is somewhat complicated in the Cantor´s construction of this ordered field. Let $(\mathbb{R}, \prec)$ $\left((\tilde{R},\ \prec_1)\right)$ denotes the ordering set of real numbers in the Dedekind´s construction (Cantor´s construction). The similarity of the ordered sets $\mathbb{R}$ and $\tilde{R}$ is proved in the paper directly..

Keywords: continuous ordering, real numbers, Dedekind´s construction, Cantor´s construction

Classification: 97B50, 06A05

Úvod

Obe exaktné konštrukcie množiny a usporiadaného poľa reálnych čísel, Dedekindova i Cantorova, sú pomerne teoreticky náročné. Každá má svoje výhody i nevýhody.
Tak napríklad v Dedekindovej konštrukcii (DK) sa jednoduchšie dokáže spojitosť usporiadania množiny reálnych čísel ako v Cantorovej konštrukcii (CK). Dôkaz spojitosti v CK je založený na predtým dokázaných vlastnostiach archimedovsky usporiadaných polí (Švec [4], 1987). Dôležitú úlohu tu zohráva poznatok, že v archimedovsky usporiadanom poli $(A, +, \cdot, <)$ je množina $(A, <)$ spojito usporiadaná práve vtedy, keď pole A je úplné. Následne sa dokáže, že pole reálnych čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ je úplné a teda $(\mathbb{R}, <)$ je spojito usporiadaná množina.
Na druhej strane sa v CK dajú jednoduchšie dokázať vlastnosti operácií reálnych čísel ako v DK. V CK sa totiž prirodzeným spôsobom prenášajú vlastnosti operácii poľa racionálnych čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ na operácie s reálnymi číslami, čo spočíva v jednoduchšej definícii súčtu a súčinu reálnych čísel v CK.
Ak označíme $(\mathbb{R}, \prec)$ resp. $(\tilde{R},\ \prec_1)$ usporiadanú množinu reálnych čísel v DK resp. v CK, tak v predloženom článku je priamo dokázané, že množiny $(\mathbb{R}, \prec)$ a $(\tilde{R},\ \prec_1)$ sú podobné. Tento fakt sa obyčajne tiež dokazuje pomocou všeobecnejších výsledkov o archimedovsky usporiadaných poliach (Šalát [2], 1982). Zo spojitosti usporiadanej množiny $(\mathbb{R}, \prec)$ takto vyplýva spojitosť usporiadanej množiny $(\tilde{R},\ \prec_1)$.

[a] Corresponding author: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.2.9-13

Základné pojmy a označenia

Usporiadaná množina $(P, <)$ sa nazýva spojito usporiadaná, ak každá jej zhora ohraničená neprázdna podmnožina má v P supremum. Množina racionálnych čísel s obvyklým usporiadaním nie je spojito usporiadaná (Šalát [3], 1986). Najdôležitejším príkladom spojito usporiadanej množiny v matematike je množina reálnych čísel, čo má kľúčový význam napríklad v základoch matematickej analýzy. Usporiadanú dvojicu $[A, B]$ nazveme rezom usporiadanej množiny $(P, <)$, ak množiny A (dolná skupina rezu), B (horná skupina rezu) sú neprázdne, $A \cup B = P$ a každý prvok množiny A je menší ako ľubovoľný prvok množiny B. Keďže $A \cap B = \emptyset$, tak $B = P - A$. Ľahko možno nahliadnuť, že množina A, $A \subseteq P$, je dolnou skupinou nejakého rezu množiny P práve vtedy, keď platí:

$$A \neq \emptyset, P - A \neq \emptyset\, , (a \in A \wedge x \in P \wedge x < a) \Rightarrow x \in A) \qquad (1)$$

Takto každý rez množiny P je jednoznačne určený svojou dolnou skupinou. Preto niekedy, ak to zjednodušuje úvahy resp. zápis, budeme o reze množiny P stručne hovoriť ako o množine A ($A \subseteq P$, A spĺňa (1)).

V DK uvažujeme množinu všetkých takých rezov A množiny $\mathbb{Q}$, kde množina A nemá najväčší prvok. Množinu všetkých takýchto rezov označme $\mathbb{R}$ (množina reálnych čísel). Množiny $\{x \in \mathbb{Q}; x < a\}$, $a \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_0^- \cup \{x \in \mathbb{Q}^+; x^2 < 2\}$ sú príkladmi rezov z $\mathbb{R}$. Na množine $\mathbb{R}$ možno definovať reláciu $\prec$ takto:

pre $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ platí $A_1 \prec A_2$ práve vtedy, keď A_1 je vlastná podmnožina množiny A_2.

Relácia $\prec$ je spojitým usporiadaním množiny $\mathbb{R}$ (Palumbíny [1], 1994).

CK vychádza z pojmu fundamentálnej postupnosti racionálnych čísel. Postupnosť racionálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme fundamentálnou postupnosťou, ak

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, p, q > n_0 \quad |a_p - a_q| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Každá fundamentálna postupnosť je ohraničená a súčet aj súčin ľubovoľných fundamentálnych postupností racionálnych čísel sú opäť fundamentálne postupnosti. Označme F_Q množinu všetkých fundamentálnych postupností racionálnych čísel. Na F_Q definujme reláciu $\sim$ takto:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0\, .$$

Relácia $\sim$ je relácia ekvivalencie. Relácii $\sim$ odpovedá rozklad množiny F_Q na disjunktné triedy. Množinu týchto tried označíme znakom $\tilde{R}$ (množina reálnych čísel) . Ak do nejakej triedy rozkladu patrí fundamentálna postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tak túto triedu označíme aj $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]$. Reálne číslo α, $\alpha = [\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]$, nazveme kladným a píšeme $\bar{O} \prec_1 \alpha$, $\bar{O} = [\{0\}_{n=1}^{\infty}]$, ak existuje $r \in \mathbb{Q}^+$ a $m \in \mathbb{N}$ tak, že pre každé prirodzené číslo n, $m \leq n$, platí $r \leq a_n$. Ľahko možno nahliadnuť, že definícia kladného reálneho čísla α nezávisí od výberu reprezentanta $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Na množine $\tilde{R}$ definujeme reláciu $\prec_1$ takto:

pre $\alpha, \beta \in \tilde{R}$, $\alpha = [\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]$, $\beta = [\{b_n\}_{n=1}^{\infty}]$, $\alpha \prec_1 \beta$ práve vtedy, keď $\bar{O} \prec_1 \beta - \alpha$,

kde $\beta - \alpha = [\{b_n - a_n\}_{n=1}^{\infty}]$. Relácia $\prec_1$ je usporiadanie množiny $\tilde{R}$ (Šalát [2], 1982).

Pripomeňme ešte pojem podobného zobrazenia a podobnosti usporiadaných množín. Pre usporiadané množiny $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ zobrazenie $f: A \to B$ nazveme podobné, ak pre každé $x, y \in A$ platí:

$$x <_A y \Rightarrow f(x) <_B f(y).$$

Uvedené usporiadané množiny nazveme podobné, ak existuje podobné zobrazenie množiny A na množinu B, pritom píšeme $A \cong B$.

O spojitosti usporiadania množiny $(\tilde{\boldsymbol{R}}, \prec_1)$

Ako sme už uviedli v úvode, dokážeme, že usporiadané množiny $(\mathbb{R}, \prec)$ a $(\tilde{R}, \prec_1)$ sú podobné.

Veta 1. Nech usporiadané množiny $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ sú podobné a A je spojito usporiadaná. Potom aj množina B je spojito usporiadaná.

Dôkaz. Nech $f: A \to B$ je podobné zobrazenie množiny A na množinu B. Nech $\emptyset \neq M \subseteq B$ a M je zhora ohraničená v množine B prvkom b. Treba dokázať, že množina M má v množine B supremum. Uvažujme vzor množiny M v zobrazení f, teda množinu

$$f_{-1}(M) = \{x \in A; f(x) \in M\}.$$

Každé podobné zobrazenie je prosté, teda f je bijekcia. Potom existuje jediné $a \in A$ také, že $f(a) = b$. Zrejme pre každý prvok $x \in f_{-1}(M)$ je $x \leq_A a$. Ak by totiž existoval taký prvok $x_1 \in f_{-1}(M)$, že $a <_A x_1$, tak $b = f(a) <_B f(x_1) \in M$, čo by bolo v spore s voľbou prvku b. Množina $f_{-1}(M)$ je takto neprázdna a zhora ohraničená podmnožina spojito usporiadanej množiny A, má teda supremum, označme ho u. Dokážeme, že $f(u)$ je supremum množiny M. Nech $y \in M$. Pre vzor x k prvku y v zobrazení f platí $y = f(x) \leq_B f(u)$. Teda $f(u)$ je horné ohraničenie množiny M. Nech $y_0 \in B$, $y_0 <_B f(u)$ a $f(x_0) = y_0$, $x_0 \in A$. Potom $x_0 <_A u$. Keďže $u = \sup f_{-1}(M)$, tak existuje $t \in f_{-1}(M)$ splňujúce nerovnosť $x_0 <_A t$. Takto $y_0 = f(x_0) <_B f(t) \in M$ a teda y_0 nie je horné ohraničenie množiny M. Takto $f(u)$ je aj najmenšie horné ohraničenie množiny M v množine B.

Lema 1. Nech $\alpha = [A, B] \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Q}^+$. Potom existujú také prvky $a \in A$, $b \in B$, že $k = b - a$.

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľne v množine $A(B)$ prvok $c(d)$. K číslu $\frac{d-c}{k}$ existuje prirodzené číslo n tak, že $\frac{d-c}{k} < n$. Potom $d < c + nk$ a v konečnej postupnosti $c, c + k, \cdots, c + nk$ je prvý člen z A a posledný z B. Nech p je najmenšie prirodzené číslo s vlastnosťou $c + pk \in B$. Potom $a = c + (p-1)k \in A$, $b = c + pk \in B$, $k = b - a$.

Veta 2. Usporiadané množiny $(\mathbb{R}, \prec)$, $(\tilde{R}, \prec_1)$ sú podobné.

Dôkaz. Nech $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = [A, B]$. Z lemy 1 vyplýva, že ku každému $n \in \mathbb{N}$ existujú také prvky $a_n \in A$, $b_n \in B$, že $b_n - a_n < \frac{1}{n}$. Nech

$$\bar{a}_n = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\},\ \bar{b}_n = \min\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}.$$

Potom $a_n \leq \bar{a}_n < \bar{b}_n \leq b_n$, $\bar{b}_n - \bar{a}_n < \frac{1}{n}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Nech $\varepsilon > 0$ a $m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Potom pre každé $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, $p > m$, $q > m$, platí

$$\bar{a}_p - \bar{a}_q < \bar{b}_q - \bar{a}_q < \frac{1}{q} < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Postupnosť $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je teda fundamentálna. Zrejme $[\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}] = \left[\{\bar{b}_n\}_{n=1}^{\infty}\right]$. Definujme teraz zobrazenie $f: \mathbb{R} \to \tilde{R}$ rovnosťou $f(\alpha) = [\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}]$. Dokážeme, že f podobné zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ na množinu $\tilde{R}$, teda $\mathbb{R} \cong \tilde{R}$.

Zachovajme všetky označenia z doteraz uvedeného postupu a uvažujme $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta = [C, D]$, $\alpha \prec \beta$. Pretože $\alpha \prec \beta$, tak $C \cap B$ je nekonečná množina bez najväčšieho prvku. Podobne ako to bolo s prvkami $a_n, b_n, \bar{a}_n, \bar{b}_n$ možno skonštruovať neklesajúcu postupnosť $\{\bar{c}_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z množiny $C \cap B$ a nerastúcu postupnosť $\{\bar{d}_n\}_{n=1}^{\infty}$ z množiny D tak, že $\bar{d}_n - \bar{c}_n < \frac{1}{n}$. Ak by postupnosť $\{\bar{c}_n\}_{n=1}^{\infty}$ bola od istého indexu konštantná, tak vezmeme namiesto nej postupnosť $\left\{\bar{c}_n - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Zrejme

$$f(\beta) = [\{\bar{c}_n\}_{n=1}^{\infty}] = \left[\left\{\bar{c}_n - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\right].$$

Môžeme teda predpokladať, že postupnosť $\{\bar{c}_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je konštantná, teda existuje také prirodzené číslo m, že $\bar{c}_m < \bar{c}_{m+1}$. Označme $\bar{c}_{m+1} - \bar{c}_m = r$. Potom pre každé $n \geq m+1$ platí : $\bar{c}_n \geq \bar{c}_{m+1} > \bar{c}_m > \bar{a}_n$. Takto pre každé $n \geq m+1$ platí $\bar{a}_n + r < \bar{c}_n$, teda $f(\alpha) \prec_1 f(\beta)$.

Teraz dokážeme, že zobrazenie f je surjekcia. Nech $a = [\{a_n\}_{n=1}^{\infty}] \in \tilde{R}$. Potom existuje taká vybraná postupnosť $M = \{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá je buď neklesajúca alebo nerastúca. Zrejme $\bar{a} = [\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}] = [\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]$. Nech postupnosť M je neklesajúca. Položme

$$A = \{r \in \mathbb{Q};\ \exists n \in \mathbb{N}\ r < \bar{a}_n\}.$$

Zrejme A je neprázdna, nemá najväčší prvok a navyše je aj primitívnym intervalom množiny $\mathbb{Q}$. Keďže postupnosť M je zhora ohraničená, tak množina B, $B = \mathbb{Q} - A$, je neprázdna. Potom α, $\alpha = [A, B]$, patrí do množiny $\mathbb{R}$. Na základe lemy 1 a hore uvedeného postupu existuje neklesajúca postupnosť $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z množiny A a nerastúca postupnosť $\{\tilde{b}_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z množiny B tak, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\tilde{b}_n - \tilde{a}_n < \frac{1}{n}$. Z definície množiny A vyplýva, že ku každému $n \in \mathbb{N}$ existuje prirodzené číslo k_n tak, že $\tilde{a}_n < \bar{a}_{k_n}$, pritom vezmime najmenšie k_n s takou vlastnosťou. Keďže $\bar{a}_{k_n} \leq \tilde{b}_n$, tak aj $\lim_{n\to\infty}\left(\tilde{b}_n - \bar{a}_{k_n}\right) = 0$ a $[\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}] = \tilde{a} = \bar{a} = \left[\{\bar{a}_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}\right]$. Potom $f(\alpha) = \tilde{a}$, ale $\tilde{a} = \bar{a} = a$. Nech teraz postupnosť $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca. Položme $D = \{r \in \mathbb{Q};\ \exists n \in \mathbb{N}\ \bar{a}_n \leq r\}$, $C = \mathbb{Q} - D$. Ak by mala množina C najväčší prvok, presunieme ho do množiny D. Potom $\beta = [C, D] \in \mathbb{R}$. Analogickou úvahou ako v predchádzajúcom prípade možno skonštruovať neklesajúcu postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z množiny C, pričom $c = [\{c_n\}_{n=1}^{\infty}] = [\{a_n\}_{n=1}^{\infty}] = a$. Potom $f(\alpha) = c = a$.

Keďže $(\mathbb{R}, \prec)$ je spojito usporiadaná množina a $\mathbb{R} \cong \tilde{R}$, tak z vety 1 vyplýva, že aj $(\tilde{R}, \prec_1)$ je spojito usporiadaná množina.

Záver

V predloženom príspevku sme sa nezaoberali definíciou a vlastnosťami operácií sčítania a násobenia v usporiadaných poliach $(\mathbb{R}, +, \cdot, \prec)$, $(\tilde{R}, \oplus, \odot, \prec_1)$. Sústredili sme sa iba na usporiadanie týchto polí. Tieto usporiadané polia sú izomorfné (Šalát [2], 1982). Teda existuje taká bijekcia $f: \mathbb{R} \to \tilde{R}$, že pre každé prvky $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

$$f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$$

$$a \prec b \Rightarrow f(a) \prec_1 f(b).$$

Literatúra

[1] Palumbíny, D. – Vrábel, P. 1994. *Teoretická aritmetika.* Nitra: FPV VŠPg, 1994, ISBN 80-88738-38-5.

[2] Šalát, T. 1982. *Reálne čísla*. Bratislava: Alfa, 1982.

[3] Šalát, T. - Smítal, J. 1986. *Teória množín.* Bratislava: Alfa, 1986.

[4] Švec, M. - Šalát, T. – Neubrunn, T. 1987. *Matematická analýza funkcií jednej premennej.* Bratislava: Alfa, 1987.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 4, No. 2, p. 14 – 23
ISSN 2453-6083

Analýza učebníc matematiky zameraná na oblasť Geometria a meranie

Analysis of Mathematics Textbooks Focused on a Thematic Domain Geometry and Measuring

Veronika Bočková*

Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,

Received 3 October 2018; received in revised form 5 October 2018; accepted 6 October 2018

Abstract

The non - standard and application tasks eliminate formal learning and they approximate mathematics to pupils´ needs. In this article we deal with application and non – standard tasks in geometry. We focus on the Mathematics textbooks for the second level of elementary school published before and after the educational reform in 2008. We focus on analysis of textbooks from the perspective of occurrence of different mathematical tasks in curriculum related to Geometry.

Keywords: tasks, non – standard tasks, geometry, elementary school, analysis of the textbooks.

Classification: G40, M10, U20

Úvod

Geometria ako neoddeliteľná oblasť matematiky a súčasť edukačného procesu rozvíja predstavivosť a tvorivosť žiakov. Žiaci si počas svojho štúdia osvoja veľa poznatkov z geometrie, ktorým je nevyhnutné porozumieť a vedieť ich použiť v reálnych situáciách. Počas hodín matematiky je možné rozvíjať schopnosť žiakov aplikovať geometrické poznatky riešením rôznych neštandardných, najmä aplikačných úloh z geometrie. Z uvedeného dôvodu je nevyhnutné aby učitelia matematiky mali k dispozícii rôzne neštandardné úlohy, ktoré by so svojimi žiakmi riešili v čo najväčšej možnej miere. Postačia učiteľom matematiky učebnice, ktoré sú schválené Ministerstvom školstva, vedy, výskumu a športu? Alebo je potrebné, aby učitelia dopĺňali matematické úlohy v učebniciach o neštandardné úlohy? Danými otázkami sa budeme zaoberať v našom článku.

Teoretické východiská

Riešenie matematických úloh sa zaraďuje medzi základné rozvíjajúce činností výchovy a vzdelávania na hodinách matematiky. Úlohy sú vhodné pre vzbudenie záujmu o matematiku a zároveň zabezpečujú aktívnu činnosť žiakov. *Pod pojmom matematická*

* Corresponding author: veronika.bockova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.2.14-23

úloha rozumieme otázky učiteľa, problémy riešené prostredníctvom príkladov, cvičení a rôznych situácií, ktoré si vyžadujú aktivitu a riešenie zo strany žiaka (Šedivý a kol., 2013).

V školskej matematike sa stretávame s rôznymi deleniami matematických úloh. Šedivý a kol. (2013) delia matematické úlohy na:

- *Štandardné úlohy* – úlohy zamerané na pamäť, v ktorých žiaci napodobňujú daný vzor. Riešenie úloh tohto druhu je vo vyučovaní matematiky nevyhnutné, aj keď sa veľakrát len v malej miere rozvíjajú matematické kompetencie žiakov.
- *Neštandardné úlohy* – úlohy zamerané na rozvoj poznávacích schopností žiakov, predstavivosti, logického myslenia a medzipredmetových vzťahov. Úlohy sú vytvárané tak, aby viedli k objaveniu dôvtipu a nachádzaniu nových ciest pri riešení, ktoré žiak prevažne objaví sám.

Hejný (2004) pod neštandardnou úlohou rozumie úlohu, ktorej riešiteľ nepozná procedúru jej riešenia. Ak túto úlohu chce vyriešiť, musí skúmať, hľadať, experimentovať a vynaložiť intelektuálne úsilie. Pri riešení neštandardných úloh si žiaci osvojujú vlastné riešiteľské stratégie a hľadanie komplexného riešenia úlohy. Žiaci prostredníctvom neštandardných úloh objavujú nové súvislosti, využívajú medzi predmetové vzťahy a poznatky z iných oblastí.

Autori Šedivý – Vallo (2013) medzi neštandardné úlohy zaraďujú slovné a konštrukčné úlohy. Do skupiny neštandardných slovných úloh patria problémové, projektové a aplikačné úlohy. Učebné slovné úlohy sa zaraďujú medzi štandardné matematické úlohy, ktoré sú vhodné na precvičovanie algoritmov, vzťahov a pojmov, ktoré si žiak vybavuje z pamäti.

Neštandardné úlohy sa odlišujú od štandardných úloh najmä v tom, že:

- Neexistuje jasná alebo žiadna predpísaná metóda na ich vyriešenie.
- Úlohy podporujú kritické myslenie žiakov.
- Riešenia žiakov sa môžu líšiť, aj keď odpovede majú byť rovnaké.
- Úlohy podporujú komunikáciu a spoluprácu, často vedú až do matematickej diskusie (Ministry of Education, 2011).

Významnou súčasťou neštandardných úloh sú úlohy aplikačné. Šedivý (2008) definuje aplikačnú úlohu ako *úlohu, v ktorej sa prelínajú vedomosti z rôznych tematických celkov, prípadne sa v nej budujú vzťahy matematiky k ostatným predmetom.* Aplikačné úlohy majú interdisciplinárny charakter, nakoľko sa zaoberajú aplikovaním matematiky v rôznych, aj nematematických odboroch.

Pavlovičová – Rumanová (2012) uvádzajú, že zaradenie aplikačných úloh do vyučovacieho procesu prináša mnohé pozitíva:

- Pri riešení konkrétneho problému žiaci jasne vidia priamu aplikáciu naučených poznatkov a vzťahov.
- Zachováva sa spojitosť nadobudnutých vedomostí s reálnym životom, žiaci sa taktiež učia myslieť v súvislostiach.
- Vedú žiakov k lepšiemu zapamätávaniu si učiva.

- Zvyšuje sa aktivita žiakov, podporuje sa ich tvorivosť, interaktivita, spolupráca, ale aj samostatnosť.
- Pri riešení úloh sa žiaci naučia získavať informácie potrebné k riešeniu danej úlohy, formulovať problémy, názory a závery riešení.

Rozvoj vyšších kognitívnych schopností v učebniciach matematiky podporujú nielen aplikačné, ale aj problémové úlohy a úlohy na objavenie. V problémových úlohách žiaci využívajú nadobudnuté poznatky k vyriešeniu rôznych problémových situácii a prostredníctvom úloh na objavenie objavujú nové vedomosti a vzťahy.

Analýza učebníc matematiky pre 2. stupeň základných škôl v tematickom okruhu Geometria a meranie

Učebnice neodmysliteľne patria ku školskej edukácii a napriek výraznému pokroku doby majú stále svoje nezastupiteľné miesto. Podľa mnohých odborníkov sú učebnice považované za najdôležitejšiu učebnú pomôcku žiakov a pomocnú edukačnú oporu pre učiteľov pri ich príprave a usmerňovaní vyučovania. Slovenské školstvo prešlo v roku 2008 významnou reformou, učebnice vydané pred reformou sa stali neaktuálnymi a vystriedali ich nové učebnice vytvorené v súlade s reformovaným Štátnym vzdelávacím programom (ŠVP).

Prepojenie edukačného procesu s reálnym životom zohráva stále dôležitejšiu úlohu, a preto je potrebné, aby úlohy v učebniciach matematiky boli v značnej miere zamerané na aplikáciu nadobudnutých poznatkov. Z daného dôvodu je vhodné poznať, ktoré typy matematických úloh prevládajú v učebniciach matematiky vydaných pred reformou školstva a po reforme školstva. Taktiež je zaujímavé porovnať počet aplikačných úloh v daných učebniciach. V článku sme sa zamerali na analýzu učebníc matematiky určených pre druhý stupeň základných škôl (ZŠ) a sústredili sme sa na kapitoly, ktoré súvisia s tematickým okruhom Geometria a meranie. Autormi analyzovaných učebníc matematiky vydaných pred reformou školstva pre 5. - 9. ročník ZŠ sú prof. Ondrej Šedivý, doc. Soňa Čeretková, v spolupráci s PhDr. Ľudovít Bálint a PaedDr. Mária Malperová. Učebnice vydalo Slovenské pedagogické nakladateľstvo, prvé vydania postupne vyšli v rokoch 1998 - 2002. Autormi učebníc matematiky vydaných po reforme školstva pre 5. - 8. ročník ZŠ (1. - 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom) sú RNDr. Pavol Černek a PaedDr. Ján Žabka. Učebnice vydalo vydavateľstvo Orbis Pictus Istropolitana, prvé vydania postupne vyšli v rokoch 2009 - 2012. Autorkou učebníc pre 9. ročník ZŠ (4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom) je RNDr. Viera Kolbaská. Učebnice vydalo Slovenské pedagogické nakladateľstvo s prvým vydaním v roku 2012 (I. časť) a v roku 2014 (II. časť).

V Tabuľke 1 uvádzame tematické celky inovovaného ŠVP (2015) určeného pre nižšie stredné vzdelanie, ktoré súvisia s tematickým okruhom Geometria a meranie. Jednotlivé tematické celky sme vyhľadali v analyzovaných učebniciach a následne sme matematické úlohy z tematických celkov rozdelili do skupín: *vzorové príklady, úlohy a cvičenia, úlohy zadané obrázkom, úlohy na upevnenie učiva, slovné úlohy, aplikačné úlohy, konštrukčné úlohy, problémové úlohy a úlohy na objavenie*.

ROČNÍK ZŠ	*TEMATICKÝ CELOK*
piaty	• Geometria a meranie • Súmernosť v rovine (osová a stredová)
šiesty	• Obsah obdĺžnika, štvorca a pravouhlého trojuholníka v desatinných číslach, jednotky obsahu • Uhol a jeho veľkosť, operácie s uhlami • Trojuholník, zhodnosť trojuholníkov
siedmy	• Kváder a kocka, ich povrch a objem v desatinných číslach, premieňanie jednotiek objemu
ôsmy	• Rovnobežník, lichobežník, obvod a obsah rovnobežníka, lichobežníka a trojuholníka • Kruh, kružnica • Hranol
deviaty	• Pytagorova veta • Ihlan, valec, guľa, ich objem a povrch • Podobnosť trojuholníkov

Tabuľka 1: *Tematické celky ŠVP súvisiace s tematickým okruhom Geometria a meranie*

Komparácia výskytu neštandardných úloh vo vybraných učebniciach matematiky

Z vykonaných analýz vybraných kapitol zaoberajúcich sa geometriou sme vytvorili výsledné tabuľky pre učebnice vydané po reforme školstva v roku 2008 (Tabuľka 2) a pre učebnice vydané pred reformou školstva (Tabuľka 3). V daných tabuľkách sme numericky vyjadrili sumár jednotlivých typov matematických úloh a ich percentuálny podiel výskytu v učebniciach. Úlohy v tabuľkách sme zoradili zostupne, podľa výskytu jednotlivých úloh v analyzovaných kapitolách učebníc. Úlohy z tematického celku Geometria a meranie sme do výsledného počtu úloh nezahrnuli, nakoľko učebnice vydané pred reformou školstva učivo tematického celku neobsahujú.

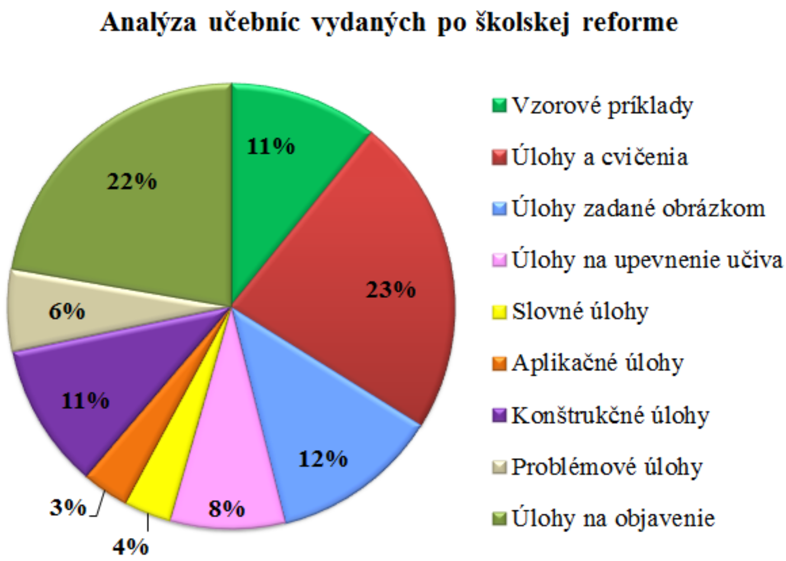
Typ matematickej úlohy	**Počet výskytov**	**Počet percent**
Úlohy a cvičenia	262	23,1
Úlohy na objavenie	253	22,3
Úlohy zadané obrázkom	139	12,2
Vzorové príklady	123	10,8
Konštrukčné úlohy	119	10,5
Úlohy na upevnenie učiva	94	8,3
Problémové úlohy	68	6,0
Aplikačné úlohy	39	3,4
Slovné úlohy	39	3,4
spolu	1136	100

Tabuľka 2*: Výsledná analýza kapitol z učebníc matematiky vydaných po reforme v roku 2008 zaoberajúcich sa vybranými tematickými celkami.*

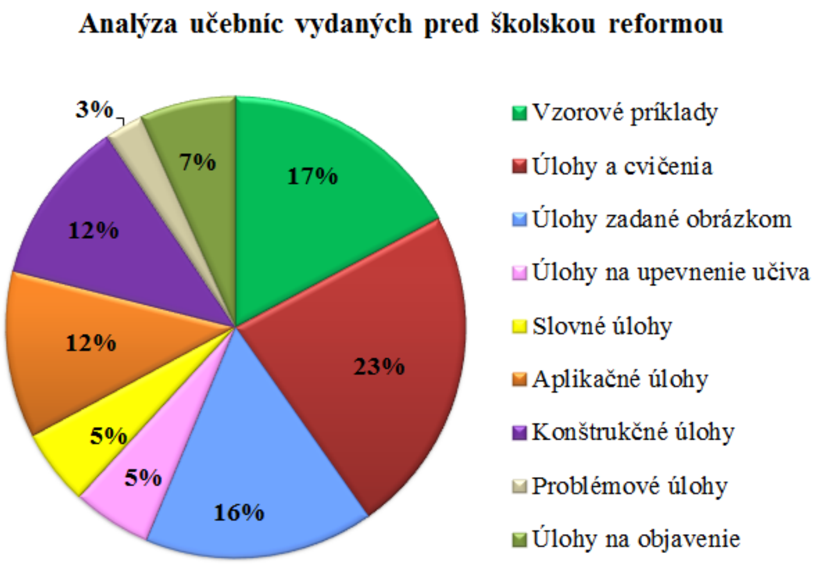
Typ matematickej úlohy	**Počet výskytov**	**Počet percent**
Úlohy a cvičenia	195	23,1
Vzorové príklady	145	17,2
Úlohy zadané obrázkom	136	16,1
Aplikačné úlohy	99	11,7
Konštrukčné úlohy	98	11,6
Úlohy na objavenie	57	6,7
Úlohy na upevnenie učiva	47	5,6
Slovné úlohy	45	5,3
Problémové úlohy	23	2,7
spolu	845	100

Tabuľka 3*: Výsledná analýza kapitol z učebníc matematiky vydaných pred reformou v roku 2008 zaoberajúcich sa vybranými tematickými celkami.*

Formou kruhových grafov sme vyjadrili percentuálny podiel jednotlivých typov úloh vo vybraných kapitolách v učebniciach vydaných po reforme školstva (Graf 1) a pred reformou školstva (Graf 2). Výseky zafarbené rovnakou farbou označujú ten istý typ matematickej úlohy.



Graf 1*: Percentuálny podiel výskytu jednotlivých typov úloh v analyzovaných kapitolách učebníc vydaných po reforme školstva*



Graf 2: *Percentuálny podiel výskytu jednotlivých typov úloh v analyzovaných kapitolách učebníc vydaných pred reformou školstva*

Zhrnutie výsledku analýzy učebníc

Učebnice matematiky vydané v rámci reformy školstva disponujú väčším počtom matematických úloh zaoberajúcich sa geometriou (o 291 úloh viac) ako učebnice vydané pred reformou. Napriek danému faktu aktuálne používané učebnice obsahujú len veľmi malé množstvo aplikačných úloh. Ich percentuálne zastúpenie sa znížilo o viac ako 8 % v porovnaní s učebnicami vydanými pred reformou. V úlohách tematických celkov ako napr. Obsah obdĺžnika, štvorca a pravouhlého trojuholníka v desatinných číslach, jednotky obsahu či Pytagorova veta, je nevyhnutné poukázať na aplikáciu nadobudnutých poznatkov. K výraznému zníženiu počtu aplikačných úloh prišlo v štyroch z jedenástich tematických celkov zaoberajúcich sa geometriou. Dané tematické celky s počtom aplikačných úloh uvádzame v Tabuľke 4. Pokles počtu aplikačných úloh v oblasti aplikácie je veľmi nepriaznivý pre učiteľov ako i pre žiakov. Učitelia musia poskytnúť úlohy žiakom, nakoľko aplikačné úlohy uvádzajú rôzne využitie matematiky v praktickom živote, vzbudzujú záujem o matematiku a rozširujú všeobecný prehľad. Učitelia matematiky, ktorí používajú aktuálne schválené učebnice a chcú so svojimi žiakmi riešiť aplikačné úlohy, ich musia doplniť aj z iných zdrojov, ako napr. z učebníc matematiky vydaných pred reformou školstva, zbierok úloh, pracovných zošitov alebo si ich vytvoriť sami podľa záujmu žiakov.

TEMATICKÝ CELOK	*POČET APLIKAČNÝCH ÚLOH V UČEBNICIACH VYDANÝCH*	
	po reforme školstva	*pred reformou školstva*
Obsah obdĺžnika, štvorca a pravouhlého trojuholníka v desatinných číslach, jednotky obsahu	5	16
Kváder a kocka, ich povrch a objem v desatinných číslach, premieňanie jednotiek objemu	3	26
Rovnobežník, lichobežník, obvod a obsah rovnobežníka, lichobežníka a trojuholníka	0	11
Pytagorova veta	4	11

***Tabuľka 4**: Tematické celky z geometrie, v ktorých pozorujeme výrazné zníženie počtu aplikačných úloh*

Po sčítaní všetkých neštandardných úloh (aplikačné, konštrukčné a problémové úlohy) v analyzovaných častiach učebníc pozorujeme, že ich počet je v učebniciach vydaných pred aj po reforme školstva približne rovnaký. Konkrétne učebnice vydané po reforme školstva obsahujú 226 (20 % z celkového počtu matematických úloh) a učebnice vydané pred reformou 220 (26 % z celkového počtu matematických úloh) neštandardných úloh. Napriek tomu, že v učebniciach vydaných na základe reformy školstva počet neštandardných úloh mierne vzrástol, pozorujeme zníženie ich percentuálneho výskytu v porovnaní s učebnicami vydanými pred reformou školstva. V aktuálnych učebniciach sme očakávali výraznejšie zvýšenie počtu neštandardných úloh, ktoré podporujú flexibilné myslenie, rýchle a efektívne riešenie problémových situácií. Práve tieto schopnosti získané na hodinách matematiky môžu žiaci využiť v dnešnom technologickom, komplexnom a náročnom svete.

Pozitívom učebníc vydaných po reforme v roku 2008 je, že sa vo väčšej miere zameriavajú na vyššiu úroveň myšlienkových operácií, analýzu až tvorivosť. Danú úroveň podporujú úlohy na objavenie a problémové úlohy. Žiaci si vytvárajú nové geometrické poznatky bádaním, skúmaním, riešením rôznych problémov v nadväznosti na už osvojené vedomosti. V učebniciach sa prejavuje konštruktivistický prístup ku geometrii. Poznatky žiakov majú trvalejší charakter, nie sú napríklad viazané na konkrétne premenné vyskytujúce sa vo vzorcoch. V Tabuľke 5 uvádzame kapitoly, v ktorých výraznejšie vzrástol počet problémových úloh.

TEMATICKÝ CELOK	*POČET PROBEMOVÝCH ÚLOH V UČEBNICIACH VYDANÝCH*	
	po reforme školstva	*pred reformou školstva*
Trojuholník, zhodnosť trojuholníkov	12	1
Kváder a kocka, ich povrch a objem v desatinných číslach, premieňanie jednotiek objemu	14	4
Rovnobežník, lichobežník, obvod a obsah rovnobežníka, lichobežníka a trojuholníka	10	1

***Tabuľka 5**: Tematické celky z geometrie, v ktorých pozorujeme výrazné zvýšenie počtu problémových úloh*

V celkovom počte konštrukčných úloh, ako súčasti neštandardných úloh, nenastalo výrazné zníženie ani zvýšenie. Autori aktuálne používaných učebníc zaradili oveľa viac konštrukčných úloh do tematického celku zaoberajúceho sa rovnobežníkmi, lichobežníkmi a trojuholníkmi. Opačný efekt pozorujeme v tematickom celku Kruh, kružnica.

V nami analyzovaných dvoch súboroch učebníc je v oblasti geometrie kladený dôraz najmä na úroveň žiackeho porozumenia, pričom medzi matematické úlohy rozvíjajúce porozumenie žiakov sme zaradili úlohy a cvičenia, úlohy zadané obrázkom a vzorové príklady. Učebnice vydané pred reformou školstva obsahujú z celkového počtu matematických úloh zameraných na geometriu 56 % úloh, ktoré podporujú porozumenie žiakov a učebnice vydané na základe reformy školstva obsahujú 46 % daných úloh.

Učebnice vydané pred reformou školstva kladú väčší dôraz na aplikovanie nových poznatkov a prepojenie matematiky s praxou. Učebnice zahŕňajú veľa vzorových príkladov, ktoré sú vhodnou pomôckou k žiackemu osvojeniu rôznych stratégií riešenia úloh. Žiaci by mali disponovať rôznymi osvojenými stratégiami riešenia matematických úloh a vzorové príklady v učebniciach vydaných pred reformou školstva sú jednou z vhodných možností ich osvojenia.

Záver

Žiaci sa vo svojom živote stretávajú s mnohými situáciami, ktoré je potrebné čo najefektívnejším spôsobom vyriešiť. Pri ich riešení im môžu pomôcť matematické kompetencie získané počas ich štúdia. Je úlohou učiteľov, aby ich žiaci získavali neformálne poznatky a vyhýbali sa formalizmu vo vyučovaní. Žiaci dokážu získané neformálne vedomosti využiť nielen pri rôznych testovaniach ale aj v praxi. Z daného dôvodu je vhodné a aj nevyhnutné, aby sa v čo najväčšej možnej miere neštandardné úlohy zavádzali do učiva základných škôl.

Aktuálne používané učebnice obsahujú 20 % neštandardných úloh. V učebniciach sa zvýšilo percentuálne zastúpenie problémových úloh, pri konštrukčných úlohách pozorujeme ich mierne zníženie. Aplikačné geometrické úlohy nezastávajú v učebniciach významné miesto, nakoľko tvoria iba 3,4 % z celkového počtu úloh. Je pozoruhodné, keď žiaci v aktuálne používaných učebniciach objavia rôzne využívané vzorce, Pytagorovu vetu, ale dôležité je aj následné využitie objavených poznatkov v praxi.

Veľmi dôležitou úlohou učiteľov je, aby sa na hodinách matematiky venovali problematike neštandardných úloh. Zavádzanie neštandardných úloh by malo prebiehať v čo najnižšom ročníku, aby sa žiaci naučili s nimi pracovať a vybudovali si svoj vlastný štýl pristupovania k úlohám. Je dôležité, aby si žiaci osvojili základné kroky riešenia jednotlivých typov neštandardných úloh a mali bohaté skúsenosti s ich riešením.

Literatúra

HEJNÝ, M. a kol. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: Univerzita Karlova v Prahe – Pedagogická fakulta, 2004. 244 s. ISBN 80-7290-189-3.

KOLBASKÁ, V. *Matematika pre 9.ročník základnej školy a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. 1. časť.* 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2012. 143 s. ISBN 978-80-10-02291-5.

KOLBASKÁ, V. *Matematika pre 9.ročník základnej školy a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. 2. časť*. 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2014. 136 s. ISBN 978-80-10-02292-2.

MINISTRY OF EDUCATION. (2011) *Problems and Problem Solving*. [online], Dostupné na: < http://moe.gov.jm/sites/default/files/ProblemAndProblemSolving.pdf >

PAVLOVIČOVÁ, G. – RUMANOVÁ,L. Rôzne prístupy k tvorbe geometrických úloh. In *Acta mathematica 15.* Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2012. s. 115 -120, ISBN 978 -80 – 558 – 0135-3.

ŠEDIVÝ, O. – ČERETKOVÁ, S. – MALPEROVÁ, M. *Matematika pre 5. ročník základných škôl. 1. časť.* 4. vyd. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2002. 127 s. ISBN 80-08-03442-4.

ŠEDIVÝ, O. – ČERETKOVÁ, S. – MALPEROVÁ, M. *Matematika pre 5. ročník základných škôl. 2. časť.* 4. vyd. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2003. 112 s. ISBN 80-08-03519-6.

ŠEDIVÝ, O. – ČERETKOVÁ, S. – MALPEROVÁ, M. *Matematika pre 6. ročník základných škôl. 1. časť.* 3. vyd. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2003. 143 s. ISBN 80-10-00124-4.

ŠEDIVÝ, O. – ČERETKOVÁ, S. – MALPEROVÁ, M. *Matematika pre 6. ročník základných škôl. 2. časť.* 3. vyd. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2003. 143 s. ISBN 80-10-00362-X.

ŠEDIVÝ, O. – ČERETKOVÁ, S. – MALPEROVÁ, M. – BÁLINT, Ľ. *Matematika pre 7. ročník základných škôl. 1. časť.* 4. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2006. 144 s. ISBN 80-10-00983-0.

ŠEDIVÝ, O. – ČERETKOVÁ, S. – MALPEROVÁ, M. – BÁLINT, Ľ. *Matematika pre 7. ročník základných škôl. 2. časť.* 3. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2004. 158 s. ISBN 80-10-00369-4.

ŠEDIVÝ, O. – ČERETKOVÁ, S. – MALPEROVÁ, M.- BÁLINT. Ľ. *Matematika pre 8. ročník základných škôl. 1. časť. 2*. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2002. 143 s. ISBN 80-08-03441-6

ŠEDIVÝ, O. – ČERETKOVÁ, S. – MALPEROVÁ, M. – BÁLINT, Ľ. *Matematika pre 8. ročník základných škôl. 2. časť. 1*. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2001. 159 s. ISBN 80-08-03032-1.

ŠEDIVÝ, O. – ČERETKOVÁ, S. – MALPEROVÁ, M. – BÁLINT, Ľ. *Matematika pre 9. ročník základných škôl. 1. časť. 3*. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2005. 119 s. ISBN 80-10-00747-1.

ŠEDIVÝ, O. – ČERETKOVÁ, S. – MALPEROVÁ, M. – BÁLINT, Ľ. *Matematika pre 9. ročník základných škôl. 2. časť. 3*. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2005. 142 s. ISBN 80-10-00857-5.

ŠEDIVÝ, O. a kol. *Zbierka zaujímavých, zábavných a aplikačných úloh z matematiky.* Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2008. 140 s. ISBN: 978-80-8094-421-6.

ŠEDIVÝ, O. a kol. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky.* Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2013. 220 s. ISBN: 978-80-558-0438-5.

ŠEDIVÝ, O. - VALLO, D. Prečo vyučovať slovné a konštrukčné úlohy. In: *Slovné a konštrukčné úlohy ako prostriedok k rozvoju logického myslenia.* Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2013. s. 3 – 10, ISBN 978-80-558-0238-1.

ŠTÁTNY PEDAGOGICKÝ ÚSTAV. (2015) *Inovovaný Štátny vzdelávací program Matematika, Príloha ISCED 2.* [online], Dostupné na: <http://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/ inovovany-statnyvzdelavaciprogram/matematika_nsv_2014.pdf >

ŽABKA, J. – ČERNEK, P. *Matematika pre 5. ročník ZŠ. 1. časť.* 1. vyd. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2009. 111 s. ISBN 978-80-8120-109-7.

ŽABKA, J. – ČERNEK, P. *Matematika pre 5. ročník ZŠ. 2. časť.* 1. vyd. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2011. 120 s. ISBN 978-80-8120-110-3.

ŽABKA, J. – ČERNEK, P. *Matematika pre 6. ročník ZŠ a 1. ročník gymnázií s osemročným štúdiom. 1. časť.* 1. vyd. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2009. 143 s. ISBN 978-80-7158-978-5.

ŽABKA, J. – ČERNEK, P. *Matematika pre 6. ročník ZŠ a 1. ročník gymnázií s osemročným štúdiom. 2. časť.* 1. vyd. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2010. 144 s. ISBN 978-80-7158-990-7.

ŽABKA, J. – ČERNEK, P. *Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník gymnázií s osemročným štúdiom. 1. časť.* 1. vyd. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2010. 112 s. ISBN 978-80-8120-051-9.

ŽABKA, J. – ČERNEK, P. *Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník gymnázií s osemročným štúdiom. 2. časť.* 1. vyd. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2011. 136 s. ISBN 978-80-8120-050-2.

ŽABKA, J. – ČERNEK, P. *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom. 1. časť.* 1. vyd. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2011. 143 s. ISBN 978-80-8120-107-3.

ŽABKA, J. – ČERNEK, P. *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom. 2. časť.* 1. vyd. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2012. 143 s. ISBN 978-80-8120-125-7.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 4, No. 2, p. 24 – 28
ISSN 2453-6083

Polohové a nepolohové úlohy v rovine – omyl alebo opodstatnená klasifikácia ?

Positional and Non-positional Tasks in Plane – Mistake or Valid Classification?

Dušan Vallo[a]

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 5 October 2018; received in revised form 9 October 2018; accepted 10 October 2018

Abstract

In this paper we deal with some methodological teaching problems that are occurring in teaching to geometric construction tasks in the plane. The analysis of the problem is related to special classification of the tasks.

Keywords: didactics of mathematics, geometry, construction task

Classification: G10, R20

Úvod

Rôzne didaktické a iné odborné pochybenia vo výučbe geometrických konštrukčných úloh sú vo vyučovaní bežné. Sú spôsobené viacerými faktormi, najčastejšie „prepisovaním“ z učebných materiálov, široko dostupných v elektronickej podobe. Tieto elektronické verzie učebných textov neraz nepodliehajú revízii a stávajú sa mätúcou príťažou pre žiakov i učiteľov. Cieľom tohto príspevku je poukázať na jednu konkrétnu klasifikáciu geometrických konštrukčných úloh, ktorá sa objavuje v praxi a spôsobuje terminologicko-didaktický zmätok v mysli žiakov i učiteľov.

Krátka genéza konštrukčných geometrických úloh v školskej praxi

Konštrukčné geometrické úlohy vždy boli a sú dôležitou súčasťou výučby geometrie na našich školách.

Rozvíjajú logické myslenie a analytický prístup k riešeniu problémov, vedú žiaka k pochopeniu zložitosti problémových úloh v matematike a v konečnom dôsledku sú istým „kultúrno-učebným dedičstvom“ nadväzujúcim na českú geometrickú a deskriptívnu školu. [1, 2]

V 60-tych rokoch minulého storočia sa objavuje modernizačný prúd založený na množinovej matematike. Ten prináša viaceré zmeny, medzi nimi aj snahu o elimináciu konštrukčných úloh. Napr. v [3] sa uvádza:

> *„V poslední době – v etapě modernizace obsahu a metod školské matematiky – jsou konstruktivní úlohy řešené „“ryze geometricky“ ze*

*Corresponding author: dvallo@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.2.24 - 28

> *školy stále víc a víc vytlačovány. Je to jednak proto, že jejich význam pro moderní matematické vzdělání stále klesá, jednak proto, že ve škole musíme dát přednost jiným, modernějším partiím matematiky, které jsou pro dnešní společnost důležitější, a na konstrukční úlohy prostě nezbývá čas. „*

Návrat ku geometrii nastáva v 80-tych rokoch, kedy množinová symbolika a formalizmus prenikajú aj do vyučovania geometrie. Súčasne sa objavuje snaha o axiomatizáciu a presadenie rôznych štruktúrovaných rozdelení, ktoré sa odrazili na príslušných metodikách výučby. K takým patrila aj klasifikácia planimetrických konštrukčných úloh, rozdeľovaných na tzv. *polohové* a *nepolohové* úlohy. Pozrime sa na problematiku dôkladnejšie.

Polohové a nepolohové geometrické konštrukčné úlohy

V publikácii [3] sa na str. 157 píše o roztriedení konštrukčných úloh nasledovne:

> *„Jsou konstrukční úlohy, kde je danými podmínkami určena … i poloha hledaných útvarů … . Tyto úlohy budeme nazývat polohové. Druhou skupinu tvoří úlohy, v nichž není dána poloha žádného bodu (nebo jiného útvaru); proto jimi také není určená poloha hledaného objektu. Tyto úlohy budeme nazývat nepolohové. “*

Podľa autora príkladom tzv. polohovej úlohy je:

***Úloha* 1**. *Je daná priamka p a bod A ležiaci mimo nej. Bodom A zostrojte kolmicu k priamke p.*

Naproti tomu, príkladom tzv. nepolohovej úlohy je úloha 2.

***Úloha* 2**. *Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané dĺžky ťažníc t_a, t_c a dĺžka výšky v_b.*

Ďalej autor zdôrazňuje, že v procese riešenia nepolohovej úlohy je potrebné vykonať tzv. *lokalizáciu*. Prakticky to znamená umiestniť niektorý z daných prvkov, čím sa nepolohová úloha prevedie na polohovú.

Samotná lokalizácia môže následne výrazne ovplyvniť riešenie úlohy. Autor v [3, str. 158-159] uvádza dve riešenia úlohy 2.

V prvom začína lokalizáciou najprv ťažnice $t_a \equiv AS_a$, kde S_a je stred BC. V tomto riešení je hľadaný 1 neznámy bod – vrchol trojuholníka.

V druhom riešení umiestňuje do roviny zase výšku v_b a výsledok - riešenie je v porovnaním s prvým zložitejšie (využívajú sa ďalšie pomocné neznáme body).

Z toho sa vyvodzuje, že rôzna lokalizácia tej istej nepolohovej úlohy môže viesť k hľadaniu riešenia úlohy s **rôznym počtom** neznámych bodov. Prirodzene teda autor prichádza k záveru, ktorý uvádza vo forme odporúčania - konštrukčné úlohy v rovine treba roztriediť podľa počtu neznámych bodov.

Takáto štrukturalizácia sa v didaktike matematiky (neskôr aj v teórii vyučovania matematiky) skutočne ujala a podstatne rozvinula. Napríklad v publikáciách [4, 5] sa odporúča, aby úlohy s jedným neznámym bodom boli spravidla riešené metódou množín bodov danej vlastnosti, kým pri viacerých neznámych bodoch je uprednostňovaná metóda zobrazení.

Je zaujímavé, že „pracovné“ roztriedenie na tzv. polohové a nepolohové úlohy, ktoré mohlo „upadnúť do zabudnutia“, sa dostalo do povedomia učiteľov matematiky a ďalej sa nekriticky premietlo do metodických príručiek a rôznych učebných materiálov, v dnešnej dobe zväčša elektronických, napr. [6, 7, 8, 9, 10, 11] . *

To sa samozrejme vo vyučovaní konštrukčných úloh prejavilo v rôznych dôsledkoch.

Napríklad, v [6] sa uvádza, že *„zadanie polohovej úlohy väčšinou začína slovami „Je daná... .“ Táto veta znamená, že konštrukciu musíme začať prvkom, ktorý je daný v úvodnej vete*. “

Kým pri nepolohovej úlohe slovné spojenie *„Je daná...“* absentuje a zo *„zadaných prvkov si môžeme vybrať ktorýkoľvek a začať konštrukciu od neho*. “

V uvedenom zdroji je ukážkou tzv. polohovej úlohy napr. úloha 3.

***Úloha* 3**. *Je daná úsečka AB, $|AB| = 6\ cm$. Zostrojte všetky trojuholníky ABC so stranou AB, pre ktoré platí $v_c = 4\ cm$, $t_c = 6\ cm$.*

A zase ukážkou tzv. nepolohovej úlohy je:

***Úloha* 4**. *Zostrojte trojuholník ABC, pre ktorý platí $a = 6\ cm$, $b = 5\ cm, \beta = 50°$.*

Z uvedeného jasne vyplýva, že ide o umelé rozdelenie, značne poznačené formálnym vzdelávaním. Veď len uvážme:

a) zadanie úlohy 3 vieme preformulovať bez použitie slovného spojenia „je dané...“ - *„Zostrojte trojuholník ABC tak, aby $|AB| = 6\ cm, v_c = 4\ cm$, $t_c = 6\ cm$.“*
b) Ako je/môže byť lokalizovaná daná úsečka AB v rovine? Je zrejmé, že presne lokalizovať krajné body úsečky možno umiestnením do súradnicovej sústavy, ak sú dané súradnice týchto bodov. A ani vtedy nie je situácia jednoznačná, pretože voľba polohy súradnicových osí v rovine môže byť „rôzna“.
c) Je žiak schopný rozlišovať medzi polohovými a nepolohovými úlohami? Zamyslí sa vôbec nad tým, či má zmysel úsečku AB narysovať „vodorovne“ alebo „zvislo“ ? Má odhad, či sa konštrukcia „zmestí“ na papier?

Diskusia k úlohe je taktiež dôležitou fázou riešenia konštrukčnej úlohy. Žiak/učiteľ musí rozhodnúť o celkovom počte riešení. Triedenie polohové vs. nepolohové úlohy sa negatívne prenieslo aj na tento krok riešenia konštrukčnej úlohy.

Mnohí autori sa nezhodnú v názore, ako uvažovať o celkovom počte riešení konštrukčnej úlohy. Uvažujú sa riešenia v rovine alebo len v jednej polrovine? Zhodné výsledky /útvary sú považované za jedno riešenie? Ak áno, uvažuje sa existencia len priamej zhodnosti medzi výslednými útvarmi?

V súčasnej dobe sú populárne rôzne internetové fóra - nápovedné zdroje informácii. Na webe [12] sa uvádza, že *„počtom riešení konštrukčnej úlohy sa rozumie počet všetkých jej rôznych riešení a to:*

a) pri polohovej úlohe sa za rôzne riešenia považujú každé dva výsledné útvary, ktoré nie sú totožné a vyhovujú zadaniu,

---

* Citované zdroje sú vybrané ilustračne. Bežné internetové vyhľadávače ich ponúkajú prioritne na prvých miestach. Ich obsah považujeme za negatívny dôsledok metodických usmernení z minulosti a žiadnym spôsobom neznevažujeme ich autorov, ktorí svedomito vypracovali učebné texty v dobrej viere a podľa ich najlepšieho vedomia.

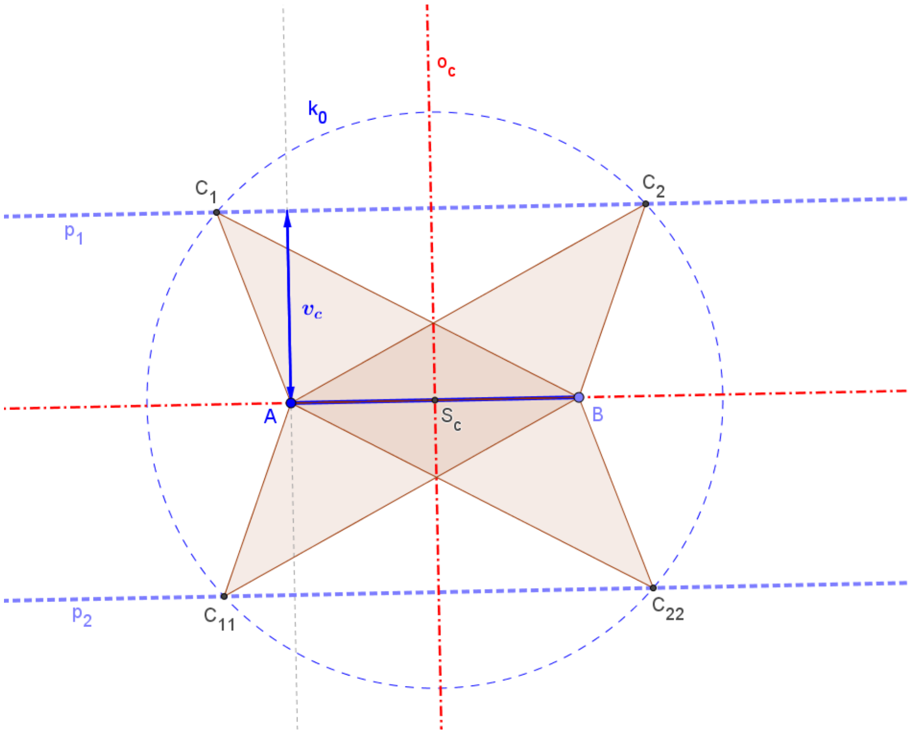
b) *pri nepolohovej úlohe sú rôzne riešenia také útvary, ktoré nie sú zhodné. "*

Vynára sa viacero otázok.

a) Čo sa myslí pod pojmom „totožné" ? Dva body, resp. priamky, sú totožné, ak majú rovnakú polohu.

b) Akú úlohu to teda riešime? Ukázali sme na úlohách, že preformulovaním zadania alebo lokalizáciou ľahko prevedieme nepolohovú úlohu na polohovú. Prečo má byť výsledný počet riešení závislý od nejednoznačnej štrukturalizácie?

Konštrukčné riešenie úlohy 3, ku ktorému dospeje žiak na základe postupu konštrukcie je na obr. 1. Ak by vnímal úlohu ako polohovú, získal by 4 riešenia. V prípade pozmenenej formulácie by existovalo iba jedno riešenie, pretože naznačené osi súmerností pôvodný počet zredukujú.



Obr. 1

Záver

V článku sme uviedli niekoľko argumentov, ktoré poukazujú na neopodstatnenosť „klasifikácie" geometrických konštrukčných úloh na tzv. *polohové* a *nepolohové* úlohy. Dnes už ťažko zistiť, či nami uvedený najstarší literárny zdroj [3] stál na počiatku, alebo vychádzal z iného prameňa.

V každom prípade vnímame uvedenú klasifikáciu ako zmätočnú. Pripomíname, že v [3] išlo len o pomocnú úvahu. Žiaľ, triedenie sa omylom dostalo do česko-slovenských metodických príručiek a učebníc vďaka postupnému a neuváženému prepisu odbornej literatúry, pričom je sústavne systematicky rozvíjané.

Poznamenávame, že snaha poukázať na nevhodnosť uvedeného triedenia konštrukčných úloh, nie je ojedinelá. Z viacerých vyberáme napr. [1], kde sa píše:

> *„Pôvodcom tejto klasifikácie je zaiste horlivec s vyvinutým zmyslom pre ľudovú tvorivosť, lebo vzdelaný učiteľ ovládajúci syntetickú geometriu v rozsahu strednej školy by neomylne vedel, že súhrnný názov polohové úlohy sa používa pre úlohy operujúce s vlastnosťami geometrických objektov založených na axiómach incidencie, usporiadania a rovnobežnosti ako opozitum k súhrnnému názvu metrické úlohy, v ktorých ... primárnu dôležitosť majú vlastnosti, založené na axiómach zhodnosti a spojitosti.“*

Veríme, že učiteľská verejnosť kriticky posúdi opodstatnenosť klasifikácie na polohové vs. nepolohové úlohy a toto triedenie sa postupne z vyučovania vytratí.

Literatúra

[1] Čižmár, J. O niektorých klišé v riešení (nielen) konštrukčných geometrických úloh. In. *Proceedings of Symposium on Computer Geometry*, SCG 2012, Vol. 21, ISBN: 978-80-227-3798-2, p. 28 -37

[2] Hejný, M. a kol. *Teória vyučovania matematiky II*, SPN Bratislava, 1989, ISBN: 80-08-00014-7

[3] Vyšín, J. *Metodika řešení matematických úloh*, SPN Praha, 1962

[4] Šedivý, O. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky. Konštrukčné úlohy a metódy ich riešenia.* FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 78, Nitra, 2001, ISBN: 80-8050-417-2

[5] Šedivý, O., Vallo, D. Prečo vyučovať slovné a konštrukčné úlohy? In: *Slovné a konštrukčné úlohy ako prostriedok k rozvoju logického myslenia*. FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 516, Nitra, 2013, ISBN: 978-80-558-0238-1, s. 3 -10

[6] http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/03_Planimetrie/4_Konstrukcni_ulohy/3405_Konstrukce_trojuhelniku_I.pdf

[7] http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/stepan_kurka/ulohy.htm

[8] http://www.realisticky.cz/ucebnice/03%20Matematika%20Z%C5%A0/03%208.%20ro%C4%8Dn%C3%ADk/06%20Konstruk%C4%8Dn%C3%AD%20%C3%BAlohy/11%20Konstrukce%20troj%C3%BAheln%C3%ADk%C5%AF%20I.pdf

[9] http://skola.brundik.net/szz-ma/materialy/didaktika/Did-4-03_-_Konstrukcni_ulohy.pdf

[10] http://www.gymst.com/sablony-dum/32-12/VY_32_INOVACE_Rych12.pdf

[11] http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/GeoGebra/matematika/planimetrie/konstrukcni_ulohy_old/zadani.html

[12] http://forum.matematika.cz/viewtopic.php?id=86333