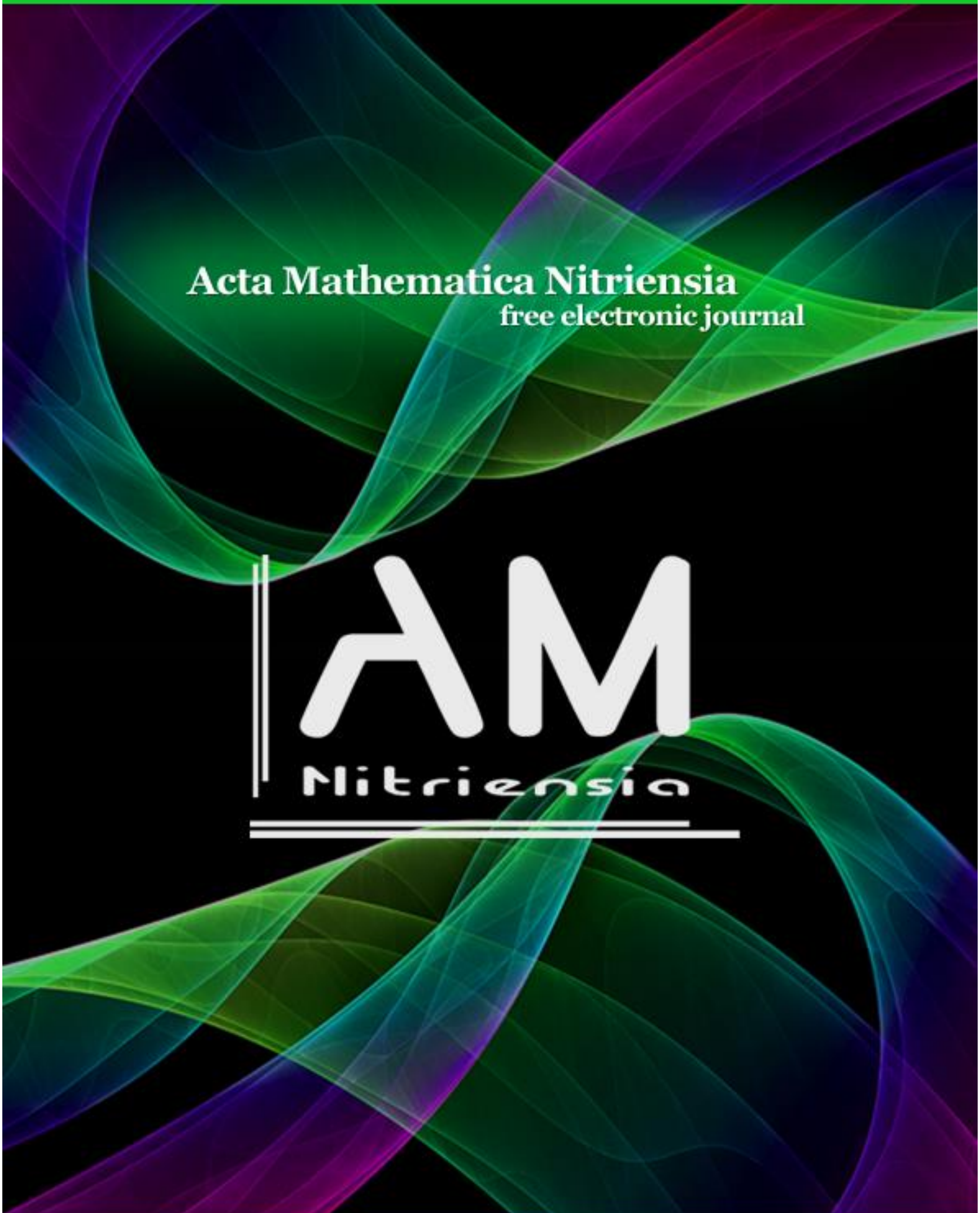
Vol. 2, No. 2, 2016

Acta Mathematica Nitriensia

free electronic journal



ISSN: 2453-6083

Názov / Title
Acta Mathematica Nitriensia

Všeobecne o časopise
ISSN 2453-6083 (online)
On-line elektronický vedecký časopis venovaný otázkam teórie vyučovania matematiky
Periodicita: 2x ročne
Otvorený prístup

General information
ISSN 2453-6083 (online)
Free electronic scientific journal focused to current problems in mathematical education theory
Periodicity: twice a year
Open Access

Pokyny pre autorov
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php

Guidelines for authors
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php

Recenzné konanie
Časopis uskutočňuje dvojité anonymné a nezávislé recenzné konanie zaslaných príspevkov.

Review process
The journal carries out a double - blind peer review evaluation of drafts of contributions.

Dostupnosť
www.amn.fpv.ukf.sk

Available from
www.amn.fpv.ukf.sk

Vydavateľ
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovensko

Publisher
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences
Constantine the Philosopher University in Nitra
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovakia

Údaje k aktuálnemu číslu
Ročník: 2
Číslo: 2
Rok: 2016
Dátum vydania: 25. 10. 2016

Information to current issue
Volume: 2
No.: 2
Year: 2016
Publication date: October 25, 2016

Obsah

Content

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 2, p. 1 – 6
ISSN 2453-6083

O metóde zavedenia pomocného prvku

The Method of Implementation of Auxiliary Element

Peter Vrábel [*a]

Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,

Received 21 September 2016; received in revised form 7 October 2016; accepted 10 October 2016

Abstract

The mathematical technique *implementation of auxiliary element* is the frequently used method on problems solving and on an executing of various mathematical proofs. It is useful to establish besides given magnitudes suitable helpful mathematical objects. We can achieve to resolution of a problem by these objects. The applications of this technique are analysed in various mathematical branches in the submitted contribution. The effectiveness of the method in question is illustrated via solutions of several miscellaneous mathematical problems.

Keywords: mathematical technique, implementation of auxiliary element, mathematical problem

Classification: 00A35; 97C50; 97D50

Úvod

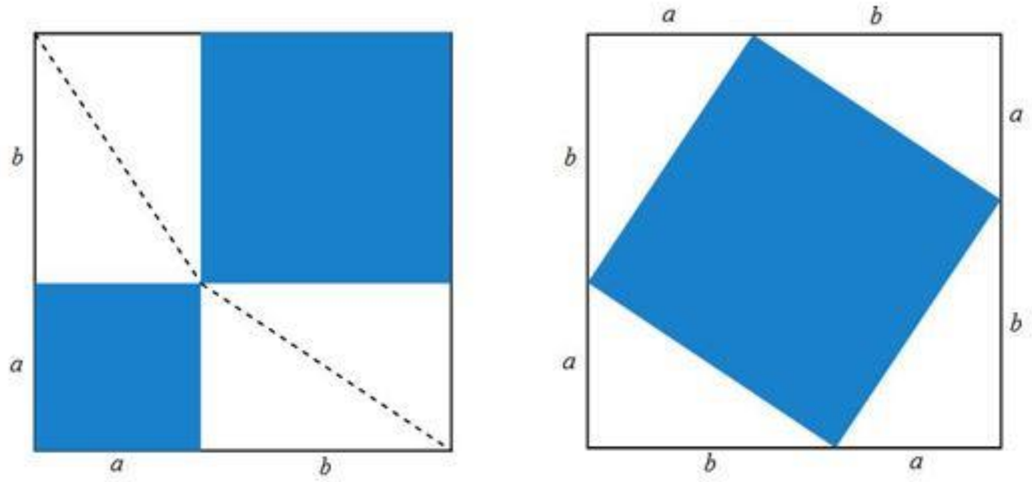
Skúsený riešiteľ matematických problémov pracuje obyčajne v niekoľkých rôznych úrovniach, ktoré sú určené použitím matematických metód s rôznou šírkou aplikácie. Takto matematické metódy môžeme rozdeliť podľa ich všeobecnosti, podľa šírky záberu ich použitia. Tie najvšeobecnejšie sa zvyknú nazývať *matematické stratégie*, tie špecializovanejšie *matematické techniky* (Zeitz [7] 1999; Kopka [1] 2004; Vrábel [4] 2005). V priebehu riešenia úlohy obyčajne treba uvažovať aj sústredené postupy a triky použiteľné iba v špecifických situáciách, ktoré sa často nazývajú *matematické nástroje*. K matematickým technikám patrí metóda *zavedenia pomocného prvku*, ktorej použitie budeme v tomto článku analyzovať.

Metóda zavedenia pomocného prvku

Pri riešení úloh je často užitočné okrem daných veličín zaviesť pomocné matematické objekty, prostredníctvom ktorých potom dospejeme k vyriešeniu týchto problémov. Istým spôsobom s touto technikou súvisia matematické techniky *extremálny princíp* a *zaveď funkciu* (Vrábel [5], [6] 2011). V tej najjednoduchšej podobe pomocného prvku možno hovoriť pri matematickom nástroji *zjednodušenie a substitúcia*, ktorý je dobre známy predovšetkým pri riešení rôznych typov rovníc a nerovníc, či zo základov matematickej analýzy. Typické príklady pre používanie pomocných prvkov poskytuje geometria. Napríklad jeden z viacerých známych dôkazov Pytagorovej vety využíva pomocný matematický objekt štvorec s dĺžkou strany $a+b$, kde a, b označujú veľkosti odvesien pravouhlého trojuholníka.

*Corresponding author; email: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.2.1-6

Štvorec *M* so stranou $a + b$ „rozrežeme" dvomi spôsobmi. V prvom prípade v náprotivných rohoch štvorca umiestnime štvorce so stranami *a* resp. *b*. Takto sa štvorec *M* rozpadá na dva štvorce so stranami *a* resp. *b* a dva obdĺžniky so stranami *a*, *b* (štyri pravouhlé trojuholníky s odvesnami *a*, *b*). V druhom prípade rozdelíme každú stranu štvorca *M* na úsečky dĺžky *a*, *b* tak, že pri pohybe po stranách štvorca sa dĺžky *a*, *b* striedajú (obr. 1). Takto sa štvorec *M* rozpadá na štyri pravouhlé trojuholníky s odvesnami *a*, *b* a štvorec so stranou *c*.



Obrázok 1

Aplikácie techniky *zavedenie pomocného prvku* pri riešení problémových úloh

Problém 1. Ktoré z čísel $\frac{55\ldots53}{55\ldots57}$, $\frac{66\ldots64}{66\ldots69}$ je väčšie (vo všetkých uvedených zápisoch čísel sa číslice 5, 6 nachádzajú n -krát, $n \in \mathbb{N}$).

Riešenie. Položme $a = \underbrace{11\ldots1}_{(n+1)-\text{krát}}$. Potom porovnávané čísla sú tvaru $\frac{5a-2}{5a+2}, \frac{6a-2}{6a+3}$. Keďže $a > 2$, tak platí:

$$(5a-2)(6a+3) = 30a^2 + 3a - 6 > 30a^2 + 2a - 4 = (6a-2)(5a+2).$$

Takto teda číslo $\frac{55\ldots53}{55\ldots57}$ je väčšie ako číslo $\frac{66\ldots64}{66\ldots69}$.

Problém 2. (Newtonova úloha). Tráva na celej lúke rastie rovnako čo do výšky i hustoty. Vieme, že 60 kráv by spáslo všetku trávu za 24 dní a 30 kráv za 60 dní. Koľko kráv by spáslo všetku trávu za 100 dní?

Riešenie. Zavedieme pomocný prvok – *porciou* nazveme také množstvo trávy, ktoré spasie krava za jeden deň. Predpokladáme pritom, že všetky kravy spasú za deň približne rovnakú porciu. Potom na konci 24-ho dňa 60 kráv spáslo $1440 = 60 \cdot 24$ porcií trávy a na konci 60-ho dňa 30 kráv spáslo $1800 = 30 \cdot 60$ porcií trávy. To znamená, že za 36 dní dorástlo na lúke $360 = 1800 - 1440$ porcií trávy, teda 10 porcií za jeden deň. Odtiaľ vyplýva, že na začiatku spásania bolo na lúke $1200 = 1440 - 24 \cdot 10$ porcií trávy. Preto na konci stého dňa treba spásť $2200 = 1200 + 100 \cdot 10$ porcií trávy. Takto hľadaný počet kráv sa rovná $22 = 2200 : 100$.

Problém 3. Zjednodušte súčin

$$S = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdot\dots\cdot\left(1+a^{2^n}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Riešenie. Zaveďme pomocný prvok $1-a$. Prvok $1-a$ nazveme aj *katalyzátorom.* Platí totiž:

$$(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdot\cdots\cdot\left(1+a^{2^n}\right)$$
$$=(1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)\cdot\cdots\cdot\left(1+a^{2^n}\right)$$
$$=(1-a^4(1+a^4)\cdot\cdots\cdot\left(1+a^{2^n}\right)=\cdots=1-a^{2^{n+1}}.$$

Teda

$$S=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} \text{ pre } a\neq 1.$$

Ak $a=1$, tak $S=2^n$.

Problém 4. Zistite, či existuje taká funkcia $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, aby pre každé prirodzené číslo $n>1$ platila rovnosť

$$f(n)=f\big(f(n-1)\big)+f\big(f(n+1)\big)$$

Riešenie. Dokážeme nepriamo, že taká funkcia f neexistuje. Nech by taká funkcia existovala. Každá neprázdna podmnožina množiny $\mathbb{N}$ má najmenší prvok. Vezmime za pomocný objekt najmenší prvok množiny $\{f(n); n>1\}$, ktorý sa rovná prvku $f(m)$ pre nejaké $m>1$. Zrejme $f(n)\geq 2$ pre každé $n>1$. Potom pre prirodzené číslo m by muselo platiť

$$f(m)=f\big(f(m-1)\big)+f\big(f(m+1)\big)\geq 1+f(m),$$

čo je spor.

Problém 5. Dokážte, že ak číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konverguje, tak aj rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje.

Riešenie. Ako pomocný matematický objekt uvažujme tzv. *kladnú* (a^+) a *zápornú* (a^-) *časť* reálneho čísla a, ktorú definujme takto:

$$\text{ak } a\geq 0, \text{ tak } a^+=a,\ a^-=0; \text{ ak } a<0, \text{ tak } a^+=0,\ a^-=-a.$$

Ľahko nahliadneme, že pre každé reálne číslo a platí:

$$0\leq a^+\leq |a|,\ 0\leq a^-\leq |a|,\ a=a^+-a^-.$$

Nech $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je ľubovoľný rad, pre ktorý platí, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konverguje. Pre každé prirodzené číslo n platí

$$0\leq a_n^+\leq |a_n|,\ 0\leq a_n^-\leq |a_n|,\ a_n=a_n^+-a_n^-.$$

Z porovnávacieho kritéria vyplýva, že rady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ konvergujú. Potom konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, pretože je rozdielom dvoch konvergentných radov.

Poznámka. Tvrdenie v probléme 5 sa obyčajne dokazuje pomocou *Cauchy-Bolzanovho kritéria konvergencie radu.*

Často je hľadaným pomocným objektom vhodná funkcia.

Problém 6. Nájdite prvočíselný rozklad čísla $A=989\cdot 1001\cdot 1007+320$.

Riešenie. Čísla $989, 1001, 1007$ sú síce zložené, ale sú nesúdeliteľné s číslom 320, pretože $320=2^6\cdot 5$ a žiadne z uvedených troch čísel nie je deliteľné dvomi ani piatimi. Takto v skúmanom súčte *A* nemožno elementárne vybrať nejaké činitele. Môžeme však experimentálne uvažovať, že číslo *A* dostaneme ako hodnotu vhodnej funkcie tvaru

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

v nejakom celom čísle, pričom aj a, b, c sú nejaké celé čísla. Všimnime si, že pre takúto funkciu *f* platí:

$$f(x) + f(-x) = (x-a)(x-b)(x-c) - (x+a)(x+b)(x+c)$$
$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc - x^3 - (a+b+c)x^2 - (ab+ac+bc)x$$
$$-abc = -2(a+b+c)x^2 - 2abc = -2(a+b+c)x^2 + 2f(0).$$

Ak a, b, c zvolíme tak, aby $a+b+c=0$, dostaneme rovnosť

$$f(x) - 2f(0) = -f(-x).$$

Potrebujeme zistiť, či za uvedeného predpokladu existuje celé číslo *d* tak, aby

$$f(d) = 989 \cdot 1001 \cdot 1007 \;\text{ a }\; -2f(0) = 320.$$

Riešme preto sústavu rovníc:

$$x - a = 989,\; x - b = 1001,\; x - c = 1007,\; a+b+c=0.$$

Sčítaním prvých troch rovníc dostaneme $3x - (a+b+c) = 3x = 2997$, teda $x = 999$. Odtiaľ vyplýva, že $a = 10$, $b = -2$, $c = -8$. Teda

$$f(x) = (x-10)(x+2)(x+8)$$

a navyše $-2f(0) = -2 \cdot (-10) \cdot 2 \cdot 8 = 320$. Takto platí:

$$f(999) - 2f(0) = 989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320 = -f(-999) = 1009 \cdot 997 \cdot 991.$$

Ľahko nahliadneme, že čísla 991, 997, 1009 sú prvočísla, pretože žiadne z prvočísel

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

$\left(\sqrt{1009} < 33\right)$ nedelí žiadne z týchto čísel. Takto prvočíselný rozklad čísla *A* sa rovná súčinu $991 \cdot 997 \cdot 1009$.

Problém 7. Nech konečná množina A má n prvkov. Dokážte, že množina $P(A)$ všetkých podmnožín množiny A má 2^n prvkov.

Riešenie. Nech $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Ako pomocné objekty uvažujme n-členné postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^n$, pričom $x_k \in \{0,1\}$ pre každé $k \in \{1,2,\dots,n\}$. Množinu všetkých takýchto postupností označme symbolom B. Množina B má zrejme 2^n prvkov, čo vyplýva z kombinatorického pravidla o súčine, pretože v postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^n$ pre každý jej člen máme dve možnosti. Stačí teraz už len dokázať, že množiny B a $P(A)$ majú rovnaký počet prvkov. Dokážeme, že zobrazenie

$$f: B \to P(A), x = \{x_k\}_{k=1}^n \mapsto A_x = \{a_k \in A; x_k = 1\}$$

je bijekcia.

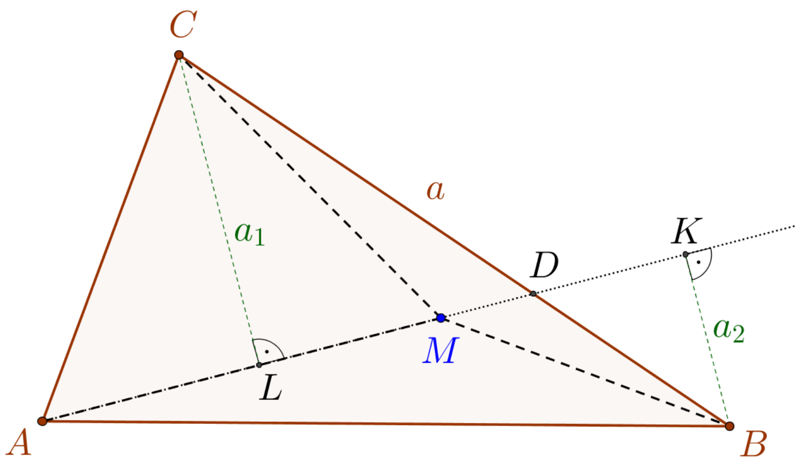
Ak $x = \{x_k\}_{k=1}^n, y = \{y_k\}_{k=1}^n$ sú dve rôzne postupnosti z množiny B, tak existuje $k_0 \in \{1,2,\dots,n\}$ tak, že $x_{k_0} \neq y_{k_0}$. Potom a_{k_0} patrí práve do jednej z množín A_x, A_y, teda $f(x) \neq f(y)$ a *f* je injekcia. Nech $X \in P(A)$. Označme pravdivostnú hodnotu výroku $a_k \in X$ symbolom x_k, $k = 1,2,\dots,n$. Potom $\{x_k\}_{k=1}^n \in B$ a zrejme $f(\{x_k\}_{k=1}^n) = X$, teda f je aj surjekcia.

Poznámka. Úlohu v probléme 6 možno riešiť pravda aj inak. Jeden spôsob využíva matematickú indukciu. Druhý spôsob spočíva v rozklade množiny $P(A)$ na systémy podmnožín množiny A s pevným počtom prvkov a využití kombinatorickej rovnosti $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$.

Problém 8. Vnútri trojuholníka ABC zvoľme bod M. Označme vzdialenosť bodu M od vrcholov A, B, C po rade $m_a,\ m_b,\ m_c$ a vzdialenosť bodu M od strán BC, CA, AB po rade d_a, d_b, d_c. Dokážte, že

$$am_a \geq bd_b + cd_c.$$

Riešenie. Veďme bodmi B a C kolmice BK a CL na priamku AM, $K(L)$ leží na priamke AM. Označme $|CL| = a_1$, $|BK| = a_2$ (obr. 2) a priesečník priamky AM so stranou BC ako bod D.



Obrázok 2

Z pravouhlých trojuholníkov DCL, DBK vyplýva, že

$$a_1 + a_2 \leq |BD| + |DC| = a.$$

Pomocnými („prechodovými“) prvkami budú obsahy trojuholníkov AMC, ABM. Platí totiž:

$$\tfrac{1}{2}bd_b + \tfrac{1}{2}cd_c = P_{\Delta AMC} + P_{\Delta ABM} = \tfrac{1}{2}a_1m_a + \tfrac{1}{2}a_2m_a \leq \tfrac{1}{2}am_a.$$

Záver

Matematickú techniku *zavedenie pomocného prvku* možno použiť v každej matematickej disciplíne, či už pri riešení problémových úloh alebo v dôkazoch rôznych tvrdení. Na objavenie vhodného pomocného objektu, ktorý je kľúčom k riešeniu daného problému, však neexistuje všeobecný návod alebo priama cesta. Okrem znalosti základov riešenej problematiky je potrebná invencia a schopnosť kreatívneho myslenia.

Literatúra

[1] Kopka, J. 2004. *Výzkumný přístup při výuce matematiky.* Ústí nad Labem: Acta Universitatis Purkynianae 101, 2004, ISBN 80-7044-604-8.

[2] Polya, G. 1948. *How to Solve it.* New Jersey: Princeton, 1948.

[3] Polya, G. 1954. *Mathematics and Plausible Reasoning.* New Jersey: Princeton, Volume 1,1954.

[4] Vrábel, P. 2005. *Heuristika a metodológia matematiky.* Nitra: FPV UKF, Edícia prírodovedec č. 165, 2005, ISBN 80-8050-840-2.

[5] Vrábel, P. 2011. *Symetria.* In: Obzory matematiky, fyziky a informatiky 2/2011 (40), 9-15. Nitra, ISSN 1335-4981.

[6] Vrábel, P. 2011. *Zaveď funkciu.* In: Obzory matematiky, fyziky a informatiky 3/2011 (40), 15-19. Nitra, ISSN 1335-4981.

[7] Zeitz, P. 1999. *The Art and Craft of Problem Solving.* New York: John Wiley and Sons, 1999, ISBN 0-471-13571-2.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 2, p. 7 – 18
ISSN 2453-6083

Reforma matematického vzdelávania na Slovensku a niekoľko poučení z histórie

The Reform of Mathematical Education in Slovakia and a few Lessons to be Drawn from History

Jozef Fulier[a]

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 30 September 2016; received in revised form 2 October 2016; accepted 3 October 2016

Abstract

In this article we deal with some consequences of the reform of mathematical education (2008) in the Slovak Republic. We argue that the answers to some of the myths associated with education in mathematics can be also found in the history and historical documents, such as the two most famous legends of Euclid of Alexandria. Many educational experiments are modeled on the "treatment A versus treatment B" model used in agricultural or medical research. It is undoubtedly interesting that quite a precise description of this method can be found even in the Old Testament, which is probably the oldest known written description of this method

Keywords: reform of mathematical education, history of mathematics Euclid of Alexandria, Old Testament

Classification: A30, B20, D30, E10

Úvod

V článku chceme upozorniť na niektoré paradoxy, resp. mýty, ktoré sú v súvislosti s reformou školstva a vzdelávania v Slovenskej republike z roku 2008 rozšírené nielen v laickej verejnosti (vrátane žiakov našich škôl), ale bohužiaľ aj vo verejnosti odbornej. Samozrejme nechceme sa vyjadriť k celej reforme vzdelávania, ale iba jej parciálnej časti, k matematickému vzdelávaniu.

K zhodnoteniu situácie okolo reformy matematického vzdelávania nám možno pomôže ľahké obzretie sa do histórie, pretože stále je v platnosti citát (pre niekoho príliš vznešený či otrepaný):

„História je svedectvom času, svetlom pravdy, živou pamäťou, učiteľka života a poslom minulosti.“†

Autorom tohto citátu je známy rímsky filozof a politik *Marcus Tullius Cicero* (106 – 43 pred Kr.). K tomu, aby sme hneď na úvod naznačili smer našich konštatovaní a argumentov, pomôžeme si ďalším múdrym citátom od toho istého autora:

„Je ľudské mýliť sa, ale bláznovstvom je v omyle zotrvávať.“

*Corresponding author; email: jfulier@ukf.sk

† Historia est testis temporum, lux veritas, vita memoriae, magistra vitae, nuntia velustatis.

DOI: 10.17846/AMN.2016.2.2.7-18

1 Reforma matematického vzdelávania v SR a niekoľko s ňou spojených paradoxov

V posledných dvadsiatych či dokonca až tridsiatych rokoch bola s nemalou dávkou naliehavosti diskutovaná potreba zmeny nášho školstva, o nevyhnutnosti jeho humanizácie, humanizácie vzdelávania žiakov našich základných a stredných škôl, so zaujímavým a v podstate výhradným akcentom na oblasť prírodovedných, technických a aplikovaných odborných predmetov, vrátane matematiky. Na prelome tisícročia našli tieto snahy v Slovenskej republike (vzhľadom na spoločnú históriu to bolo podobné i v Českej republike) vyjadrenie v obsahovo zaujímavých školských dokumentoch.* V tomto období bol považovaný za jeden z hlavných cieľov pripravovanej reformy školstva v SR premena tradičnej výchovy a vzdelávania na *tvorivo - humánnu výchovu a vzdelávanie*. Samotný princíp humanizácie výchovy a vzdelávania bol chápaný ako orientácia na osobnosť vzdelávajúceho sa ako ľudskej individuality s právom na vlastné rozhodovanie, vlastný rozvoj v zmysle princípov humanizmu. Iste nikoho neprekvapovalo, že sa nenašiel temer nikto z odbornej verejnosti, kto by s humanizáciou vzdelávania nesúhlasil. Problémy sa začali prejavovať v konkrétnom prepojení oných vznešených a všeobecne prijímaných princípov s realitou každodenného života, v ktorom malo dochádzať k ich naplneniu. Prvé varovné signály sa začali objavovať, keď pod rúškom *humanizácie vzdelávania* sa začali objavovať ***vedomé či podvedomé snahy o obmedzenie až likvidáciu prírodovedného a matematického vzdelávania*** nielen na základných, stredných, ale aj vysokých školách najmä technického zamerania.

V oblasti vzdelávania v školskej matematike (t.j. matematike na základnej a strednej škole) sa obavy odbornej verejnosti skutočne naplnili v ***reforme vzdelávania schválenej v roku 2008***. Svedčia o tom jedny z kľúčových indikátorov, ktorými sú bezpochyby *počty povinných hodín v učebných plánoch* z matematiky na základnej škole a na gymnáziách (pozri *Tabuľku* 1). Došlo totiž k významnému poklesu počtu povinných hodín (o viac ako 21,4 % v porovnaní s obdobím pred spomínanou reformou v roku 2008), ktorý v súčasnosti veľmi negatívne ovplyvňuje úroveň matematického vzdelávania v SR.

Stupeň vzdelávania	***Počty povinných hodín (rámcový učebný plán) z matematiky***	
	Stav pred rokom 2008	**Stav v rokoch 2015 - 2016**
Základná škola, 1. - 4. ročník (ISCED 1)	**19**	**14**
Základná škola, 5. - 9. ročník (ISCED 2)	**23**	**19**
Gymnázium (ISCED 3A)	**14**	**11**
Základná škola a gymnázium spolu	**56**	**44 (78,58 %)**

Tabuľka 1

Je pritom skutočne pozoruhodné, ba až **paradoxné**, že základným spúšťacím mechanizmom pre reformu matematického vzdelávania v SR v roku 2008 sa stali požiadavky *Európskeho parlamentu* pre zakomponovanie jej *odporúčaní* do nášho vzdelávacieho systému (zavedenie

* *Milénium - Koncepcie rozvoja výchovy a vzdelávania v Slovenskej republike na najbližších 15 – 20 rokov* (autori: Rosa, V. – Turek, I. - Zelina, M. , 2001) a *Národný program výchovy a vzdelávania v Slovenskej republike.*

novej štruktúry vo forme ISCED klasifikácie), pričom potreba tejto reformy pre vzdelávanie v matematike bola pravidelne zdôvodňovaná **neuspokojivými výsledkami testovania *OECD PISA*** [*] v tzv. *matematickej gramotnosti* žiakov SR v rokoch 2003 a 2006. Ak však liekom na *tieto **neuspokojivé výsledky testovania PISA OECD*** malo byť ***zníženie počtu hodín v predmete matematike*** - toto je totiž jediný reálny a hmatateľný výsledok spomínanej reformy *pre matematiku* – tak toto opatrenie je možné považovať za skutočne **nevysvetliteľný paradox**.

Tým nechceme povedať, že reforma z roku 2008 nepriniesla ako celok aj pozitíva, avšak naplnenie reformy malo pre vyučovací predmet ***matematika,*** *na rozvoj matematického myslenia našich žiakov na základných a stredných školách,* [†] ***zničujúci vplyv***. Koniec – koncov potvrdili to výsledky testovania ***OECD PISA v matematike v roku 2012***, ktoré napriek tomu, že učitelia a ich žiaci už boli na špecifiká tohto testovania aspoň z časti pripravení, *dopadli v tomto testovaní **ešte horšie** ako v predchádzajúcich testovaniach‡.* V roku 2012 sa Slovensko v matematike prvýkrát od roku 2003 výraznejšie prepadlo pod priemer krajín OECD. Vo všetkých oblastiach sa Slovensko oproti poslednému testovaniu zhoršilo najviac z krajín V4 (pozri https://www.minedu.sk/data/att/6077.pdf). *Toto si určite začal uvedomovať aj bývalý minister* Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR (MŠVVaŠ) ***D. Čaplovič** (od marca 2012 do júla 2014), ktorý napriek tomu, že je svojou profesiou humanitne zameraný, začal na konci svojho pôsobenia na* MŠVVaŠ SR *otvorene hovoriť o potrebe zvýšenia počtu hodín matematiky, informatiky a prírodovedných predmetov na základnej a strednej škole, dokonca uvažoval* (*bohužiaľ iba vo verbálnej rovine*) *o opätovnom zavedení **povinnej maturity z matematiky*** na gymnáziách.[§] *Na tieto pozitívne a ústretové správy zareagovala aj stavovská organizácia slovenských matematikov a učiteľov matematiky **Slovenská matematická spoločnosť Jednoty slovenských matematikov a fyzikov*** (*SMS JSMF*), *ktorá prostredníctvom svojho výboru podporila túto snahu* MŠVVaŠ SR, *pričom navrhla realizáciu maturitnej skúšky z matematiky v dvoch úrovniach. Súčasne* Výbor SMS JSMF *dal na diskusiu a následne v máji 2014 ministrovi školstva odporučil, aby sa* v Štátnom vzdelávacom programe *zvýšil počet povinných hodín matematiky na ZŠ a SŠ na hodnoty uvedené v Tab. 2.*

Myslíme si, že argumentácia pre nevyhnutnosť zmeny obsahu vzdelávania v matematike v jednotlivých stupňoch ISCED, ktorú Výbor SMS JSMF pri kalkulácii počtu povinných hodín matematiky využil, je dostatočne presvedčivá a určite by sa mala akceptovať. Treba však priznať, že z formálneho hľadiska, z hľadiska povinných hodín matematiky, ide temer o návrat k stavu pred rokom 2008. Bohužiaľ, po odvolaní *D. Čaploviča* z ministerského postu sa o tomto návrhu úplne prestalo hovoriť, ako keby vôbec neexistoval. Nový minister MŠVVaŠ SR *P. Pellegrini* (od júla 2014 do novembra 2014) a ani jeho nasledovník *J. Draxler* (od novembra 2014 do marca 2016) sa s touto iniciatívou nestotožnili a celý proces zastavili, resp. prestali sa

---

[*] **OECD** z angl. *Organisation for Economic Co-operation and Development*, **PISA** z angl. *Programme for International Student Assessment*.

[†] Pod *strednou školou* budeme rozumieť hlavne *gymnázium*, príslušné závery však v primeranej miere platia aj pre *stredné odborné školy.*

‡*Je možné namietať, že z jedného prípadu robiť takéto závery nie je korektné. S tým sa iste dá súhlasiť. Ak* však chceme byť naozaj korektní a prihliadneme aj na ďalšie aspekty vzniknutej situácie vo vzdelávaní v matematike, tak je zrejmé, že neexistuje žiadny relevantný dôvod pre to, aby sa výsledky v testovaní OECD PISA trvalo zlepšili. Totiž redukcia alebo aj neuvážený presun učiva z matematiky z jedného ročníka do ročníka vyššieho, resp. do vyššieho stupňa vzdelávania, rozladil na niekoľko rokov systém školskej matematiky. Ilustrovať to možno na prípade Pytagorovej vety, ktorej výklad sa posunul do 9. ročníka, pričom výpočet objemov a povrchov telies zostal na „starom" mieste. Ak však učitelia chceli žiakom zadať štandardné úlohy pre určenie objemov či povrchov telies, ktoré sa bežne riešili pred reformou, s hrôzou zistili, že väčšina netriviálnych úloh predpokladá znalosť *Pytagorovej vety*. Samozrejme, vzhľadom na to, že išlo iba o presun učiva, je táto komplikácia pomerne ľahko odstrániteľná. Avšak v prípade, že sa príslušný tematicky celok úplne vynechal z obsahu matematiky, tak situácia sa stáva oveľa zložitejšou.

[§] Poznamenajme, že *povinná maturita z matematiky* nie je nejaký „socialistický výmysel", ale dlhodobo sa úspešne uplatňuje vo viacerých vyspelých západných krajinách, napríklad vo *Francúzsku*.

tomuto problému venovať. Možno na niektoré veci (napríklad opätovné zavedenie povinnej maturity z matematiky na gymnáziu) naozaj ešte nedozrel čas* a pravdepodobne spoločnosť

Stupeň vzdelávania	***Počty povinných hodín z matematiky** (návrh SMS z roku 2014)*
Základná škola, 1. - 4. ročník (ISCED 1)	**16**
Základná škola, 5. - 9. ročník (ISCED 2)	**22**
Gymnázium (ISCED 3A)	**15**
Základná škola a gymnázium spolu	**53**

Tabuľka 2. Návrh SMS JSMF pre počty povinných hodín v rámcových učebných plánov pre predmet matematika

v SR musí najprv tvrdšie pocítiť to, že bez dobrých prírodovedcov (fyzikov, chemikov a pod.), technikov, ekonómov, informatikov a matematikov je skutočne ohrozená budúcnosť a prosperita spoločnosti na Slovensku. Zostáva iba dúfať, že nový, v **poradí už 18. minister** MŠVVaŠ SR od roka 1989, *P. Plavčan* (od marca 2016), ktorý sľubuje jednu z najväčších reforiem školstva a vzdelávania (?), sa aspoň pokúsi zmeniť túto nepriaznivú situáciu. V tomto želaní je skrytý **ďalší paradox:** matematici a učitelia matematiky žiadajú reformu, ktorá by vyučovanie matematiky na základných a stredných školách vrátila (aspoň z pohľadu počtu povinných hodín v učebných plánoch z matematiky na základnej škole a na gymnáziách) do čias pred reformou 2008 a v súvislosti s maturitou z matematiky gymnáziách dokonca až do čias ministra *M. Ftáčnika* (od októbra 1998 do apríla 2002). Toto naozaj vyzerá na **dokonalé spiatočníctvo**.

2 Niektoré mýty spojené so vzdelávaním v matematike a Euklides z Alexandrie

Doterajší vývoj naznačuje, že proces demokratizácie školstva a vzdelávania v SR po roku 1989 je z hľadiska vyučovacieho predmetu matematika bezprostredne spájaný (a nie vždy celkom oprávnene) s tzv. *humanistickým vzdelávaním,* resp. s *humanizáciou vzdelávania v matematike*†. V tejto súvislosti je vhodné poznamenať, že tendencie k humanistickému matematickému vzdelávaniu nie sú iba česko-slovenským špecifikom, pretože humanistickému matematickému vzdelávaniu je venovaná veľká pozornosť aj v ďalších krajinách a tento termín v odborných kruhoch má pomerne presný obsah. V našich podmienkach sa však toto slovné spojenie (*humanizácia - matematika - vyučovanie*) stalo, aj keď určite nie jediným, zdrojom zaujímavých **mýtov**, ktoré sú časťou laickej verejnosti.

Pre slovo **„mýtus“** existuje rad slovníkových definícií, ale pre náš účel najlepšie vyhovuje vymedzenie uvedené v *American Heritage Dictionary* (2000): Mýtus je *"populárne (ale nepravdivé) presvedčenie alebo príbeh, ktorý je spojený s osobou, inštitúciou alebo výskytom“ alebo „fikcia alebo polovičná pravda, najmä taká, ktorá je súčasťou ideológie“*.

Väčšina mýtov, ktoré uvedieme, sú bežne zastávané názory, ktoré sú v ostrom rozpore s pedagogickými výskumami. V našom prípade spravidla pôjde o polopravdy či prehnané

---

* Mimochodom, ak by sa exministrovi *Čaplovičovi* podarilo zaviesť povinnú maturitu z matematiky, vznikla by zaujímavá situácia: minister – *historik D. Čaplovič, teda človek* humanitne zameraný a ktorý sa priznal, že matematika mu veľmi „nešla“, by opätovne zaviedol *povinnú maturitu z matematiky na gymnáziu*, ktorú zrušil minister - *informatik a matematik M. Ftáčnik,* ktorý má výborné matematické vzdelanie a teda aj veľmi blízky vzťah k matematike.

† Treba priznať, že časť verejnosti laickej, ale i odbornej verejnosti vníma slovné spojenie „*humanistické vzdelávanie v matematike*“ ako *oxymoron*, (t. j. slovnú ozdobu toho istého druhu ako je spojenie „živá mŕtvola“ či „polnočný denník*“).*

alebo skreslené tvrdenia, ktoré obsahujú zrnko pravdy. Väčšina mýtov pôsobí často veľmi podmanivo a vierohodne a sú preto o to nebezpečnejšie.

Ako už poznamenal pedagóg špecializujúci sa na vedu *D. Hammer* (1996), *vedecké mýty* majú štyri hlavné vlastnosti:

(1) *sú to stabilné a často neotrasiteľné presvedčenia o svete,*

(2) *sú v rozpore s presvedčivými dôkazmi,*

(3) *ovplyvňujú, ako ľudia rozumejú svetu,*

(4) *aby sme dosiahli presných znalosti, je potrebné ich opravovať.*

Uveďme niekoľko najfrekventovanejších mýtov o vyučovaní a učení v matematike s ktorými sa stretávame v súčasnej škole, avšak ich výskyt je oveľa starší, čo napokon len potvrdzuje prvú vlastnosť mýtov, t.j. ich trvácnosť a neotrasiteľnosť.

Mýtus 1.: *Na základnej a strednej škole by sa mala učiť len taká matematika, ktorú budú žiaci bezprostredne potrebovať v každodennom bežnom živote, najlepšie v každodennej praxi. Všetko to, čo túto požiadavku nespĺňa, resp. prekračuje (rozličné fiktívne myšlienkové úvahy a konštrukcie, ktoré nemajú so skutočným životom nič spoločné) je potrebné z osnov a obsahu školskej matematiky definitívne vylúčiť.*

Mýtus 2.: *Matematiku je možné naučiť sa bez námahy, radostne a hravo. Žiak či študent pri učení sa matematike nepotrebuje vyvíjať temer žiadne úsilie pre zapamätanie faktov teórie* (*vzorce či tzv. poučky*). *Nie je potrebné, aby si žiak pamätal nejaké postupy, metódy, či súvislosti medzi nimi.*

Mýtus 3.: *Ak sa nedarí mýty 2 a 3 uskutočňovať, sú za to zodpovední zle vyškolení učitelia matematiky, resp. zlyháva škola ako celok.*

Mýtus 1 sa v zaujímavej skratkovitej podobe objavuje v podaní *žiackeho stavu* a to nezávisle od *plynúceho času*, resp. *od geografického miesta*, pri „preberaní“ matematického učiva, ktorého náročnosť či zložitosť presiahne istú hranicu. Táto hranica spravidla prirodzene závisí od vyspelosti a kvality konkrétneho žiackeho osadenstva. Prítomnosť tohto mýtu je ľahko identifikovateľná, keďže je sprevádzaná legendárnou *žiackou rečníckou* otázkou: ***Na čo mi to bude?*** Zdôraznenie faktu, že ide o skutočne ***rečnícku*** *otázku,* je dosť dôležitý. Väčšina žiakov totiž nie je vôbec zvedavá na dôvody, prečo by si mali osvojiť akýsi súbor vzájomne zložitejšie prepojených faktov. Situácia sa pre žiaka stane úplne „jasnou“, ak pri zdôvodňovaní potreby príslušného poznatku pre daného žiaka (či skupinu žiakov) samotného učiteľa matematiky nenapadne lepšia odpoveď, len to, že „žiakovi pomôže pochopiť ešte komplikovanejší súbor zložitejších faktov (teórií) či procedúr“. Takéto niečo samozrejme žiaka presvedčiť nemôže. Jednoducho žiak je skalopevne presvedčený, že on takú zložitosť nepotrebuje poznať, nikdy ju potrebovať nebude, a že on sa s takým niečím v živote určite ani nestretne. Pravdou je, že ak žiak myslí len na konkrétne situácie každodenného života, tak s ním treba často súhlasiť. Veď je skutočne veľmi ojedinelé, ak nie nemožné, aby žiak v bežnom živote nevyhnutne naozaj potreboval nájsť napríklad korene nejakej kvadratickej rovnice. Ak sa zamyslíme, nad tým, čo vlastne potrebujeme vedieť z matematiky v prostredí našich domácností a bežnej komunikácii medzi ľuďmi, tak naozaj toho veľa nepotrebujeme. Vystačíme so znalosťami obmedzenými na *elementárne aritmetické operácie* (sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie čísel) a na jednoduché geometrické konštrukcie. Naviac v dnešnej dobe, dobe kalkulačiek, smartfónov netreba vedieť ani malú násobilku, ako nám niektorí žiaci dokazujú. Ak sa žiak stretne s problémom, riešenie ktorého si vyžaduje čosi viac, tak to vraj tiež nie je veľký problém, veď máme internet a tam nájdeme všetko (!?). Akceptovaním tohto mýtu je problematické zdôvodniť, prečo by sa mala učiť matematika aj na druhom stupni základnej školy či na strednej škole, prečo by sa mal mladý človek v rámci svojej povinnej školskej dochádzky naučiť logicky myslieť a exaktne zdôvodňovať svoje myšlienkové závery, prečo by mal žiak získať poznatky a spôsobilosti pre riešenie zložitejších situácií a problémov, ktoré presahujú problémy každodenného zhonu našich domácností, či manuálne zručnosti a návyky potrebné pre opatrovateľské služby pre rakúskych či nemeckých dôchodcov, či pri práci na montážnych linkách našich fabrík. V týchto prípadoch sú oveľa dôležitejšie manuálne zručnosti a znalosti cudzích jazykov).*

Jednoducho povedané, pri výučbe matematiky sa určite nemôžeme obmedziť iba na súbor elementárnych faktov a postupov. Totiž, okrem rozvoja elementárneho logického myslenia žiaka základnej školy, je potrebné preriešením príslušného spektra precvičovacích úloh upevňovať získané poznatky v hlavách žiakov a toto nie možné bez zapamätania si kľúčových faktov (napr. aj vzorcov) a základných metód, postupov či procedúr. K tomu, aby žiaci zažili pocit úspechu aj v tejto práci **je potrebné** príslušnú *netriviálnu činnosť veľakrát opakovať a zažiť niekedy aj veľa nezdarov* (rovnako, ako keď sme sa učili bicyklovať či plávať – ak by sme sa vzdali po piatich či desiatich nezdarených pokusoch, tak asi málo z nás by sa naučilo týmto činnostiam). Skutočnosť, že učenie sa matematike má pre žiakov zmysel, dokazuje učiteľ spravidla prostredníctvom aplikácií (najlepšie v situáciách z bežného života, ale aj aplikáciách pokročilejšieho charakteru, ktoré často súvisia s predmetmi a užitočnými nástrojmi dnešného života - tabletmi, počítačmi a mobilmi) a samozrejme aj tým, že demonštruje pred svojimi žiakmi ozajstnú hĺbku, neobyčajnú krásu, eleganciu, vnútornú konzistentnosť a jednotu matematiky (primerane pre tú úroveň matematiky, ktorú vyučuje vo svojej triede). K tomu však iba elementárne poznatky z matematiky nestačia. Ako je konštatované v práci (Bečvář, 2010), je potrebné ukazovať jednak bezprostrednú použiteľnosť matematiky a tiež jej

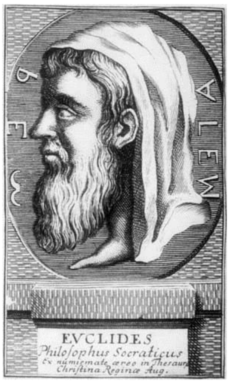
* Prirodzene situácia sa môže zdanlivo zmeniť, ak sa žiak rozhodne úspešne skončiť strednú školu a hodlá v blízkej budúcnosti vyštudovať vysokú školu technického či prírodovedného zamerania. To je však niektorými žiakmi a študentmi často chápané iba ako účelová vec, ktorej sa musia prispôsobiť, pokiaľ chcú v živote niečo dosiahnuť.

užitočnosť pre rozvoj myslenia a celkové pochopenie sveta, ktorý nás obklopuje. K väčšej obľube matematiky, a to na všetkých typoch a stupňoch škôl, môže viesť len hlbšie porozumenie podstaty matematických úvah a postupov, a dobré zvládnutie určitého objemu matematických poznatkov a zručností. Na všetkých úrovniach potrebujeme ukazovať poznatky, postupy a zákonitosti, ktoré už nie sú elementárne. Či už ide o vzťah trojčlenky a priamej a nepriamej úmernosti, o geometrickú interpretáciu vzorcov pre druhú a tretiu mocninu súčtu, resp. rozdielu dvoch veličín, o doplnenie kvadratického trojčlena na úplný štvorec, o dôkaz Pytagorovej vety, atď. Takýchto príkladov, ktorými môžeme motivovať svojich žiakov a študentov je možné samozrejme uviesť oveľa viac. Inak povedané: pre zdravé myslenie je nevyhnutná znalosť aj nemalého množstva poznatkov, ktorých úroveň presahuje elementárnu úroveň (tá je samozrejme rôzna, v závislosti od stupňa a typu navštevovanej školy), rovnako ako pre zdravú fyzickú existenciu je nevyhnutná znalosť základných hygienických návykov a zručností (tie tiež istým spôsobom závisia od veku a aj od pohlavia jedinca). K mýtu 1 sa ešte vrátime v jednej poznámke.

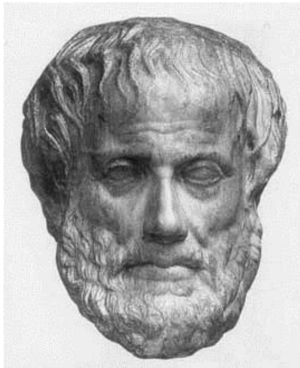
Mýtus 2 silne pripomína hľadanie *„kráľovskej cesty k matematike“, k*torej existenciu odmietli prostredníctvom legendárneho výroku ***Euklida z Alexandrie*** už antickí , resp. stredovekí učenci. Poznamenajme, že *Euklides z Alexandrie* žil približne v rokoch 325 až 265 pred Kr. v egyptskej Alexandrii za vlády *Ptolemaia I. Sotéra* (Sotér, slov. Spasiteľ).* Grécky filozof *Proklos* (412 - 487) uvádza legendu, podľa ktorej *Ptolemaios I.* položil *Euklidovi* otázku, *„či neexistuje kratšia cesta k porozumeniu geometrie, ktorú vyložil Euklides vo svojich Základoch*“. *Euklides* vraj na to stroho odpovedal, že *„Ku geometrii nevedie kráľovská cesta*“, čím mienil to, že k vedeniu, k vede a k matematike zvlášť, nevedie žiadna zvlášť uhladená a ľahká cesta. Čo sa týka aj v súčasnosti rozšíreného a frekventovaného (bohužiaľ i škodlivého) mýtu o tom, že procesy vzdelávania a učenia sa môžu byť pre vzdelávaný subjekt úplne oslobodené od ťažkostí, námahy a odriekania učiaceho sa, teda že táto činnosť sa môže stať bezvýhradne hrou prinášajúca iba *radosť, ľahkosť a bezstarostnosť*, spojenú iba s pozitívnymi emóciami, vyvracia v staroveku svojim výrokom tiež najväčší filozof Staroveku ***Aristoteles zo Stageiry*** (384 - 322 pred Kr.): *„Z vyučovania sa nemá robiť hra, lebo učenie nie je pre deti hrou. Je spojené s námahou a nutnosťou*.“ O dôležitosti usilovnosti učiaceho sa a nevyhnutnosti vyvíjať zmysluplný a netriviálny výkon aj v súčasnej škole sa výstižne vyjadril aj český publicista *V. Jamek* v práci O patřičnosti v jazyce (1998): *„Škola není místo, kde by dítě mělo získat co nejvíce vědomostí a přitom se pokud možno vůbec nenamáhat. Koncept škola hrou spíše žádá, aby škola využívala spontánní objevovací schopnosti dítěte a tak je k námaze motivovala, ne však, aby je veškeré námahy ušetřila. Škola bez námahy a píle není žádoucí: především ve škole*

* Vládca *Ptolemaios I. Sotér* (367 - 283 pred Kr.) bol pôvodne generálom *Alexandra Veľkého*, ktorý sa po jeho smrti stal vládcom Egypta a zakladateľom *Ptolemaiovskej dynastie*, ktorá vládla v Egypte v rokoch 323 až 30 pred Kr. Poslednou vládkyňou z tejto dynastie bola slávna *Kleopatra* (69 – 30 pred Kr.).

si dítě může vštípit základní kulturu úsilí, která je v naší civilizaci potřebná. Požadovat výkon – a to výkon smysluplný – je jednou ze základních funkcí školy.“ Je pritom zrejmé, že v matematike, vzhľadom na jej nároky na presnosť, rigoróznosť vo vyjadrovaní a v myslení, sa



Euklides z Alexandrie (325 - 265 pred Kr.)

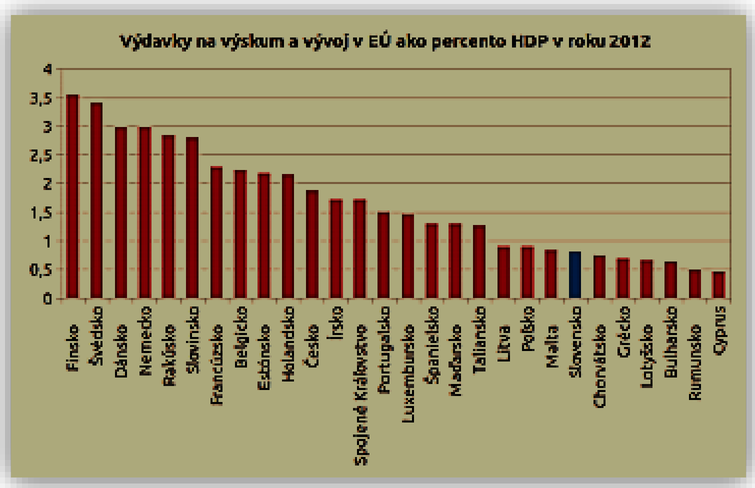


Aristoteles zo Stageiry (384 - 322 pred Kr.)

Obrázok 1*: (zdroj: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/)*

tieto rysy vzdelávania prejavujú najvypuklejšie. Toto prirodzene neznamená, že o hľadanie *„kráľovskej“ cesty k matematike sa nemáme vôbec snažiť.* Koniec - koncov je to aj jedna zo základných úloh *didaktiky matematiky*. Treba však mať stále na pamäti, že ***matematika je pre väčšinu žiakov a študentov „ťažká“ a bez ohľadu na snaženie ich učiteľov matematiky, ťažkou i zostane***.

Pre objektívnosť je treba uviesť aj ***druhú legendu,*** ktorá je spojená s menom ***Euklida z Alexandrie***. I keď z časti súvisí s prvým mýtom, avšak postihuje iný aspekt otázky *„Načo mi to bude*?“. Táto historka totiž zaznamenáva *Euklidovu* odpoveď žiakovi, ktorý sa ho spýtal: *„Aký budem mať úžitok z toho, ak sa naučím tieto teorémy?*“ Vtedy Euklides zavolal na svojho otroka a rozkázal mu: *„Daj mu obolos (vtedajšia drobná minca), lebo tento človek chce (musí) zarábať na všetkom, čo sa naučí.*“ V časoch socializmu táto historka slúžila (čo sa z času načas objavovalo aj niektorých v prácach vykladačoch marxistickej filozofie) ako dôkaz toho, že *Euklides* pohŕdal *aplikáciami matematiky* a považoval ich za čosi nečisté, nehodné povšimnutia. ***Avšak Euklides mal aj v tejto historke veľký kus pravdy***. V prvom rade je vhodné si uvedomiť, že matematika má špecifické postavenie medzi vedami a určite nie je prírodnou vedou (aj keď ju často, z istých historických či zvykových dôvodov, priraďujeme k prírodným vedám) a nie je ani vedou aplikovanou. Z tohto dôvodu je potrebné vystríhať pred prílišným zdôrazňovaním *užitočnosti matematiky* pri riešení praktických úloh, najmä v prípade, ak je tento pohľad iba *ekonomického charakteru*. Totiž z tohto pohľadu nedostatočne informovaní jedinci (nechceme použiť označenie nevzdelaní) vyvodzujú, že zložité abstraktné matematické konštrukcie a zdôvodnené závery, ktoré v danej chvíli nemajú priamu aplikácie v praxi, si nezasluhujú pozornosť a ani finančnú podporu. Ako trefne konštatoval významný český chemik *R. Záhradník*[*] *„pre ľudí so skromnou intelektuálnou výbavou je toto východiskovým bodom útokov na základný výskum, základné „bádateľstvo“, na „čistú“ vedu“* (*Záhradník*, 2010). Je nám ľúto, niektoré zámery MŠVVaŠ SR z októbra 2014 nám túto situáciu pripomenuli. Vtedy MŠVVaŠ SR chcelo zefektívňovaním a optimalizáciou transformovať vtedajšiu štruktúru SAV SR (spájaním ústavov a vytváraním väčších vedeckých centier) a hodlalo znížiť rozpočet SAV na rok 2015 temer o 17 %. Jednotlivé pracoviská SAV (vrátane ústavov rozvíjajúcich základný výskum) mali dokázať svoju životaschopnosť a právo na svoju existenciu tým, že ukážu, že sú schopné na seba zarobiť. Očakávalo sa vyššie zapojenie ústavov do medzinárodných projektov, zintenzívnenie spolupráce s podnikateľskou sférou a zvýšenie podielu súkromného sektoru na financovaní vedy. Tieto požiadavky sú akceptovateľné pri aplikovanom výskume, avšak pri základnom výskume, vrátane *základného výskumu v matematike* už narážame na celkom vážny problém. V tomto kontexte nám možno *druhá legenda o Euklidovi* už nebude pripadať až taká nezmyselná. My samozrejme nechceme upierať právo MŠVVaŠ SR reformovať takú veľkú inštitúciu akou je SAV SR, ale nemožno nebrať do úvahy aj argumenty druhej strany, teda



Obrázok 2: (zdroj: http://www.vedachcezit.sk/docs/poziadavky.pdf)

pracovníkov SAV. Tým skôr, že situácia s financovaním vedy v SR silne vplýva aj na situáciu v našom vysokom školstve. Totiž podľa *Eurostatu*[†] je financovanie vedy na Slovensku veľmi nízke. Podiel výdavkov na vedu tvorí v SR siedmy najnižší podiel na HDP v rámci EÚ (za SR sa umiestnili zadlžené Grécko a Cyprus, krajiny ešte chudobnejšie ako SR: Rumunsko, Bulharsko, Lotyšsko a Chorvátsko, pozri Diagram 2). Tento faktor spolu s významným poddimenzovaním financovania vysokých škôl silne vplýva aj na kvalitu vysokých škôl, čo vplýva aj na rozhodovanie stredoškolákov o tom, či si majú vybrať našu vysokú alebo zahraničnú vysokú školu. Preto sa nemožno čudovať, že podľa *Eurostatu* máme z krajín OECD tretí najvyšší podiel

[*] *Rudolf Záhradník* sa narodil v roku 1928 v *Bratislave*. V rokoch 1993-2001 bol predsedom *Akademie věd ČR*. Je významným fyzikálnym chemikom.

[†] *Štatistický úrad Európskeho spoločenstva*

študentov študujúcich v zahraničí. Na jednej strane je toto možné považovať za pozitívny krok. Ak si však uvedomíme, že sú to spravidla najlepší študenti – ich odchod znižuje vedomostnú úroveň zvyšnej populácie študentov. Vzhľadom na to, že po skončení štúdia spravidla zostávajú žiť a pracovať v týchto krajinách, tak až taký veľký dôvod na radosť nie je. Väčšina z týchto študentov študuje v susedných krajinách (najmä v Česku, kde v roku 2013 študovalo 6,4 % slovenských študentov – pred 10 rokmi to bolo iba 3,5 %), ktoré nás v investovaní do vedy a výskumu predbiehajú*. Na záver tohto odseku si dovolíme uviesť *vyjadrenie* českého matematika svetového významu *Jaroslava Kurzweila* z Matematického ústavu AV ČR, ktoré protestujúci členovia SAV použili ako motto pre svoju iniciatívu Veda chce žiť!: *„Vyspelé štáty investujú do vedy, pretože chcú zostať vyspelé. Tie štáty, ktoré do vedy neinvestujú, sa samy odsudzujú k zaostalosti."*

3 Kde siahajú korene pedagogických výskumných experimentov?

Do oblasti „mytológie" patrí aj historka, ktorá sa udiala pred viac ako desiatimi rokmi, v pedagogickom prostredí Katedry matematiky na UKF v Nitre a keďže má prepojenie na matematické vzdelávanie, výskum s ním spojeným a na históriu, bližšie ju popíšeme. Pri obhajobe kvalifikačnej práce z teórie vyučovania matematiky na katedre, ktorú obhajovala naša absolventka, vznikol nasledovný problém. Oponentka kvalifikačnej práce z UK v Bratislave vo svojom posudku uviedla, že práca absolventky nie je pôvodná, pretože vo významnej časti kopíruje pedagogický experiment, ktorý ona uviedla vo svojej kvalifikačnej práci. V samotnej diskusii k obhajobe práce vysvitlo, že jednou príčinou kritizovanej zhody bol postup použitý pri pedagogickom experimente: *Aby sa dal porovnať relatívny efekt experimentálneho pôsobenia absolventka* vytvorila ***dve*** *približne rovnocenné* ***skupiny*** *žiakov:* ***experimentálnu a kontrolnú*** *skupinu. Pričom, každá zo skupín bola vzdelávaná (v danom tematickom celku) z matematiky iným spôsobom – experimentálna skupina bola podrobená novému spôsobu vzdelávania a kontrolná skupina žiakov bola vzdelávaná tradičným spôsobom, prirodzene za rovnakých časových a aj ďalších podmienok. Následne boli získané matematické znalosti preverované v oboch skupinách spoločným testom, ktorý sa vyhodnotil štandardnými štatistickými metódami*†. Absolventka a aj ostatní členovia komisie zostali touto výhradou dosť zaskočení. V rámci diskusie k tomuto problému niektorí členovia (vrátane autora článku) sa snažili oponentku presvedčiť, že ani v našich postsocialististických podmienkach táto schéma pedagogického experimentu rozhodne nie je nová a je dokonca popísaná aj v niekoľkých učebniciach pedagogiky, pochádzajúcich ešte z éry socializmu (napr. od prof. *J. Skalkovej* (1924 -2009)). Treba povedať, že nakoniec všetko dobre dopadlo a kvalifikačná práca bola úspešne obhájená. Táto, pre niekoho možno bizarná diskusia, však nakoniec nebola celkom zbytočná. Jednak poodhalila medzery v znalostiach (resp. trvácnosti týchto znalostí) oponentky a i niektorých členov komisie zo základov pedagogiky a jednak sa stala prirodzeným zdrojom pre otázku: ***Kde je možné nájsť prvú písomnú zmienku o metóde*** **klinického*****, resp. pedagogického experimentu?*** Rozuzlenie celého príbehu bolo pre nás dosť prekvapujúce. Podstatu tejto kľúčovej výskumnej metódy

---

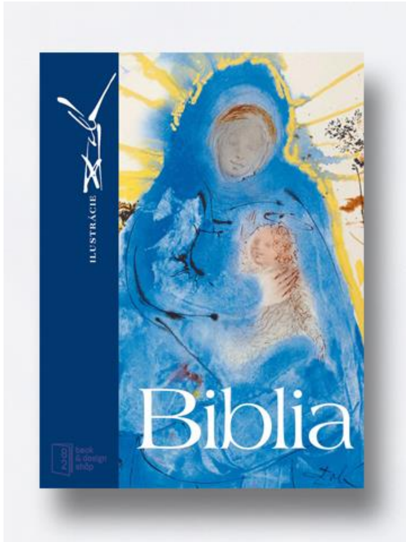
* Česko je pre našich študentov zaujímavé samozrejme aj tým, že naše krajiny sú si veľmi blízke v kultúrnej oblasti a absentuje jazyková bariéra.

† Išlo jednoducho o štandardný postup, ktorý sa už v minulosti bežne používal a používa i dnes pri klinických experimentov v zdravotníctve, vo výskume v poľnohospodárstve a v súčasnosti je štandardom aj pri pedagogických experimentoch.

totiž popisuje už ***Starý zákon***, ktorý okrem toho, že ho židovské i kresťanské náboženstvo pokladajú za sväté, je i cenným kultúrno-historickým dokumentom ľudstva. Konkrétne ide o časť *Knihy* proroka *Daniela* (*Daniel* 1.: 1-21. In *Sväté písmo Starého a Nového zákona, Spolok Sv. Vojtecha, Trnava,* 2000):

„Hl. 1 Daniel na kráľovskom dvore

V treťom roku panovania júdskeho kráľa Joakima prišiel babylonský kráľ Nabuchodonozor k Jeruzalemu a obliehal ho. Pán mu vydal do ruky júdskeho kráľa Joakima. ... Vtedy povedal kráľ Asfenezovi, svojmu veliteľovi eunuchov, aby zo synov Izraela, z kráľovského potomstva a spomedzi vznešených, priviedol mladíkov, na ktorých niet nijakej chyby, pekného zovňajšku, vnímavých pre každú múdrosť, vystrojených znalosťami a chápavých na vedomosti, ktorí by boli schopní stáť v kráľovskom paláci; aby ich naučil chaldejskému písmu a reči. Kráľ im na každý deň pridelil z kráľovského pokrmu a z vína, ktoré jemu slúžilo za nápoj, aby ich tri roky vychovávali a po ich uplynutí mali stáť pred kráľovou tvárou. Spomedzi Júdových synov boli medzi nimi Daniel, Ananiáš, Mízael a Azariáš. ... Daniel si však zaumienil, že sa nepoškvrní kráľovým pokrmom ani vínom, ktoré popíjal; prosil teda veliteľa eunuchov, aby sa nemusel poškvrniť. A Boh spôsobil, že Daniel našiel milosť a priazeň u veliteľa eunuchov. Ale veliteľ povedal Danielovi: „Bojím sa, že môj pán, kráľ, ktorý vám vydelil váš pokrm a nápoj, uvidí, že ste v tvári chudší, ako iní chlapci, vaši vrstovníci, a uvalíte mi pred kráľom vinu na hlavu.“ ***Vtedy Daniel povedal Malasarovi, ktorého veliteľ eunuchov postavil nad Daniela, Ananiáša, Mízaela a Azariáša: „Skús to so svojimi sluhami desať dní. Nech nám dajú na jedlo lúšteniny a na pitie vodu; nech sa potom ukážu pred tebou naše tváre a tváre chlapcov, ktorí jedia z kráľovského pokrmu, a potom nalož so svojimi sluhami, ako sa im bude vidieť.“ Privolil im teda v tejto veci a skúšal ich desať dní. Po desiatich dňoch sa ukázalo, že ich tváre sú krajšie a telá tučnejšie ako všetkých chlapcov, ktorí jedli z kráľovského pokrmu. Malasar im teda odňal pokrm a vína, ktoré mali piť, a dával im lúšteniny*.*** **Týmto štyrom mladíkom dal však Boh znalosť a pochop v každom písme a múdrosti.** *Daniel zas porozumel každé videnie a sen. Po uplynutí dní, ktoré do ich predstavenia určil kráľ, predviedol ich veliteľ eunuchov pred Nabuchodonozora.* ***Kráľ sa s nimi rozprával a medzi všetkými nenašiel takých ako Daniel, Ananiáš, Mízael a Azariáš.*** *Obsluhovali teda kráľa.* ***A vo všetkých veciach (kde bolo treba) múdreho dôvtipu, na ktoré sa ich kráľ vypytoval, zistil, že sú desať ráz vyššie než všetci čarodeji a veštci, ktorí boli v celom jeho kráľovstve.*** *Daniel sa dožil až do prvého roku kráľa Kýra.“*



Obrázok 3: *Biblia s ilustráciami Dalího (Vydavateľstvo Ikar 2012, 688 s.)*

Citát zo *Starého zákona* obsahuje temer celú 1. hlavu *Knihy proroka Daniela* (celkom má 6 hláv), vrátane aj jej posledných viet, a to i napriek tomu, že zisťovanie *dôvtipu a overovanie intelektuálnych schopností* spomínaných štyroch mladíkov nebolo cieľom *10 dňového experimentu*. Je totiž možno lákavé rozšíriť *hypotézu experimentu* aj o pozitívny vplyv *vegetariánskej stravy* na intelektuálny rozvoj jedinca. Z textu je však zrejmé, že táto časť už kľúčové prvky vedeckého experimentu *nemá* a to dokonca ani v prípade, že by sa ignorovalo Danielovo svedectvo o božom zásahu do intelektuálneho rozvoja mladíkov.

O tom, že ide *pravdepodobne* ***o najstaršiu písomnú zmienku o tejto metóde*** nás azda presvedčí niekoľko faktov a časových údajov. *Nabuchonozor*† (správnejšie *Nebukadnesar* II.)

* Vety prekladu, ktoré sa bezprostredne dotýkali nášho problému sme zvýraznili *tučným písmom*. Poznamenajme, že slovo *„lúštenina“*, ktoré vystupuje v tomto slovenskom preklade, je v českých aj v anglických prekladoch nahradené slovom so širším obsahom *„zelenina“*, ktoré podľa nášho názoru lepšie vyjadruje charakter stravovania mladíkov.

† *Nabuchonozor* bol najväčším panovníkom babylonskej ríše a pravdepodobne celého Východu. *Biblia* ho hodnotí (azda okrem 1. kapitoly *knihy Daniel*) pomerne negatívne, pretože dvakrát dobyl *Jeruzalem* a tisíce obyvateľov *Jeruzalema* bolo odvedených do Babylonu (známe ako *babylonské zajatie*). Po druhom dobytí *Jeruzalema* (587 pred Kr.) zničil jeho hradby a aj slávny *Šalamúnov chrám*. Na druhej strane, pripisuje sa mu stavba jedného zo *Siedmich divov sveta*: *Semiramidine visuté záhrady.*

bol skutočná historická postava: v rokoch 605 – kráľom *Novobabylonskej ríše*. Samotný *Starý zákon* vznikol v priebehu 1. tisícročia pred Kr. Podľa historikov, ktorí sú žiaľ v datovaní vzniku jednotlivých kníh dosť nejednotní, bola *Kniha proroka Daniela* napísaná najskôr v ***6. storočí pred Kr***. (teda niekedy v období, do ktorého je vsadený príbeh o *Danielovi*) a najneskôr v časoch vládnutia *Makabejcov v Judei* v rokoch ***165 - 37 pred. Kr.***

Literatúra

Bálint, V. 2010. Pár slov o reforme školstva. In Bečvář, J. - Bečvářová, M. –Slavík, A. (ed.) Jak připravit učitele matematiky. Sbornik celostátní konference, Praha 2010, MATFYZPRESS, s. 151-157.

Bečvář, J. 2010. Stručně o současném stavu učitelství (nejen matematiky). In Bečvář, J. - Bečvářová M. –Slavík, A. (ed.): Jak připravit učitele matematiky. Sbornik celostátní konference, Praha 2010, MATFYZPRESS, s. 17-28.

Biblia s ilustráciami Dalího. Vydavateľstvo Ikar 2012, 688 s.

Fulier, J. a kol. 2014. Zvyšovanie matematických kompetencií žiakov nižšieho sekundárneho vzdelávania (ISCED 2) - Všeobecné otázky a výsledky pedagogického experimentu. Nitra: UKF Nitra.

Heath,L. 1931. A History of Greek Mathematics 1. Oxford.

Hammer, D.1996. More than misconceptions: Multiple perspectives on student knowledge and reasoning, and an appropriate role for education research. American Journal oj Physics, 64, s. 1316-1325.

Jamek,V. 1998. O patřičnosti v jazyce, Nakl. F. Kafky, Praha.

Kol. 2000. American Heritage Dictionaries. Boston, Houghton-Mifflin.

Kolman, A. 1968. Dějiny matematiky ve starověku. Academia, Praha.

Koršňáková, P. 2004. Ako Slovensko obstálo v hodnotení PISA? CPVP, 2004.

Koršňáková, P. 2007. PISA SK 2006 ‑ Národná správa. Bratislava : ŠPU, 2007.

Koršňáková, P. 2008. PISA ‑ prírodné vedy. Úlohy 2006. ŠPU Bratislava, 2008, 98s.

Lilienfeld, S. O. – Lynn, S. J. – Ruscio, J. – Beyerstein, B. L. 2001. 50 největších mýtů populární psychologie. Opravnik obecně oblíbených omylů o lidském chování. Euromedia Group.

Sväté písmo Starého a Nového zákona, Spolok Sv. Vojtecha, Trnava, 2000

Zahradník, R. 2010. Proč přírodovědec ctí a obdivuje matematiku (a jak obracet nevěrce na víru). In Bečvář, J. - Bečvářová, M. – Slavík, A. (ed.): Jak připravit učitele matematiky. Sborník celostátní konference, Praha 2010, MATFYZPRESS, s. 13-16.

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/
https://www.minedu.sk/data/att/6077.pdf
http://www.vedachcezit.sk/docs/poziadavky.pdf

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 2, p. 19 – 27
ISSN 2453-6083

Riešenie úloh spojitého úrokovania pomocou softvéru GeoGebra

Solving the Tasks of Continuous Compound Interest by Using Software GeoGebra

Janka Drábeková [a] – Martina Grófová

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Economics and Management, Slovak University of Agriculture in Nitra, Tr. A. Hlinku 2, SK-949 76 Nitra,*

Received 29 September 2016; received in revised form 13 October 2016; accepted 14 October 2016

Abstract

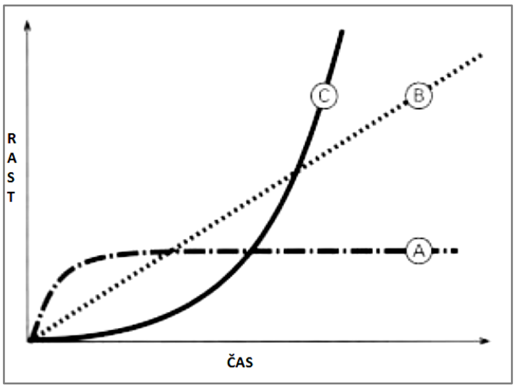
We can use exponential function to model a wide variety of real-world phenomena. The curve represents exponential growth, it grows very slowly in the beginning, then accelerates continually faster and finally grows in an almost vertical fashion. In the physical realm, this growth pattern usually occurs where there is sickness, often leading to death. In the economic systems, this exponential growth has wide application. Thinking in dimensions exponential models is absolutely necessary in today's economic world. The paper deals with the solution of selected economic problems - growth of money at continuous compound interest. We created the interactive figures by software GeoGebra. We pointed out the undisputed connection between mathematics and economics. The students of the Slovak University of Agriculture in Nitra can benefit from such teaching materials in the Learning Management System Moodle.

Keywords: exponential growth, continuous compound interest, economic applications, GeoGebra.

Classification: I10, R20, U70

Úvod

Podľa Kennedy (2006) rozoznávame tri druhy rastu (obrázok 1). Krivka A predstavuje vzor fyzického rastu v prírode. Podľa nej rastie naše telo, rastliny, zvieratá. V prvej časti je rast veľmi rýchly, neskôr sa spomaľuje, až napokon v určitej optimálnej veľkosti fyzikálny rast zastane.



Obrázok 1

*Corresponding author; email: janka.drabekova@uniag.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.2.19-27

Krivka B reprezentuje lineárny rast. Napr. viac strojov vyprodukuje viac tovaru, viac uhlia vyprodukuje viac energie atď. Systémy riadiace sa lineárnym vývojom sú relatívne jednoduché a predvídateľné. Krivka C znázorňuje exponenciálny rast. Tento rast by mohol byť opísaný ako presný opak krivky A. Na začiatku, systém rastie veľmi pomaly, ale neskôr sa rast stáva rýchlejším a nakoniec ide takmer kolmo hore. Pri živých organizmoch takáto forma rastu nastane zvyčajne v prípade choroby alebo smrti. V ekonomickej sfére má však takýto exponenciálny vývoj široké uplatnenie a uvažovanie v dimenziách exponenciálnych modelov je pre dnešný svet nevyhnutné. Prostredníctvom exponenciálnych modelov, vieme určiť ekonomické ukazovatele ako je inflácia, vývoj cien, rast dlhu, či naopak spotrebu dôležitých surovín (Kučák, 2012).

Exponenciálny rast

Exponenciálny rast patrí medzi základné exponenciálne modely. Ak absolútna miera rastu $Q'(t)$ je priamo úmerná funkčnej hodnote danej funkcie $Q(t)$ s kladnou konštantou úmernosti k, pričom $Q(0) = Q_0$, tak môžeme písať (Grinčová, 2012):

$$\frac{dQ}{dt} = k\,Q\,.$$

Riešením takejto diferenciálnej rovnice so začiatočnou podmienkou, dostaneme pomocou separácie premenných, rovnicu funkcie exponenciálneho rastu:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{kt},\ k > 0, Q_0 > 0, \text{ kde}$$

Q_0 - je začiatočná hodnota kapitálu,

$Q(t)$ - je budúca hodnota kapitálu,

t - je dĺžka úrokového obdobia,

k - je ročná úroková sadzba.

Jedna z najdôležitejších vlastností exponenciálneho rastu je, že aj keď sa „začína pomaly“, s postupom času sa jeho rýchlosť zvyšuje až šokujúcim spôsobom. Exponenciálny rast je teda veľmi silný nástroj (Kennedy, 2006). Neustály rast si vyžaduje aj súčasný ekonomicko-hospodársky systém. Jedná sa o exponenciálny rast obyvateľstva, exponenciálny rast monetárnej bázy, či požiadavky na niekoľkopercentný hospodársky rast ročne. Tieto javy sú však z dlhodobého hľadiska neudržateľné, pretože trendy, ktoré sa vyvíjajú exponenciálne, sú nestabilné (Smith, 2010).

Spojité úrokovanie

Exponenciálne modely, ako sme už vyššie spomínali, majú široké uplatnenie v ekonomickej praxi. My sme sa v článku zamerali na využitie exponenciálneho rastu pri spojitom úrokovaní.

Proces úročenia, pri ktorom sa úrokovanie uskutočňuje v časových intervaloch blížiacich sa k nule, t.j. počet konverzií v roku rastie do nekonečna ($n \to \infty$), sa nazýva spojité úrokovanie (Molnárová, 2012; Pirč, Grinčová, 2008). Výslednú hodnotu investovaného kapitálu vypočítame:

$$Q(t) = \lim_{n\to\infty}\left[Q_0 \cdot \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt}\right] = Q_0 \cdot e^{kt}, \text{ kde}$$

Q_0 - je začiatočná hodnota kapitálu,

$Q(t)$ - je budúca hodnota kapitálu,

t - je dĺžka úrokového obdobia,
k - je ročná úroková sadzba,
n - je počet úrokových periód (konverzií) za rok,
$\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n$ - je úročiteľ (za jeden rok).

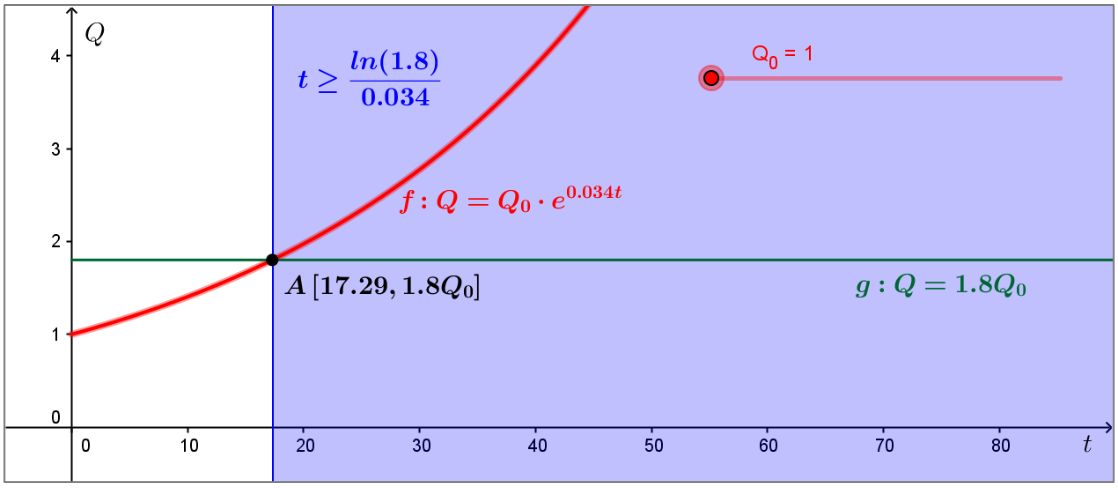
Na základe tohto modelu vieme určiť budúcu hodnotu investovaného kapitálu či najvýhodnejší úrok. Poznanie týchto matematických vzťahov je v dnešnej dobe veľmi žiaduce. Pomocou nich sa vieme zorientovať vo veľmi širokej ponuke bánk.

Vybrané aplikácie riešené pomocou softvéru GeoGebra

V tejto časti uvedieme niekoľko príkladov, pri riešení ktorých sme využili softvér GeoGebra. Ide o ekonomické aplikácie exponenciálneho rastu, ktoré nám umožnia spojiť matematickú analýzu a ekonómiu pomocou riešenia jednoduchých problémov spojitého úrokovania. V príkladoch neuvažujeme o zdanení úrokov. Pri tvorbe úloh sme sa inšpirovali literatúrou od autorov Barnet et al. (2008), Grinčová (2012), Molnárová (2012), Pirč & Grinčová (2008).

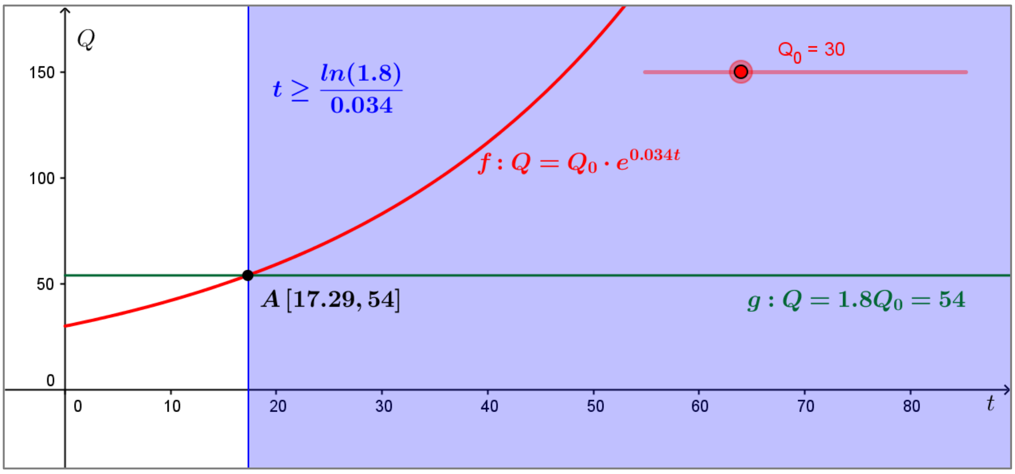
Príklad 1

Sporiteľ sa rozhodol vložiť sumu Q_0 do banky, ktorá poskytuje pri spojitom úrokovaní nominálnu úrokovú mieru 3,4% p.a. Zistime, za aký čas sporiteľovi vzrastie táto suma aspoň 1,8-krát.
Riešenie: Matematicky vyjadríme sumu, hodnotu budúceho kapitálu, ktorá je aspoň 1,8-krát väčšia ako vklad: $Q \geq 1{,}8 \cdot Q_0$. Do vytvorenej nerovnice dosadíme funkciu exponenciálneho rastu $Q = Q_0 \cdot e^{0{,}034t}$ a vyjadríme premennú t: $Q_0 \cdot e^{0{,}034t} \geq 1{,}8 \cdot Q_0 \Rightarrow t \geq \dfrac{\ln 1{,}8}{0{,}0034}$ (Obrázok 2)



Obrázok 2

Pri hľadaní riešenia pomocou softvéru GeoGebra, keďže nepoznáme Q ani Q_0, využijeme nástroj „posuvník“. Vytvoríme v nákresni objekt, pomocou ktorého môžeme meniť hodnoty čísla, v našom prípade hodnoty Q_0. Na obrázku 2 je riešenie úlohy ak $Q_0 = 1$. Zo súradníc bodu $A \in f \cap g$ vieme vysloviť záver. Sporiteľovi vzrastie vložená suma aspoň 1,8-krát o 17 a pol roka. Ak by sme vytvorený materiál uložili ako interaktívnu prezentáciu, študenti pomocou posuvníka môžu sledovať ako sa mení obrázok pri zmenách hodnôt Q_0. Napríklad na obrázku 3 je riešenie úlohy ak $Q_0 = 30$.



Obrázok 3

Príklad 2

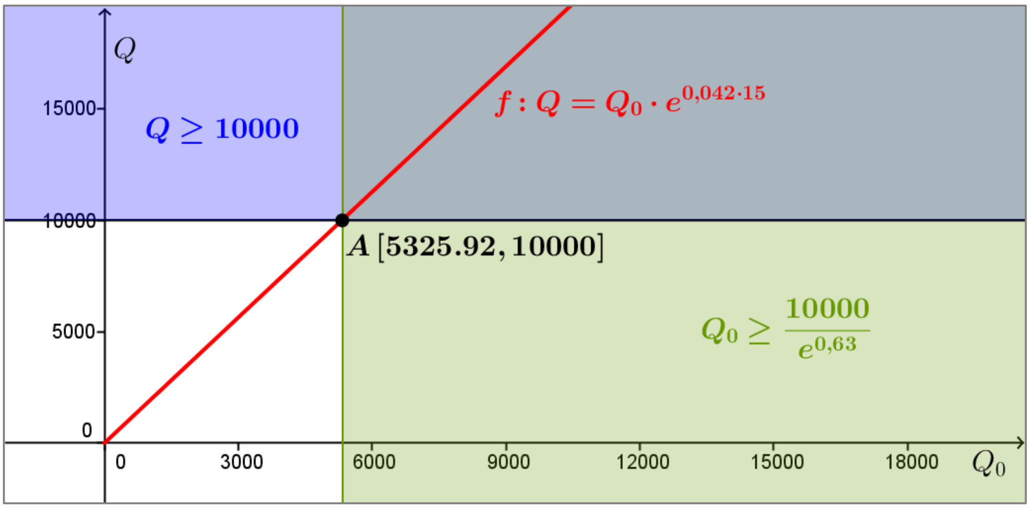
A) Akú sumu peňazí musí vložiť sporiteľ do banky, ak chce mať o 15 rokov na danom účte minimálne 10 000€ ?

B) Vyjadrite vzťah medzi vkladanou hodnotou kapitálu a dĺžkou úrokového obdobia pri očakávanej hodnote budúceho kapitálu 10 000€.

Vklad bude dlhodobo spojito úrokovaný nominálnou úrokovou mierou 4,2% p.a.

Riešenie:

A) Do funkcie exponenciálneho rastu dosadíme údaje zo zadania úlohy a dostaneme funkciu vyjadrujúcu vzťah medzi pôvodnou hodnotou vkladu a budúcou hodnotou vloženého kapitálu po 15 rokoch: $Q = Q_0 \cdot e^{0,042 \cdot 15}$. Keďže na účte chceme mať minimálne 10 0000€, počítame nerovnicu: $Q \geq 10\,000 \Rightarrow Q_0 \cdot e^{0,042 \cdot 15} \geq 10\,000 \Rightarrow Q_0 \geq \frac{10\,000}{e^{0,63}}$.

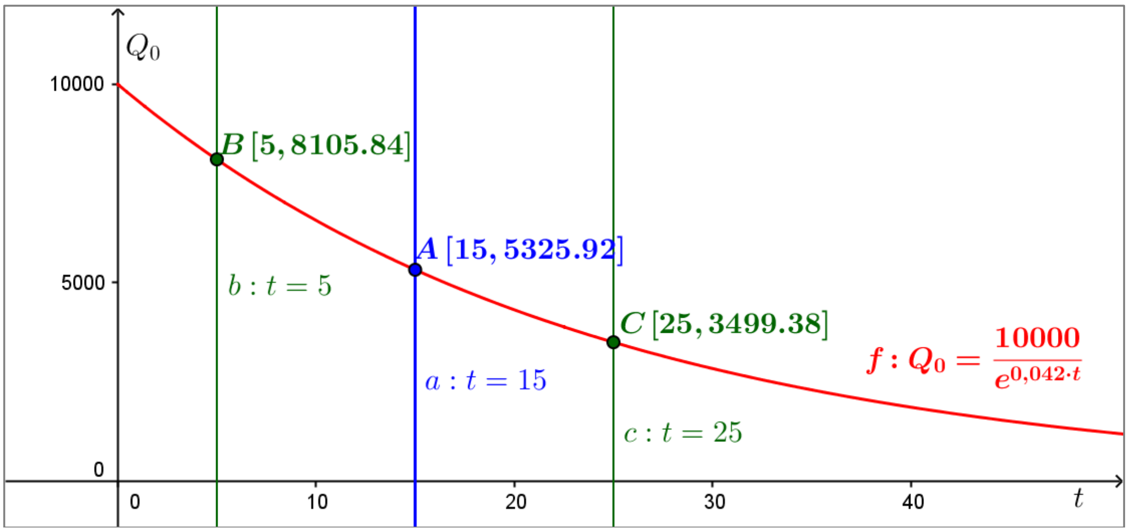


Obrázok 4

Pri grafickom riešení úlohy (Obrázok 4) vidíme, že aj keď sme na vyjadrenie funkcie reprezentujúcej vzťah medzi pôvodnou hodnotou vkladu a budúcou hodnotou vloženého kapitálu využili exponenciálny model rastu, tento vzťah pri danej úrokovej sadzbe aj danej dĺžke úrokového obdobia nemá exponenciálny charakter. Grafom takejto funkcie pri daných vstupných údajoch je priamka. Ak chceme nájsť riešenie, zobrazíme v GeoGebre graf funkcie

$Q = Q_0 \cdot e^{0,042 \cdot 15}$ a riešenie nerovníc $Q \geq 10\,000$, $Q_0 \geq \frac{10\,000}{e^{0,63}}$. Výsledok príkladu odčítame zo súradníc bodu A. Ak chce mať sporiteľ o 15 rokov na danom účte minimálne 10 000€, musí vložiť do banky minimálne 5 326€.

B) Aby sme vyjadrili vzťah medzi vkladanou hodnotou kapitálu a dĺžkou úrokového obdobia, do funkcie exponenciálneho rastu $Q = Q_0 \cdot e^{0,042 \cdot t}$ dosadíme hodnotu budúceho kapitálu $Q = 10000$ € a vyjadríme Q_0: $Q_0 = \frac{10000}{e^{0,042 \cdot t}}$ (obrázok 5).



Obrázok 5

Z grafickej interpretácie (Obrázok 5) vidíme, že vzťah medzi vkladanou hodnotou kapitálu a dĺžkou úrokového obdobia má exponenciálny charakter. Funkcia je klesajúca. Výslednú sumu 10 000€ získame za nižšiu vkladanú sumu pri dlhšej dobe úrokovania. Napríklad pri 5 rokoch úrokovania musíme vložiť na daný účet 8106€ ale pri 25 rokoch úrokovania nám stačí vložiť sumu 3500€ (obrázok 5).

Príklad 3

Akú sumu peňazí musí vložiť sporiteľ do banky, ak chce mať o 220 dní zisk 60€?

A) Vklad bude spojito úrokovaný s nominálnou úrokovou mierou 2,5%.

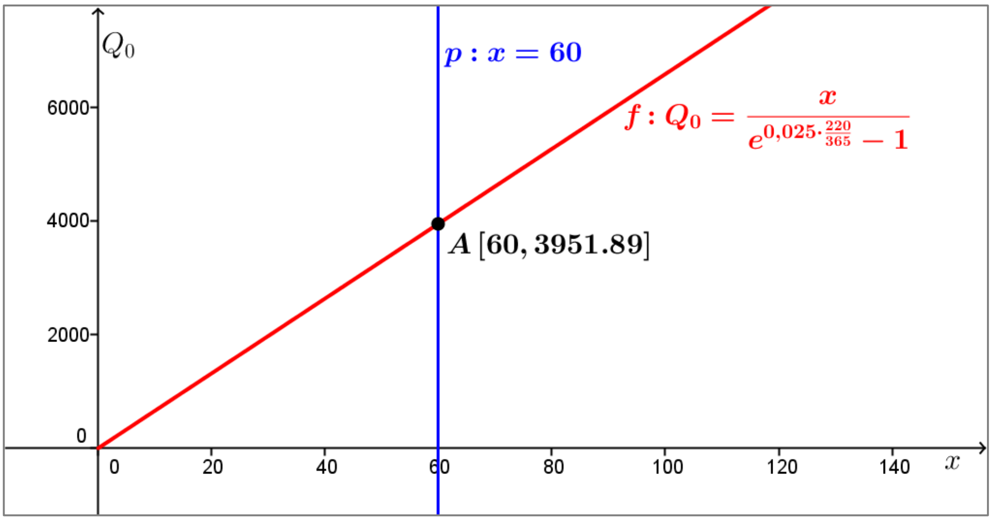
B) Sporiteľ bude musieť vložiť vyššiu alebo nižšiu sumu, ak vzhľadom na obdobie úrokovania kratšie ako jeden rok, banka využíva na výpočet exaktnú metódu jednoduchého úrokovania s ročnou úrokovou mierou 2,5%?

Riešenie:

A) Keďže vklad bude spojito úrokovaný, využijeme model exponenciálneho rastu podobne ako v príkladoch uvedených vyššie. Vyjadrime vzťah medzi ziskom x a vloženou sumou Q_0:

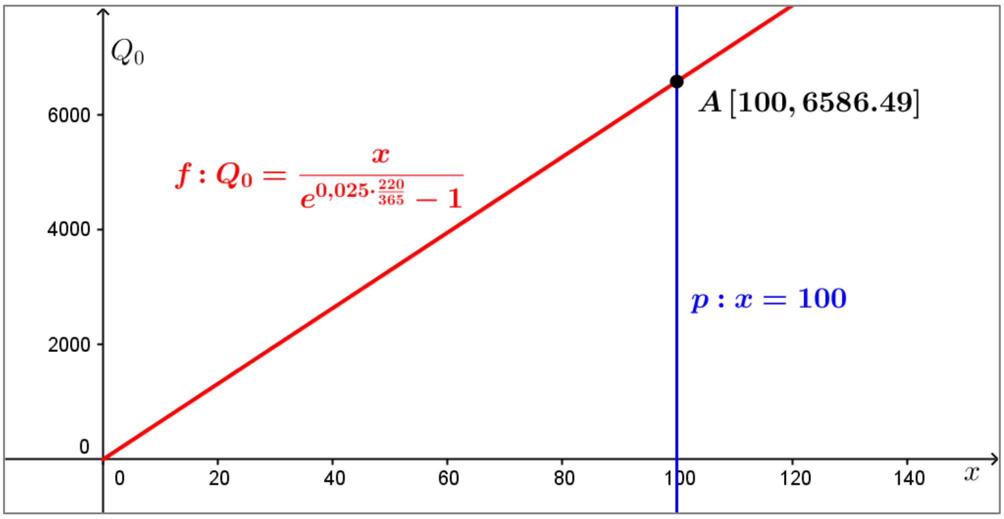
$$Q = Q_0 + x \Rightarrow Q_0 + x = Q_0 \cdot e^{0,025 \cdot \frac{220}{365}} \Rightarrow Q_0 \doteq \frac{x}{e^{0,015} - 1} \quad \text{(Obrázok 6)}$$

Riešenie pomocou softvéru GeoGebra môžeme získať napríklad ako prienik grafu funkcie $f : Q_0 = \frac{x}{-1 + e^{0,025 \cdot \frac{220}{365}}}$ a priamky $p : x = 60$. Vidíme, že vzťah medzi ziskom a vloženou sumou nemá exponenciálny charakter, ale ide o priamu úmernosť, ktorú graficky charakterizuje priamka. Zo súradníc bodu $A \in f \cap p$ vieme vysloviť záver. Ak chce mať sporiteľ o 220 dní zisk 60€, musí na účet, ktorý je spojito úrokovaný s nominálnou úrokovou mierou 2,5% vložiť 3952€.



Obrázok 6

Ak by sme vytvorený materiál uložili ako interaktívnu prezentáciu, študenti môžu „pomocou uchopenia a pohybu priamky“ $p : x = 60$ sledovať, ako sa mení veľkosť vkladu pri zmenách očakávaného zisku pri nezmenenej dobe úročenia (220 dní). Napríklad na obrázku 7 je riešenie úlohy, ak $p : x = 100$.

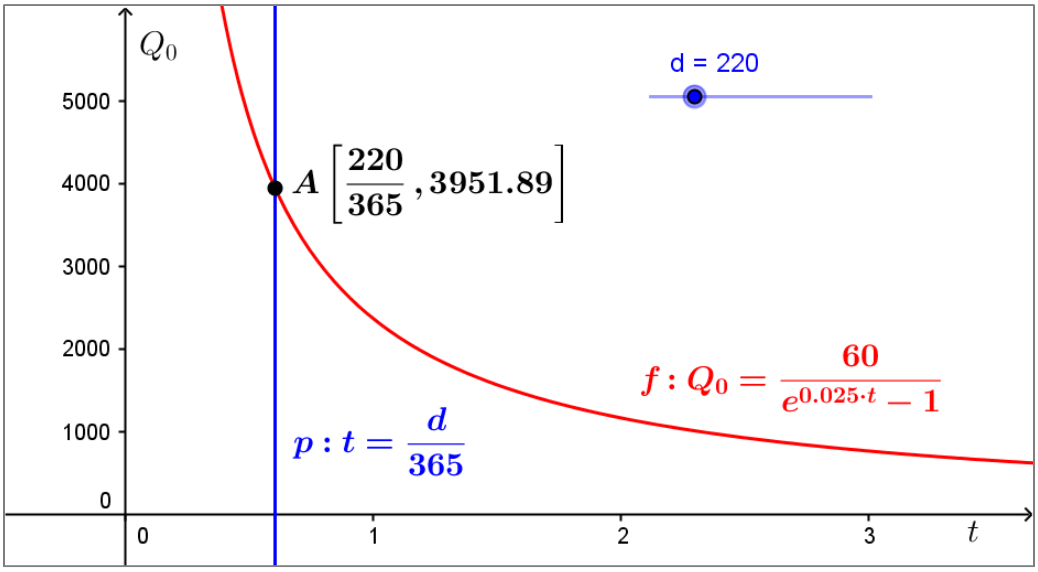


Obrázok 7

Riešenie môžeme získať aj nasledovným spôsobom. Vyjadrime vzťah medzi vloženou sumou Q_0 a dĺžkou úročeného obdobia t pre zisk 60€:

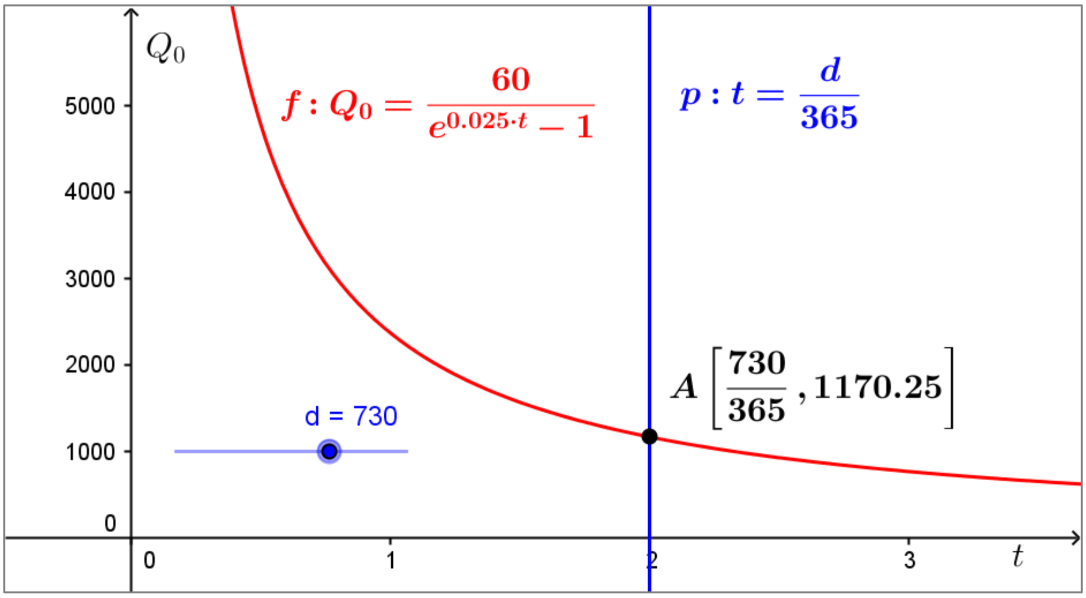
$$Q = Q_0 + 60 \Rightarrow Q_0 + 60 = Q_0 \cdot e^{0,025 \cdot t} \Rightarrow Q_0 = \frac{60}{e^{0,025t} - 1} \text{ (Obrázok 8)}$$

Zobrazíme graf funkcie $f : Q_0 = \dfrac{60}{e^{0,025t} - 1}$. Táto funkcia má exponenciálny charakter a je klesajúca, pretože čím je kratšia doba úrokovania, tým musí byť vklad vyšší. Keďže premennú t chceme sledovať v počtoch dní a nie v rokoch, použijeme nástroj posuvník, napríklad v rozsahu 0 až 1095, teda rozsah počtu dní troch rokov. Riešenie nájdeme ako prienik grafu funkcie f a priamky $p: t = \dfrac{d}{365}$. Zo súradníc bodu $A \in f \cap p$ vieme vysloviť záver.



Obrázok 8

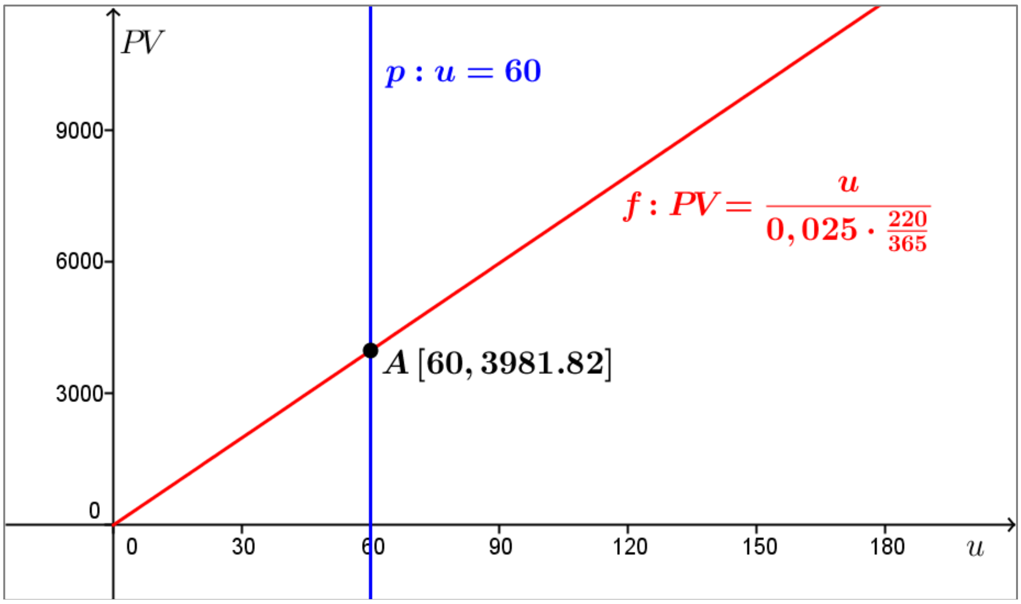
Pohybom posuvníka môžeme pri interaktívnej forme sledovať ako sa mení vklad pri rôznych dobách úročenia pri rovnakom zisku 60€. Napríklad na obrázku 9 je riešenie úlohy ak $d = 730$.



Obrázok 9

B) V prípade jednoduchého úrokovania vkladu využijeme vzťah: $PV = \dfrac{u}{i \cdot t}$, kde PV - je začiatočná hodnota vkladu, u - je úrok, i - je úroková sadzba, t - je dĺžka úrokového obdobia. Vyjadrime vzťah medzi začiatočnou hodnotou vkladu PV a úrokom u:

$$PV = \frac{u}{0{,}025 \cdot \dfrac{220}{365}} = \frac{730 \cdot u}{11} \quad \text{(Obrázok 10)}$$

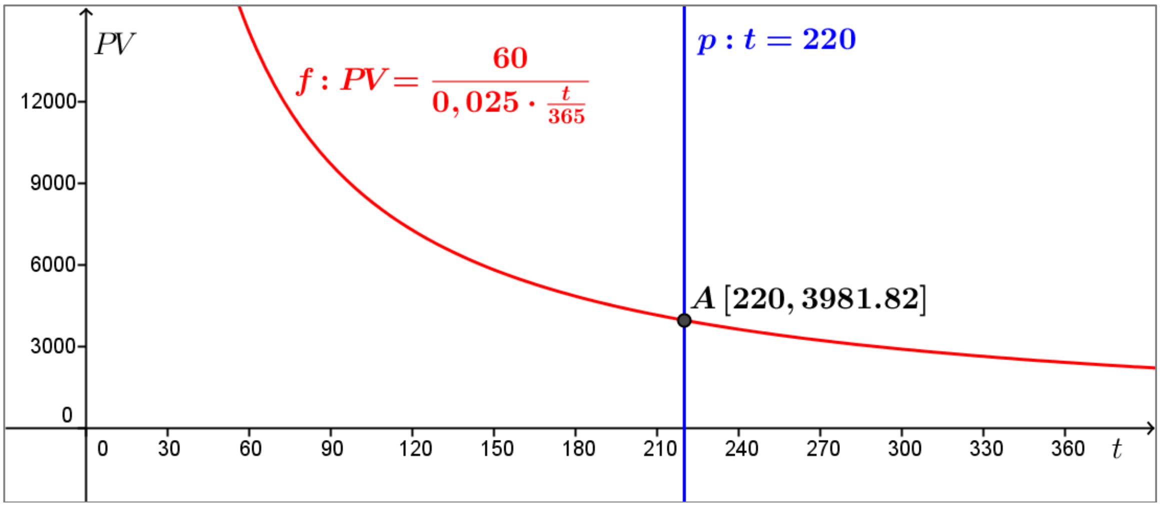


Obrázok 10

„Uchopením a pohybom priamky“ p, môžeme pri interaktívnej forme obrázka 9, sledovať zmenu vkladu pre rôzne úroky pri konštantnej dobe úrokovania (220 dní).

Riešenie môžeme získať aj nasledovným spôsobom. Vyjadrime vzťah medzi začiatočnou hodnotou vkladu PV a počtom dní úrokovania vkladu t:

$$PV = \frac{60}{0{,}025 \cdot \frac{t}{365}} = \frac{876000}{t}$$, kde t - je počet dní (Obrázok 11)



Obrázok 11

Opäť, môžeme pri interaktívnej forme obrázka 10 sledovať, pri konštantnom zisku 60€, zmenu vkladu pre rôzny počet dní úrokovania.

Z obrázkov 10,11 vyplýva, že sporiteľ musí vložiť do banky sumu 3982€ v prípade, že banka používa exaktnú metódu jednoduchého úrokovania pri dobe úrokovania kratšej ako jeden rok. Sporiteľ by teda musel vložiť do banky vyššiu sumu (o 30€) ako pri spojitom úrokovaní, kedy mu stačí vložiť 3952€.

Záver

Aplikácia modelu exponenciálneho rastu, v rámci spojitého úrokovania, je veľmi jednoduchá a efektívna pri ekonomickom rozhodovaní každého z nás. Na uvedených príkladoch sme zdôraznili nepopierateľnú väzbu medzi matematikou a ekonómiou. Obrazovo-názornú reprezentáciu skúmaných problémov sme dosiahli pomocou softvéru GeoGebra.

Vytvorili sme interaktívne konštrukcie, ktoré majú uplatnenie aj vo vyučovacom procese. Študenti Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre riešia podobné problémy v rámci svojich bakalárskych prác a interaktívne študijné materiály môžu využívať vo výučbovom prostredí LMS Moodle.

References

Barnet, A.R., Ziegler, R.M. and Byleen, E.K. (2008). College Algebra with Trigonometry. The McGraw-Hill Companies, New York, ISBN 978-0-07-331234-4.

Grinčová, A. (2012). Matematika II a jej využitie v ekonómii. 1.vydanie, Technická univerzita v Košiciach, 136s., ISBN 978-80-553-0851-7.

Kennedy, M. (2006). Why do We Need Monetary Innovation? (Online) Dostupné na internete: https://issuu.com/margritkennedy/docs/pre_moneypres/20?e=1133827/2662659 [26.09.2016]

Kučák, M. (2012). Inflačné činitele svetovej ekonomiky (… a opatrenia proti ich dopadom). 1.Vydanie, EDIS, Žilina, 113s., ISBN 978-80-554-0563-6.

Molnárová, M. (2012). Matematika I a jej využitie v ekonómii. 1.vydanie, Technická univerzita v Košiciach, 172s., ISBN 978-80-553-1168-5.

Pirč, V., Grinčová, A. (2008). Finančná matematika. 1.vydanie, Technická univerzita v Košiciach, 82s., ISBN 978-80-8073-986-7

Smith, L.C. (2010). The world in 2050: four forces shaping civilization's northern future. New York, Penguin Group, 322 pp., ISBN 978-0-525-95181-0

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 2, p. 28 – 34
ISSN 2453-6083

Matematické kompetencie žiakov pri riešení otvoreného geometrického problému

Pupil´s Mathematical Competencies in Solving Geometrical Open Problem

Kristína Bulková[a*] – Soňa Čeretková[a]

[a*]*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 30 September 2016; received in revised form 18 October 2016; accepted 18 October 2016

Abstract

For mapping of development and level of key competencies of students in mathematics, particularly competencies: analysing situations, revaluation possible strategies of solving and choice and description of original solving process, are appropriate open mathematical problems. For solving open problems, requiring mathematical inquiring, students do not use customary techniques or simple application of standard algorithms. Assessment of solution of open tasks and mathematical inquiring also requires nonstandard approach of assessor. In this paper it is proposed a concept of observing a solving process of students and assessment of specific aspects of open mathematical problem solving. Solutions are demonstration of higher level of mathematical thinking of students in geometry. The proposed system of rubrics (tables of assessment) indicates revealed demonstrated mathematical competencies of students in assessed solving process. Rubrics were compiled with the aim on assessment of mathematical knowledge of students based on performance standard according to State Education Programme of Slovak Republic.

Keywords: mathematical competencies, mathematical open problem, rubric (table of assessment)

Classification: F90

Úvod

Snahou učiteľa matematiky by malo byť podporovanie rozvoja znalostí a schopností u každého žiaka; nielen naučiť žiakov základné vedomosti, ale postupne zvyšovať ich úroveň. Vo vyučovaní matematiky sú známe rôzne aktivizujúce metódy, pomocou ktorých je možné podporiť záujem žiakov o matematiku, s cieľom zvýšiť úroveň matematického myslenia. Avšak môže byť náročné sledovať postupné zlepšovanie u každého žiaka osobitne. Cieľom príspevku je navrhnúť rubriky, na základe ktorých je možné v riešiteľskom postupe geometrického problému pozorovať a analyzovať jednotlivé úrovne matematických kompetencií a vedomostí žiaka.

Ako teoretický základ bola využitá van Hieleho schéma úrovní porozumenia geometrii. Každej definovanej úrovni boli pridelené náležité matematické kompetencie, ktoré je následne možné identifikovať v riešiteľskom postupe žiakov.

*Corresponding author; email: kristina.bulkova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.2.28-34

Pre prehľadnejšie pozorovanie matematických kompetencií bol využitý inovovaný Štátny vzdelávací program (iŠVP, 2015), ktorý vymedzuje obsah vzdelávania a výkonový štandard v matematike pre žiakov gymnázií.

Teoretické východiská

„Geometria je nástrojom pre štúdium axiomatických systémov, médiom pre prezentáciu reálneho sveta a vizualizáciu matematických myšlienok." (Handbook for Teachers, 1992, s. 23). Geometrické objekty sa nachádzajú všade okolo nás a geometria je už od počiatku vývoja ľudského vzdelania nevyčerpateľným zdrojom pre tvorbu a riešenie matematických problémov. Podstata geometrie tak dáva možnosť pre učiteľov využívať úlohy, vďaka ktorým vidia žiaci spojenie matematiky s reálnym svetom, aj prostredníctvom otvorených matematických problémov.

Pre hodnotenie úrovne porozumenia geometrii je nevyhnutné brať do úvahy mnoho aspektov; od základných znalostí až po prácu s axiomatickými systémami. Usinskin (1982, s. 3–7) uvádza van Hieleho schému piatich úrovní porozumenia geometrii. Žiaci na počiatočnej úrovni sa rozhodujú len na základe vnímania, nie zdôvodňovania. Poznajú základné názvy útvarov a rozoznávajú ich len na základe ich vzhľadu. V druhej úrovni už vedia určiť vlastnosti jednotlivých útvarov, prípadne ich pomenovať. Avšak to, či sa jedná o postačujúcu alebo nutnú vlastnosť k popísaniu útvaru, je žiak schopný rozlíšiť až na tretej úrovni. Na základe chápania vzájomných vzťahov v geometrii je potom žiak schopný odôvodniť svoj postup, respektíve obhájiť dôkaz riešenia, neformálnou argumentáciou. V nasledujúcej úrovni už žiak dokáže skonštruovať dôkaz, pričom využíva získané vedomosti o postačujúcich a nutných podmienkach a znalosti axióm a definícií. Dôkaz sporom a nepriamy dôkaz vie žiak skonštruovať na najvyššej úrovni ovládania geometrických poznatkov. Na najvyššej úrovni je žiak schopný vytvárať a porovnávať matematické axiomatické systémy.

Rovnako tak aj matematická kompetencia sa prejavuje v rôznych stupňoch a pozostáva zo schopností a ochoty používať matematické spôsoby myslenia. Matematické spôsoby myslenia sa prejavujú v uplatňovaní logického a priestorového myslenia a prezentácie matematických vedomostí v nich, prostredníctvom vzorcov, modelov, diagramov, grafov a tabuliek (Blaško, 2010, s. 44).

Štátny pedagogický ústav (ŠPÚ) uvádza v iŠVP (2015, s. 2), pre predmet matematika, definíciu matematickej kompetencie, ktorú stanovil Európsky parlament, ako schopnosť rozvíjať a aplikovať matematické myslenie pre riešenie rôznych problémových situácií v každodennom živote. Existuje viacero náhľadov pre rozdelenie matematických kompetencií. Štruktúra kompetenčného modelu, ktorú v príspevku predstavujeme, bola zostavená na základe štúdia viacerých výskumov a neskôr aplikovaná do výchovno-vzdelávacieho procesu hodín matematiky. Lukáč a Sekerák (2001, s. 61) vymedzili dvanásť kategórií schopností, ktoré by mal žiak počas štúdia matematiky na gymnáziu nadobudnúť, a to: matematické myslenie a usudzovanie, pojmy, fakty, tvrdenia a postupy v matematike, využitie symbolických, formálnych a technických vyjadrení a operácií, znázornenie a popísanie matematických objektov a situácií, položenie otázky, na základe ktorej nasleduje vymedzenie problému a jeho riešenie, matematické modelovanie, matematická argumentácia a dokazovanie, používanie pomôcok, komunikácia, práca s informáciami, kompetencie týkajúce sa postojov a hodnotového systému, personálne a interpersonálne kompetencie.

Zostavenie rubrík

Aktivizujúce metódy vyučovania matematiky využívajú zadávanie otvorených matematických problémov. Očakávaným výstupom riešenia otvorených matematických problémov by pre učiteľa nemal byť len fakt, že žiaci dokážu problémy vyriešiť. Pri riešení otvorených úloh a problémov nie je automaticky jasný postup riešenia resp. nacvičený algoritmus, ale žiak by mal k riešeniu pristupovať tvorivo. Preto je dôležité pozorovať a analyzovať, ktorým smerom sa matematické myslenie pri riešení otvorených matematických problémov u žiakov rozvíja. Pri hodnotení žiackych riešení tak nie je najdôležitejšia iba správnosť výsledku. Rovnaký podiel na posúdení úspešného či vyhovujúceho riešenia má i cesta, ktorou sa žiaci v riešení uberali. V slovne opísanom postupe riešenia je možné sledovať, aké matematické nástroje žiaci využívajú.

Vhodným prostriedkom na posúdenie úrovne vedomostí žiaka a hodnotenie prejavených matematických kompetencií v riešení otvoreného matematického problému je tzv. rubrika, ktorá má formu hodnotiacej tabuľky. Pojem rubrika na hodnotenie je relatívne novým pojmom v teórií vyučovania matematiky. Brookhart (2013) definuje rubriku ako ucelený súbor kritérií na prácu študentov, na základe ktorých popisuje jednotlivé stupne matematických kompetencií žiakov. V rámci Slovenskej republiky je systém rubrík opísaný v dizertačnej práci *Meranie kvality matematického vzdelávania – rubriky na meranie kvality formatívneho hodnotenia* (Hubeňáková, 2016, s. 25 - 26). Spôsob zostavenia rubrík sa v stĺpcoch odvíja od úrovne zvládnutia hodnoteného atribútu a v riadkoch sú sledované už konkrétne hodnotené atribúty, v tomto prípade matematické kompetencie.

V Tabuľke 1 je uvedená rubrika úrovní matematických kompetencií, ktoré sú priradené k príslušnej úrovni van Hieleho schémy.

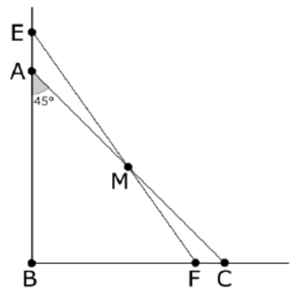
***Tabuľka 1**: Rubrika úrovní matematických kompetencií*

Van Hieleho schéma	KOMPETENCIE	st.
VIZUALIZÁCIA	používanie pomôcok práca s informáciami	1
ANALÝZA	matematické pojmy, fakty, tvrdenia a postupy použitie symbolického, formálneho a technického vyjadrovania a operácií	2
ABSTRAKCIA	znázorňovanie a popisovanie matematických objektov a situácií, prezentácia matematické myslenie a usudzovanie	3
DEDUKCIA	matematická argumentácia, dôkaz položenie otázky, vymedzenie problému a jeho riešenia	4
AXIOMATIZÁCIA	matematické modelovanie	5

Súťaž Matematický B-deň a otvorené problémy z matematiky pre žiakov gymnázia

Od roku 2011 sa na Slovensku koná každoročne tímová súťaž v riešení otvorených matematických problémov Matematický B-deň. V spolupráci s Freudenthalovým inštitútom predstavuje súťaž Matematický B-deň formu začleňovania objavného vyučovania matematiky do povedomia. Súťažný tím sa skladá z troch alebo štyroch žiakov. Hlavnou myšlienkou súťaže je riešenie otvoreného matematického problému, preukázanie matematického myslenia v tzv. matematickom skúmaní, samozrejme, na úrovni vedomostí z matematiky, ktoré sú požadované na gymnáziu. Riešenia musia jednotlivé tímy spísať jasne a zrozumiteľne pre každého čitateľa (PRIMAS, 2012). Ukážka je zo zadania, ktoré bolo použité v súťaži Matematický B-deň 2015. V rámci Slovenskej republiky sa do minuloročného kola súťaže zapojilo 138 žiakov z 13 gymnázií v Nitre, Banskej Bystrici, Sučanoch, Bratislave, Košiciach, Žiline, Poprade a Michalovciach.

Úloha: Daný je rovnoramenný trojuholník *ABC*; bod *M* je stred strany *AC*. Bod F leží medzi vrcholmi *B* a *C* trojuholníka *ABC* vo vnútri strany *BC*. Priamka *FM* pretína priamku, na ktorej leží strana *AB* v bode *E* (Obrázok 1). Dokážte, že úsečka *EF* je dlhšia ako úsečka (strana trojuholníka) *AC*. (Matematický B-deň, 2015).



***Obrázok 1**: Zadanie úlohy„Trojuholníková geometria“*

Pre hodnotenie riešení úloh a problémov, ktoré žiaci v súťaži Matematický B-deň vytvoria, je možné zostaviť konkrétnu rubriku na posúdenia a analýzu úrovne vedomostí z geometrie a geometrického myslenia. Opisy jednotlivých úrovní boli vybrané z iŠVP, Požiadavky na vedomosti a zručnosti žiaka gymnázia. Opisy zodpovedajú príslušnej téme vo vyučovaní geometrie. Úrovne rešpektujú kompetencie podľa Tabuľky 1.

***Tabuľka 2**: Rubrika úrovní prejavených vedomostí žiakov*

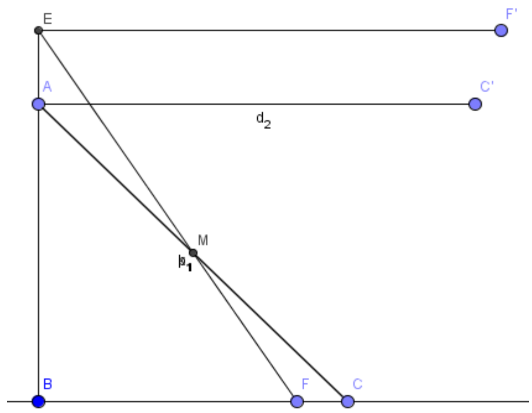
	TROJUHOLNÍKOVÁ GEOMETRIA (ZADANIE 1)	st.
VIZUALIZÁCIA	Žiaci pracovali s náčrtom. Žiaci vedeli pomenovať základné útvary.	1
ANALÝZA	Žiaci vymenovali vlastnosti pravouhlého trojuholníka. Žiaci vedeli uviesť znenie Pytagorovej vety a goniometrické vzťahy v pravouhlom trojuholníku. Žiaci vedeli určiť, či sú dva trojuholníky zhodné alebo podobné.	2
ABSTRAKCIA	Žiaci použili vlastnosti zhodnosti a podobnosti vo výpočtoch a pri odvodzovaní ďalších vzťahov. Žiaci používali geometriu pravouhlého trojuholníka na výpočet veľkosti uhlov a dĺžky strán. Žiaci vysvetlili dôkaz na základe neformálnej argumentácie.	3
DEDUKCIA	Žiaci využili znalosti aj z iných oblastí matematiky Žiaci vedeli dokázať pravdivosť s príslušnou matematickou argumentáciou. Žiaci aplikovali základný druh dôkazu.	4
AXIOMATIZÁCIA	Žiaci uviedli matematický dôkaz založený na základe vytvorených predpokladov. Žiaci vyhodnocovali matematické závery, na základe ich predošlého skúmania.	5

Na základe takto zostavených rubrík môžeme nahliadnuť, na akej úrovni boli prejavené kompetencie v geometrickom myslení v riešení otvoreného problému, a zároveň porovnať vedomosti žiakov s požiadavkami, ktoré definuje iŠVP.

Ukážka využitia rubrík pri hodnotení žiackych riešení úlohy

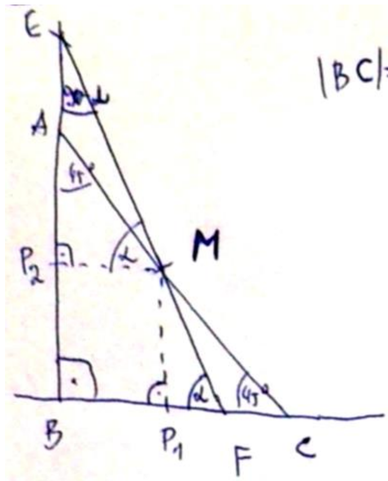
Schopnosť dokázať matematické tvrdenie v sebe zahŕňa matematické kompetencie, ktoré dokazujú vyššiu úroveň matematického myslenia. Zadanie zo súťaže Matematický B-deň2015 (Úloha viď. vyššie) má požiadavku vytvoriť geometrický dôkaz. Žiaci vo svojich riešeniach využili rôzne postupy, z ktorých boli pre porovnanie vybrané odlišné riešenia.

Riešenie *A* žiaci opísali nasledujúcou logickou úvahou: *„Nakreslíme si obrázok podľa zadania. Cieľom úlohy je dokázať, že úsečka EF je dlhšia, než úsečka AC. Jeden zo spôsobov, akým by sa dala úloha riešiť, je otáčať bod F okolo bodu E a bod C okolo A, a to do takej pozície, aby boli obe úsečky vodorovne. Z toho vidíme, ktorá úsečka je dlhšia, a to EF."* Pre grafické znázornenie riešenia (Obrázok 2) žiaci využili program Geogebra.



***Obrázok 2**: Riešenie A úlohy„Trojuholníková geometria"*

Riešitelia *B* (Obrázok 3) riešili úlohu pomocou symbolického zápisu, matematickou argumentáciou a využitím znalostí o trigonometrii, goniometrických funkcií pravouhlého trojuholníka a Pytagorovej vety.



***Obrázok 3**: Riešenie B úlohy „Trojuholníková geometria"*

Bod *M* je stredom prepony trojuholníka *ABC*, čo ponúklo žiakom možnosť ďalej uvažovať o stredných priečkach MP_2 a MP_1. Trojuholník *ABC* je rovnoramenný, a tak platí:

$$M \equiv A \div C \implies BP_1 = P_1C = BP_2 = P_2A = \frac{a}{2}.$$

Ďalej uvažovali dva pravouhlé trojuholníky P_2ME a P_1FM. Trojuholníky majú zhodný uhol α, pretože uhly $\sphericalangle P_2ME$ a $\sphericalangle P_1FM$ sú súhlasné. Dĺžku úsečky *FE* vyjadrili ako súčet dĺžok prepôn trojuholníkov P_2ME a P_1FM, a tie vyjadrili na základe sínusu a kosínusu uhla α v pravouhlom trojuholníku nasledovne:

$$|FE| = |MF| + |ME| = \frac{a}{2} \times \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

Takto odvodenú dĺžku úsečky postavili väčšiu ako dĺžku prepony trojuholníka *ABC*, vyjadrenú vo všeobecnom tvare pomocou Pytagorovej vety. Po porovnaní vyjadrených dĺžok úsečiek uviedli na záver diskusiu o riešení v intervale, ktorý je pre správne riešenie úlohy vyhovujúci.

Diskusia

Porovnaním uvedených riešení so zostavenými rubrikami môžeme pozorovať prejavené kompetencie žiakov pri dokazovaní geometrického problému, ako aj identifikovať, či poznatky zodpovedajú iŠVP pre vyučovanie matematiky na gymnáziách.

Tím študentov pri riešení *A* zvolil konštruktívny typ dôkazu s využitím rotácie úsečky okolo bodu. Jedná sa o nápaditý a jednoduchý spôsob, ako ukázať správnosť tvrdenia. Avšak v ich postupe riešenia nie je zjavná schopnosť matematickej argumentácie. Inými slovami, aj napriek preukázaniu schopnosti vnímať súvislosti medzi matematickými objektmi a ich vlastnosťami, využili pri svojom opise riešenia neformálnu argumentáciu. Napríklad namiesto vyjadrenia *„úsečky sú vodorovne“* bolo potrebné aby použili formuláciu *„úsečka je rovnobežná s ramenom trojuholníka“*. Možno teda určiť, že na základe prejavených kompetencií v riešení zadania, žiaci tímu *A* dosahujú tretiu úroveň chápania geometrie. Dôkaz zadania v riešení *B* je matematická argumentácia postavená na odvolávaní sa na platné matematické vety a vlastnosti objektov, s ktorými žiaci pracovali. Na riešení je zrejmé, že žiaci sú si vedomí potreby matematického myslenia a usudzovania a vzájomnej prepojenosti vzťahov a vlastností objektov. V tomto prípade žiaci prejavili kompetencie rozvinuté na úrovni dedukcie, úroveň štyri.

Vzhľadom na opis kompetencií podľa Tabuľky 2, je na citovaných a analyzovaných žiackych riešeniach *A* a *B* vybranej úlohy, možné pozorovať rôzne stupne uplatňovania vedomostí získaných na hodinách matematiky.

Je potrebné podotknúť, že matematické kompetencie neboli v riešeniach *A* a *B*, sledované u jednotlivca, ale v rámci žiackych tímov. Pre komplexnejšie zhodnotenie skupinovej spolupráce pri riešení problému by bolo potrebné sledovať aj vzájomnú interakciu a komunikáciu medzi členmi tímu.

Záver

Význam sledovania a analýzy riešiteľského postupu žiakov pri riešení otvoreného matematického problému v geometrii je výzvou pre každého hodnotiteľa. Pre učiteľa, ktorý je zvyčajne primárnym hodnotiteľom žiakovho výkonu v matematike, je podstatné vedieť, na akej úrovni majú žiaci rozvinuté vedomosti a zručnosti.

Schopnosť dokázať matematické tvrdenie je ukazovateľom vyššej úrovne matematického myslenia. Sledovanie jednotlivých krokov v riešeniach žiakov vie učiteľovi dopomôcť k určeniu nedostatkov a medzier vo vedomostiach. Tabuľka 1 a Tabuľka 2 sú originálne nástroje vytvorené pre hodnotenie a analýzu žiackych riešení a predstavujú pilotný pokus v uvedenej problematike.

Pre učiteľov v praxi teda môžu uvedené rubriky pomôcť k sledovaniu vývoja matematických kompetencií žiakov. Na základe iŠVP a rešpektovaním zoradených matematických kompetencií je možné zostaviť podobné rubriky aj pre iné tematické celky, či špeciálne otvorené matematické problémy.

Literatúra

Brookhart, S. M. (2003). *How to Create and Use Rubrics for Formative Assessment and Grading*. Bauergard St.: ASCD. ISBN 978-1-4166-1507-1. Dostupné na internete: http://www.ascd.org/publications/books/112001/chapters/What-Are-Rubrics-and-Why-Are-They-Important%C2%A2.aspx

Blaško, M. (2010). *Úvod do modernej didaktiky I. (Systém tvorivo-humanistickej výučby)*. Košice: Katedra inžinierskej pedagogiky Technickej univerzity. ISBN 978-80-553-0462-5.

Hubeňáková, I. (2016) *Meranie kvality matematického vzdelávania – rubriky na meranie kvality formatívneho hodnotenia* [Dizertačná práca]. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa.

Lukáč, S., Sekerák, J. (2001). *Interaktívne vzdelávacie aktivity stimulujúce rozvíjanie kľúčových kompetencií* [in] Matematika Informatika Fyzika: didaktický časopis učiteľov matematiky, informatiky, fyziky. 36 (XIX), Prešov: Metodicko – Pedagogické centrum. Dostupné na internete: http://www.mcpo.sk/downloads/Publikacie/MIF/MIF36.pdf

Matematický B-deň (2015). Primas for Constantine The Philosopher University in Nitra. Dostupné na internete: www.primas.ukf.sk/download/bday/Mathematics%20B-day_2015_EN_for_SK.pdf

Mathematics Teacher Preparation in Calfornia (1992). Standards of Quality and Effectiveness for Subject Matter Programs. *Handbook for Teacher Educators and Program Reviewers*. California: Commission on Teacher Credentialing. Dostupné na internete: http://www.ncte.org/library/NCTEFiles/Groups/CEE/NCATE/HandbookReviewers_712.pdf

PRIMAS (2012) *Matematický B-day*. Primas for Constatine The Philosopher University in Nitra. Dostupné na internete: http://www.primas.ukf.sk/bday.html

Štátny pedagogický ústav (2015): *Inovovaný Štátny vzdelávací program* (Matematika – gymnázium so štvorročným a päťročným vzdelávacím programom. Bratislava: ŠPÚ. Dostupné na internete: www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_g_4_5_r.pdf

Usiskin, Z. (1982) *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*, Chicago, University of Chicago.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 2, p. 35 – 42
ISSN 2453-6083

Neštandardný pohľad na vybrané geometrické miesta bodov

Non-standard View of Selected Geometrical Locus

Michaela Florková*[a] – Lucia Rumanová[a]

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received 9 October 2016; received in revised form 19 October 2016; accepted 20 October 2016

Abstract

This paper is focused on a problem of visualization and manipulating activities in educational process which are related to geometrical loci in the Euclidean plane. Specifically, we present some didactic activities and their impact to a development of students knowledge basis. The discussion at the end of the paper includes feedback concerned with the didactic activities that we carried out with students.

Keywords: didactic activities, tools, geometrical locus, students.

Classification: D40, G43

Úvod

Geometrické vzdelávanie tvorí základ pre budovanie logického myslenia a rozvoja priestorovej predstavivosti. V článku sa budeme venovať vyučovaniu tematického celku geometrické miesta bodov z pohľadu zaradenia rôznych didaktických aktivít, použitia názorných učebných pomôcok a experimentovania do samotnej výučby. Uvedieme konkrétne ukážky vhodných aktivít pre žiakov základných a aj stredných škôl, ktorých zaradenie do reálnej výučby sme experimentálne overili prieskumnou sondou.

Rôzne didaktické aktivity a pomôcky vo vyučovaní geometrie

Inovovaný štátny vzdelávací program (2015) pre gymnázia so štvorročným a päťročným vzdelávacím program obsahuje Štátny vzdelávací program (ďalej ŠVP) pre gymnázia s osemročným vzdelávacím programom a aj ŠVP pre ostatné typy stredných škôl. Vzdelávací štandard je podľa ŠVP rozdelený na tematické okruhy.

Geometrické miesta bodov vo vyučovaní matematiky zahŕňa tematický celok *Geometria a meranie*, kde je presne vymedzená tematika (obsahom i rozsahom) „Množiny bodov daných vlastností a konštrukcie".

Objavovanie v geometrii prostredníctvom didaktických aktivít, manipulácií alebo používania učebných pomôcok vedie k nadobúdaniu neformálnych vedomostí žiakov, taktiež k utvrdzovaniu už ich nadobudnutých vedomostí.

*Corresponding author; email: michaela.florkova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.2.35-42

Uherčíková – Haverlík (2007) uvádzajú, že didaktické aktivity sú istou formou vzdelávania, tvorenou sledom rozmanitých výchovno-vzdelávacích činností, organizovaných najmä v menších skupinách, ktoré sú priamo i nepriamo motivované učiteľom.

Didaktickú aktivitu si učiteľ vyberá sám a prispôsobuje ju aj konkrétnym cieľom, ktoré chce dosiahnuť a podmienkam, ktorými disponuje. Zostavenie takýchto didaktických aktivít je jeho súčasťou prípravy na vyučovanie, pričom danú aktivitu si musí dobre naplánovať, vrátane používania potrebných učebných pomôcok.

Učebná pomôcka je súčasťou didaktických prostriedkov, t. j. ,,všetkých materiálnych predmetov, ktoré zaisťujú, podmieňujú a zefektívňujú priebeh vyučovacieho procesu''. (Skalková J., 2008)

Použitie učebných pomôcok zefektívňuje učebný proces a pomáha žiakom pochopiť matematickú podstatu poznatku, pričom zaradenie učebných pomôcok do výučby je vhodné pre všetky vekové kategórie. (Mink, D. V., 2004)

Didaktické aktivity zamerané na tematicky celok „Geometrické miesta bodov“

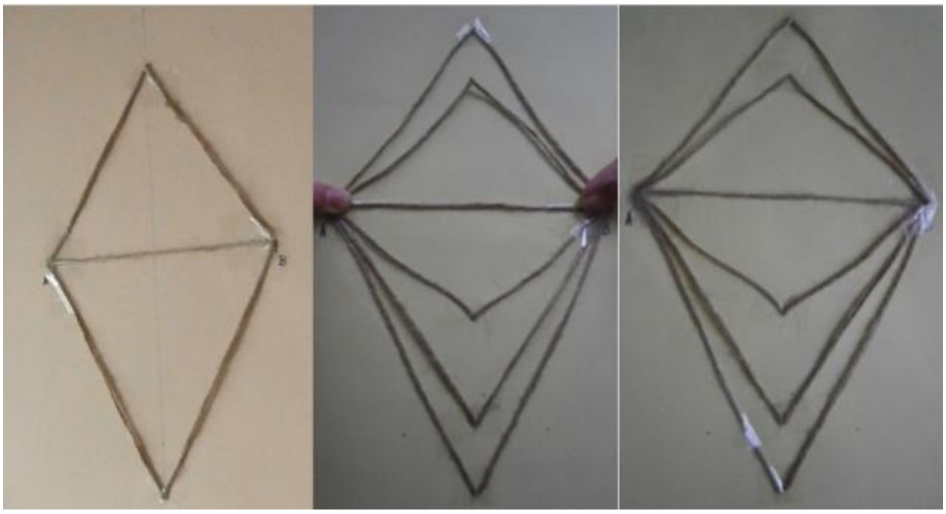
Nasledujúce ukážky popisujú didaktické aktivity, ktoré sme zostavili a domnievame sa, že sú vhodné pre školskú prax. Podľa nášho názoru vedú k lepšiemu osvojeniu a porozumeniu súvislostí niektorých geometrických miest bodov.

K tomuto záveru nás vedú skúsenosti, ktoré sme získali pri realizácii prieskumnej sondy. Didaktické aktivity boli zrealizované so 42 žiakmi dvoch tried 3. ročníka štvorročného gymnázia v Nitre. Žiaci boli rozdelení do 3 – 4 členných skupín, pričom v 1 triede bolo vytvorených šesť skupín žiakov. Dve skupiny žiakov vykonávali rovnakú aktivitu, pričom všetky skupiny spolu naraz realizovali tri z týchto aktivít. Potom každá skupina prezentovala svoju prácu pred všetkými. Každá aktivita trvala približne 10 – 15 minút na začiatku vyučovacej hodiny.

Aktivita 1: „Nájdite os úsečky“
Zadanie: Aká množina bodov danej vlastnosti v rovine má rovnakú vzdialenosť od dvoch koncových bodov úsečky? Pri riešení využite len papier, fixky, špagát, lepiacu pásku.
Pomôcky: papier, lepiaca páska, špagát, fixky
Popis aktivity: Pomocou špagátu mali žiaci znázorniť a na papier nalepiť úsečku ľubovoľnej dĺžky, pričom fixkou vyznačili koncové body danej úsečky (Obrázok 1).

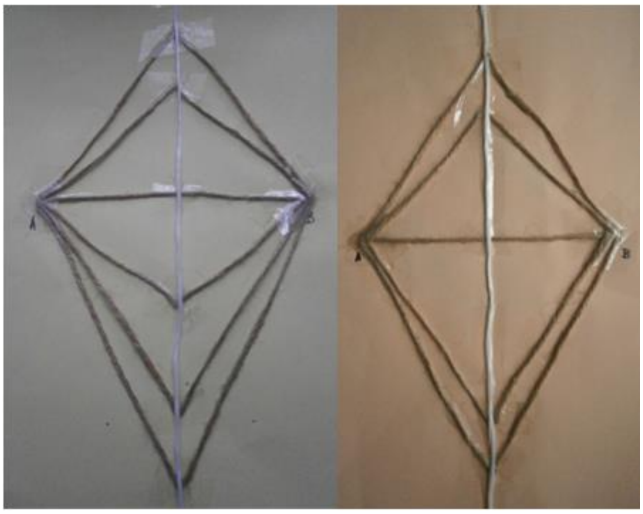
Obrázok 1

Potom si nastrihali dvojice rovnakých špagátikov, ktoré reprezentujú rovnaké vzdialenosti. Jeden koniec nastrihaného špagátika žiaci prilepili lepiacou páskou na začiatku úsečky, analogicky rovnako dlhý špagátik prilepili do druhého bodu úsečky. Pri napnutí a správnom nasmerovaní obidvoch špagátov sa tieto špagátiky žiakom stretli v jednom spoločnom bode, ktorý je rovnako vzdialený od začiatku aj konca úsečky. Ďalej sme ich vyzvali, aby postupovali analogicky, t. j. použili ľubovoľný počet špagátikov s inými dĺžkami (Obrázok 2).



Obrázok 2

Žiakom následne vznikali „nad aj pod“ úsečkou novovzniknuté body, ktoré spojili iným špagátom. Ako je vidieť na Obrázku 3, žiaci znázorňovali postupne body množiny, ktorá je známa pod pojmom *os úsečky*. Po experimentovaní sme definíciou zaviedli samotný pojem osi úsečky.



Obrázok 3

Aktivita 2: „Vymodelujte kružnicu“

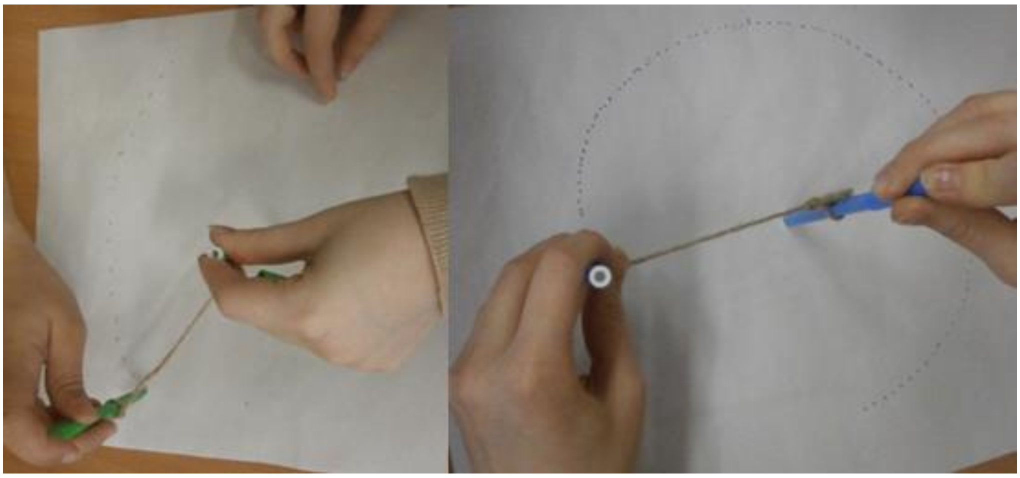
Zadanie: Aké geometrické miesto bodov v rovine má rovnakú vzdialenosť od jedného pevného bodu? Pri riešení využite len papier, fixky so špagátom.

Pomôcky: fixky, špagát, papier

Popis aktivity: Žiaci si odstrihli špagát s ľubovoľnou dĺžkou a na jeho obidvoch koncoch si uviazali fixky. Špagát medzi oboma fixkami reprezentuje rovnakú vzdialenosť dvoch bodov (Obrázok 4).

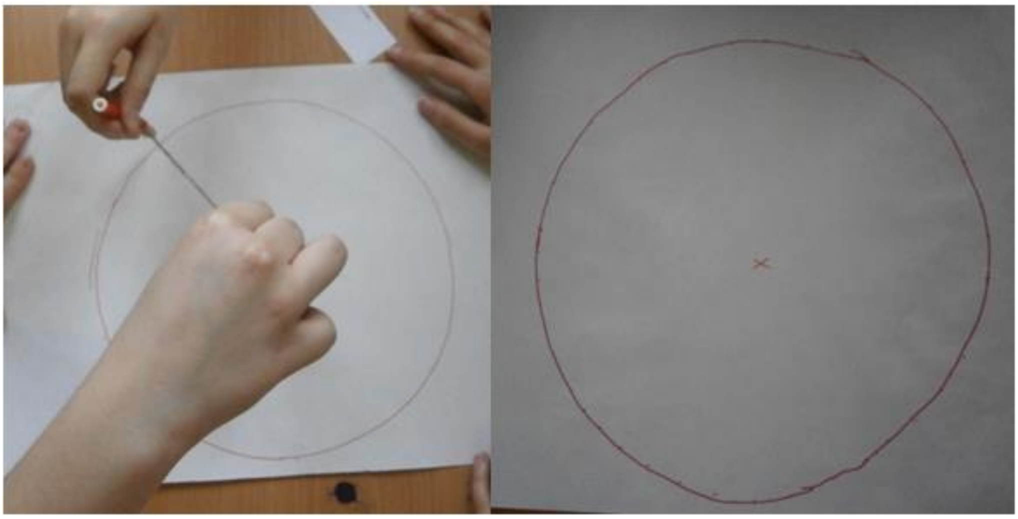
Obrázok 4

Na pripravenom papieri si žiaci následne vyznačili ľubovoľný bod. Pomocou fixiek uviazaných špagátom priložili jednu fixku („pevnú“) na vyznačený bod a pridržali ju v tomto bode. Druhou spojenou fixkou zaznačovali na papier ľubovoľný počet bodov, ktoré sú v rovnakej vzdialenosti od priloženej „pevnej“ fixky (Obrázok 5).



Obrázok 5

Z Obrázka 6 je vidieť, že spojením novovzniknutých bodov vykreslili žiaci geometrické miesto bodov – *kružnicu*. Samozrejme, po experimentálnej činnosti sme opäť definíciou zaviedli pojem *kružnice*.

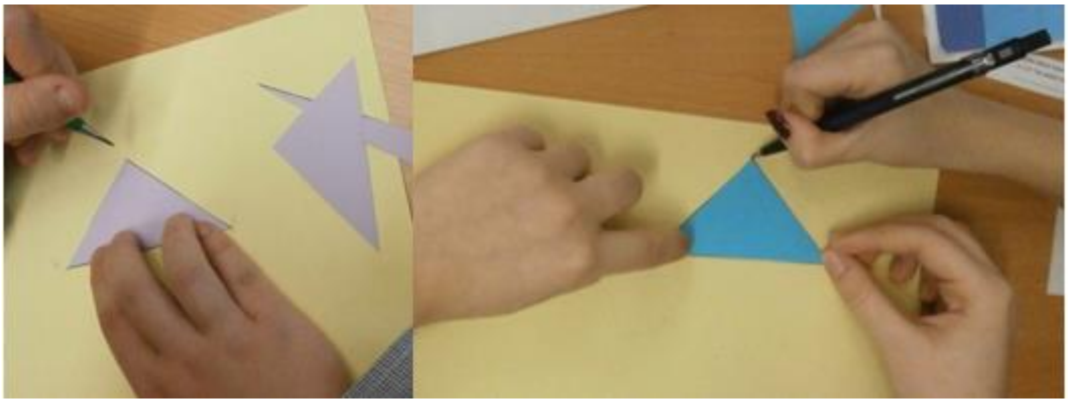


Obrázok 6

Aktivita 3: „Poznáte Tálesovu kružnicu?“
Zadanie: Aká množina bodov danej vlastnosti v rovine vznikne z vrcholov pravých uhlov pravouhlých trojuholníkov, ktoré majú zhodnú preponu? Pri riešení využite len papier, fixky, lepiacu pásku, pravítko.
Pomôcky: farebný papier, nožnice, pravítko, fixky, špagát, papier
Popis aktivity: Žiaci si z farebných papierov vystrihli niekoľko pravouhlých trojuholníkov so zhodnou preponou (Obrázok 7).

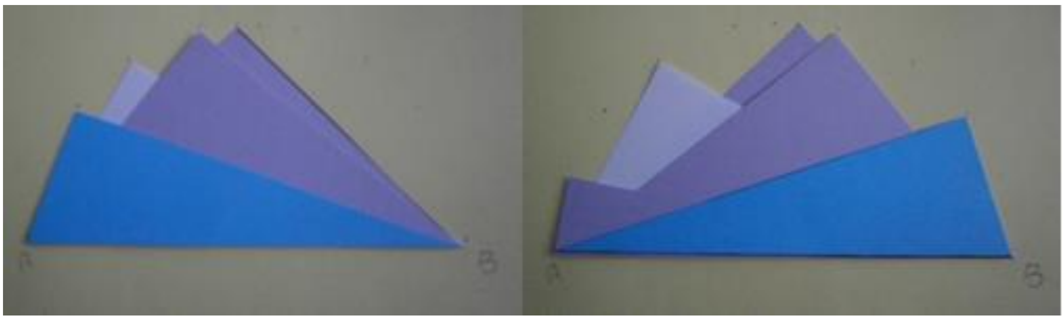
Obrázok 7

Na pripravený papier si žiaci mali narysovať fixkou úsečku s dĺžkou prepony jednotlivých pravouhlých trojuholníkov. Preponu niektorého vystrihnutého pravouhlého trojuholníka potom žiaci prikladali k narysovanej úsečke, tak, že ju prekrývala. Pri vrchole s pravým uhlom priloženého trojuholníka vyznačili bod na predloženom papieri (Obrázok 8).



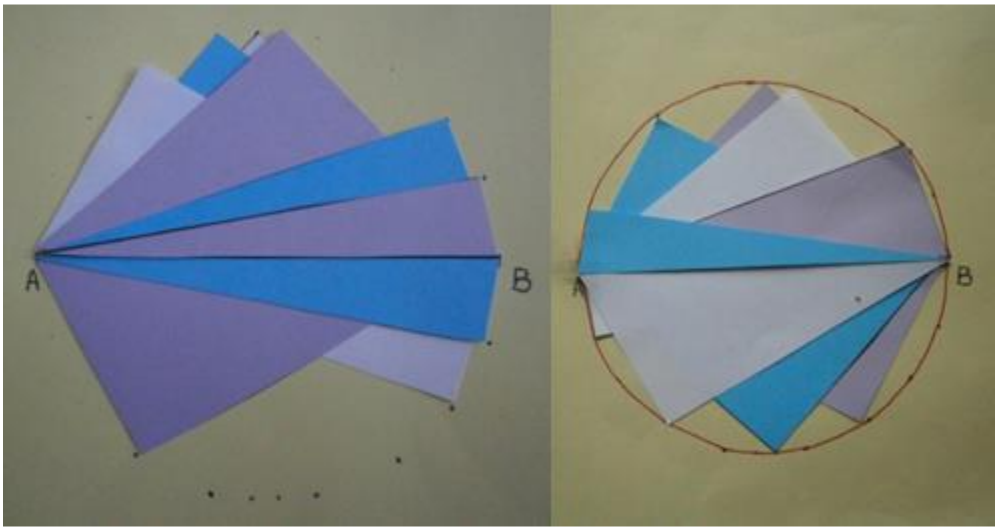
Obrázok 8

Žiaci analogickým postupom prikladali ďalšie vystrihnuté trojuholníky k narysovanej prepone so zhodnou preponou (Obrázok 9).



Obrázok 9

Z Obrázka 10 je zrejmé, že z vyznačených bodov (pri vrchole trojuholníka s pravým uhlom) aj s koncovými bodmi úsečky postupne dokážeme „vykresliť“ geometrické miesto bodov – *kružnicu*. Žiaci pochopili, že úsečka, na ktorú prikladali prepony pravouhlých trojuholníkov, je priemerom znázornenej kružnice. Kružnicu sme v zmysle štandardnej terminológie pomenovali ako *Tálesova kružnica*.



Obrázok 10

Diskusia a vyhodnotenie

Vytváranie pojmov a predstáv cez ukážkové ilustrácie, materiálne pomôcky a konkrétne poznatky je jedna zo základných požiadaviek vyučovania matematiky.

Z pozorovania sa ukázalo, že žiaci iniciatívne prejavovali záujem pri práci s pomôckami. Podľa nášho zistenia, väčšina žiakov bola spokojná so svojím riešením úloh v rámci popísaných didaktických aktivít. Napriek tomu, že bol v triede mierny hluk, aktivity žiakov zaujali, páčili sa im a aktívne na nich spolupracovali. Pozitívna bola pre nich kooperácia s inými žiakmi v skupinách, pretože mohli spoločne rozobrať daný problém, a tak komunikovať so spolužiakmi v prípade nejasností, vzájomných otázok.

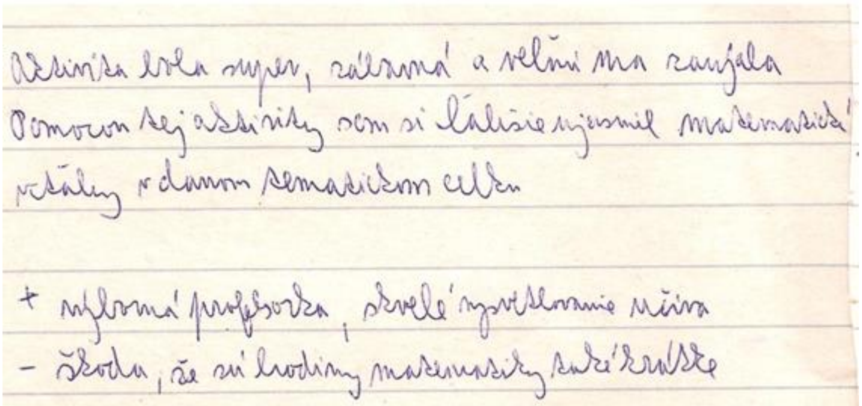
Vypozorovali sme, že aktivity a ich realizácia pozitívne vplývali na tvorivú atmosféru v triede, žiakov „naladili“ k ďalšej práci. Domnievame sa, že príčina tejto motivácie je skrytá v takomto štýle učenia. Žiaci sa totiž v rámci vyučovacieho procesu v matematike nestretávajú často s možnosťou experimentovať. Predmetná manipulácia je síce limitovaná fyzickými obmedzeniam modelu, ponúka však priestor pre tvorivé bádanie a konštruovanie predstavy o základných pojmoch a ich vlastnostiach. Je zrejmé, že manipulácia a riešenie úloh v uvedených aktivitách viacerým žiakom pomohlo k lepšiemu porozumeniu a ujasneniu si matematických vzťahov z danej problematiky. Je určite na diskusiu, či nie je pre žiakov stredných škôl neskoro, aby si predstavy o elementárnych útvaroch budovali ako stredoškoláci. Poznamenávame, že pre niektorých žiakov boli uvedené didaktické aktivity jednoduché, väčšina žiakov by privítala častejšie zaraďovanie podobných didaktických aktivít do vyučovania matematiky. Niektorí sa vyjadrili, že by sa im páčilo prepojiť jednotlivé aktivity s bežným životom.

Po zrealizovaní aktivít sme požiadali žiakov, aby nám uviedli spätnú väzbu v anonymnej forme. Na záver ponúkame výber niekoľkých postrehov z priebehu uvedených aktivít od samotných žiakov (formálny prepis pod obrázkom):


⊕ zaujímavý nápad s kruž.

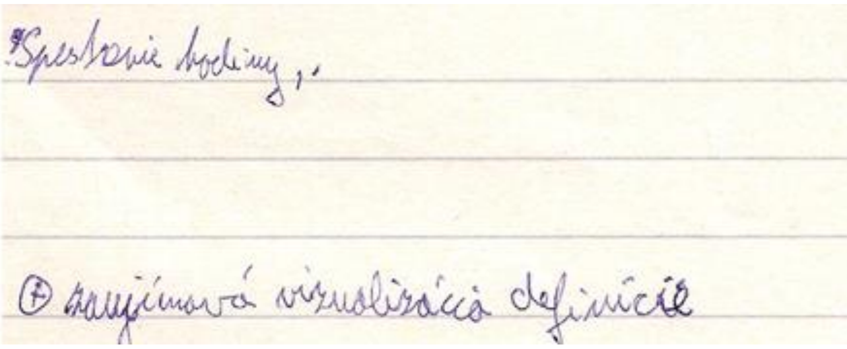
Obrázok 11

- *„zaujímavý nápad s kružnicou"*


Aktivita bola super, zábavná a veľmi ma zaujala
Pomocou tej aktivity som si ľahšie ujasnil matematické
vzťahy v danom tematickom celku
\+ výborná profesorka, skvelé vysvetlenie učiva
\- škoda, že sú hodiny matematiky také krátke

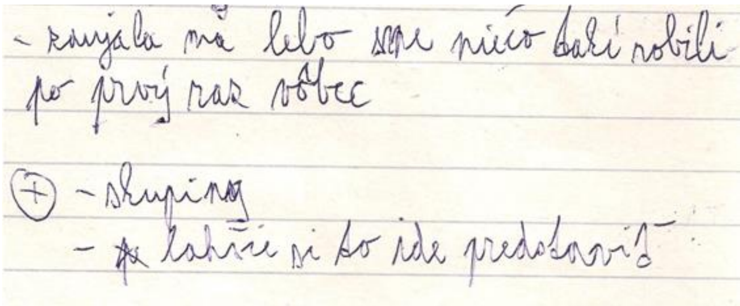
Obrázok 12

„Aktivita bola super, zábavná a veľmi ma zaujala. Pomocou tej aktivity som si ľahšie ujasnil matematické vzťahy v danom tematickom celku."


Spestrenie hodiny,
⊕ zaujímavá vizualizácia definície

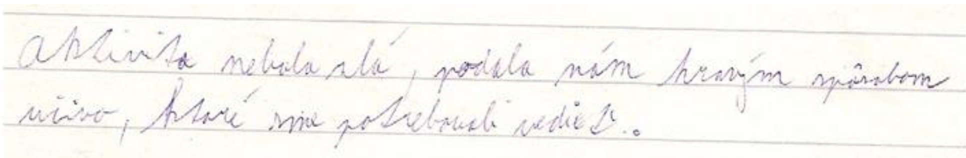
Obrázok 13

- *„spestrenie hodiny*
- *zaujímavá vizualizácia definície"*



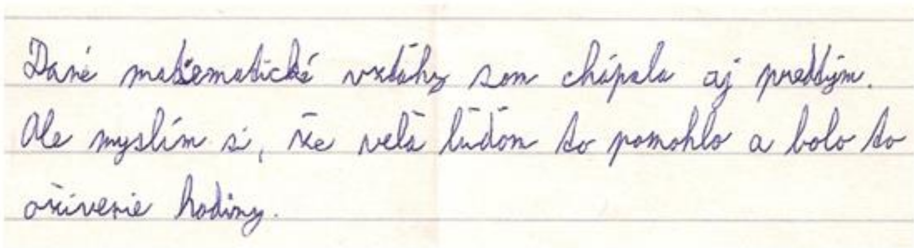
Obrázok 14

- *„zaujala ma lebo sme niečo také robili po prvý raz vôbec*
- *pozitívne – skupiny*
- *ľahšie si to ide predstaviť"*



Obrázok 15

„Aktivita nebola zlá, podala nám hravým spôsobom učivo, ktoré sme potrebovali vedieť."



Obrázok 16

„Dané matematické vzťahy som chápala aj pred tým. Ale myslím si, že veľa ľuďom to pomohlo a bolo to oživenie hodiny."

Literatúra

Inovovaný ŠVP pre gymnázia (2015). *Vzdelávacia oblasť Matematika a práca s informáciami – štvorročný a päťročný vzdelávací program – Matematika.* Dostupné na: http://www.minedu.sk/data/att/7904.pdf

Mink D. V. (2004). *Strategies for Teaching Mathematics*. Huntington Beach: Shell Education

Skalková, J. (2008). *Obecná didaktika*. Praha: Grada Publishing, a.s.

Uherčíková, V. - Haverlík, I. (2007). *Pracovné listy na rozvíjanie matematických predstáv u detí v MŠ a v ZŠ.* Bratislava: DONY

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 2, p. 43 – 48
ISSN 2453-6083

Arithmetic Mean and Geometric Mean

Marek Varga [a]* – Peter Michalička[b]

[a]Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra
[b] Narodna banka Slovenska, Imricha Karvasa 1, 813 25 Bratislava

Received 1 October 2016; received in revised form 12 October 2016; accepted 14 October 2016

Abstract

In mathematics we define several types of means. Probably the most known are the arithmetic and geometric means. If we are given n nonnegative numbers $x_1, x_2, \dots x_n$; then the number $A_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ we call the arithmetic mean and the number $G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ we call the geometric mean of the numbers given. In the first part of the paper with the use of functions´ their of more variables we will show that for each natural number n $A_n \geq G_n$ applies. In the second part we will try to show the same, however, without using the differential calculus.

Keywords: arithmetic mean, geometric mean, proof, differential calculus

Classification: E55

Introduction

When given n nonnegative numbers $x_1, x_2, \dots x_n$. Then the number $A_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ we call the arithmetic mean of the numbers $x_1, x_2, \dots x_n$. Number $G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ we call the geometric mean of numbers $x_1, x_2, \dots x_n$. We will try to find the relation between numbers A_n a G_n.

<u>Problem A1.</u>

Divide the positive number k into two addends so their product would be the highest the possible.

Solution.

(See in [2]) Lets divide number k into two parts, which will be labeled as x a y ($0 \leq x \leq k$; $0 \leq y \leq k$). Product of this two addends should be as high as possible, that is we search the global maximum of the function $s(x, y) = xy$; while $x + y = k$ applies. We can see, extreme of the two variables function should be found $s = s(x, y)$. However, it will be easier to calculate the global maximum of the one variable function. $s = s(x) = x(k - x)$; where $x \in \langle 0; k \rangle$. When solving the equation $s'(x) = 0$ we will get the stationary point $u_0 = \frac{k}{2}$. With the help of the second

* Corresponding author; email: mvarga@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.2.43-48

derivation $s''(x)$ and comparison of the value $s\left(\frac{k}{2}\right)$ with values $s(0)$, $s(k)$ we will find out, that the function $s(x)$ acquires its highest value in point $u_0 = \frac{k}{2}$. It means, that the function $s(x, y)$ acquires global maximum in the point $X_0\left[\frac{k}{2}; \frac{k}{2}\right]$. So if $0 \le x$, $0 \le y$, $x + y = k$, then $xy \le \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{2} = \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. Thence implies, that

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}, \text{ this is } G_2 \le A_2.$$

Problem A2.

Divide the positive number k into three addends so their product would be the highest the possible.

Solution.

(See in [1]) Lets divide number k into three parts, which will be labeled as x, y a z ($0 \le x \le k$; $0 \le y \le k$; $0 \le z \le k$). Product of this three addends should be as high as possible, that is we search the global maximum of the function $s(x, y, z) = xyz$; while $x + y + z = k$ applies. Again, we will make the problem easier – we will search global maximum of the two variable function

$$s(x, y) = xy(k - x - y)$$

in the domain restricted by the lines $x = 0$, $y = 0$, $x + y = k$. When solving the scheme of equation

$$s'_x(x, y) = 0$$
$$s'_y(x, y) = 0$$

we will get stationary points $U_0\left[\frac{k}{3}; \frac{k}{3}\right]$; $U_1[0; k]$; $U_2[k; 0]$; $U_3[0; 0]$. It will be easily possible to show that the function $s(x, y)$ acquires its highest value at the point $U_0\left[\frac{k}{3}; \frac{k}{3}\right]$. It means that the function $s(x, y, z)$ acquires global maximum at the point $X_0\left[\frac{k}{3}; \frac{k}{3}; \frac{k}{3}\right]$. Therefore if $0 \le x$, $0 \le y$, $0 \le z$, then $xyz \le \frac{k}{3} \cdot \frac{k}{3} \cdot \frac{k}{3} = \left(\frac{k}{3}\right)^3 = \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ applies. Thence it follows that

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}, \text{ that is } G_3 \le A_3.$$

Problem A3.

Find the highest value of the *n* – extraction of the n positive numbers x_1, x_2, ... x_n product when conditioned that the sum of these numbers is equal to number *k*.

Solution.

(See in [1]) In the previous sum we have found the maximum of the function $s(x_1, x_2, \dots x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, while $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ applies. We say that by the equality $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ the bond is given, that is we calculate the fixed extreme of the function $s(x_1, x_2, \ldots x_n)$. We will set the Lagrange function

$$L(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} + \lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - k).$$

Stationary points will be found when solving the system of equations

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda)}{\partial x_1} = 0 \\
&\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda)}{\partial x_2} = 0 \\
&\vdots \\
&\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda)}{\partial x_n} = 0 \\
&\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda)}{\partial \lambda} = 0
\end{aligned}$$

we obtain

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{n} \frac{x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{n-1}{n}}} + \lambda = \frac{1}{n} \frac{L}{x_1} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad L = -n\lambda x_1 \\
&\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{n} \frac{x_1 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{n-1}{n}}} + \lambda = \frac{1}{n} \frac{L}{x_2} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad L = -n\lambda x_2 \\
&\vdots \\
&\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{1}{n} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}}{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{n-1}{n}}} + \lambda = \frac{1}{n} \frac{L}{x_n} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad L = -n\lambda x_n \\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - k = 0
\end{aligned}$$

Since $n\lambda x_1 = n\lambda x_2 = \ldots = n\lambda x_n$, the equality $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ have to apply. Thence out of the equation $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ it follows that $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{k}{n}$. It could be verified, that the function $s(x_1, x_2, \dots x_n)$ acquires at the point $X_0\left[\frac{k}{n}; \frac{k}{n}; \dots; \frac{k}{n}\right]$ fixed global maximum. That means

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \sqrt[n]{\frac{k}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{n}} = \frac{k}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

applies, or $G_n \leq A_n$.

Problem B1.

Prove that for $\forall x_1, x_2 \in R : x_1 > 1 \wedge x_2 < 1 \Rightarrow x_1 + x_2 > x_1 x_2 + 1$.

Solution.

(See in [3]) Probably $x_2 < 1 \Leftrightarrow 1 - x_2 > 0$. Then $0 < 1 - x_2 < x_1(1 - x_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 1 + x_1 x_2$ due to $0 < 1 < x_1$, what had to be shown.

Problem B2.

Prove that for $x_i \in R^+$, $i = 1, 2, \dots, n$, and $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$ applies $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$.

Solution.

(See in [4]) The sum will be proved by mathematical induction:

a) n = 1: $x_1 = 1 \Rightarrow x_1 \geq 1$ trivially applies;

b) n = 2: $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2 = 1 + x_1 x_2$ applies according to the sum B1, consider:

If $x_1 x_2 = 1$ then either $x_1 = x_2 = 1$ and the sum is trivial again and $x_1 + x_2 = 2$, or $x_1 \neq x_2$. Then $x_1 = 1/x_2 \Leftrightarrow x_2 = 1/x_1$ and without any loss on generality it is possible to suppose that e.g. $x_1 > 1 \wedge (0 <) x_2 < 1$. Then according to B1 it is obvious that $x_1 + x_2 > x_1 x_2 + 1$, however when $x_1 x_2 = 1$, then $x_1 + x_2 > 2$. When combining the trivial and the general parts we get the affirmation in the form for n = 2: $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2 = 1 + x_1 x_2$.

c) Lets follow in the induction generally. When $x_i = 1$ for $\forall\ i = 1,\ 2 \ldots.\ n$, the affirmation applies trivially (with the character of equality).

Let for $x_i \in R^+$, $i = 1, 2, \dots, n$, holds $\prod_{i=1}^{k} x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i \geq k$. Assume now that for $y_j \in R^+$, $j = 1, 2, \dots, n + 1$, holds $\sum_{j=1}^{n+1} y_j = 1$. Without any loss of generality of the sum we will re-label the numbers, so $y_1 \leq 1$ and $y_2 \geq 1$.

Then $(1 - y_1)(1 - y_2) \leq 0$, or $1 + y_1 y_2 \leq y_1 + y_2$, and we obtain $1 + y_1 y_2 + y_3 + \cdots + y_{n+1} \leq y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n+1}$.

Mark $x_1 = y_1 y_2,\ x_2 = y_3, \dots, x_n = y_{n+1}$. Then $\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{j=1}^{n+1} y_j = 1$. On base of induction hypothesis $\sum_{i=1}^{n} x_i \ge n$. Then we have

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = y_1 y_2 + \sum_{j=3}^{n+1} y_j \ge n \text{ and so } 1 + y_1 y_2 + \sum_{j=3}^{n+1} y_j \ge 1 + n.$$

But $y_1 + y_2 \ge 1 + y_1 y_2$, so

$$y_1 + y_2 + \sum_{j=3}^{n+1} y_j \ge 1 + n, \text{ finally } \sum_{j=1}^{n+1} y_j \ge 1 + n.$$

Problem B3.

Prove that for: $\forall x_i \in R^+$ pre $i = 1, 2, \dots n$ platí$: G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = A_n$ (thus the geometric mean G_n of positive real numbers x_i is smaller or at a most equal to the arithmetic mean A_n of these numbers).

Solution.

(See in [3]) If the inequality that have to be proved will be simply turned into the form $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ and multiplied by the term $\frac{n}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}}$, we will get $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} \ge n$. Lets label $\frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} = y_i$. Probably $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} = \sum_{i=1}^{n} y_i$, where $y_i > 0$ for $\forall\, i = 1, 2 \dots n$. Finally, the reader will consider that $\prod_{i=1}^{n} y_i = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right)^n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\prod_{i=1}^{n} x_i} = 1$, so the numbers $y_i = \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}}$ meet the requests from the sum B2 thanks to what the proved inequality $G_n \le A_n$ applies.

Conclusion

Using two different strategies (based on applying of differential calculus of function of more variables and using mathematical induction too) we have shown a well known inequality between geometric mean and arithmetic mean. We are sure there could be illustrated further extension and generalization of this relation. Namely more complex inequalities could be demonstrated using college knowledge, such as $H_n \le G_n \le A_n \le K_n$, where $H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$ is harmonic mean and $K_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ is quadratic mean.

References

[1] MAREK VARGA: *Zbierka úloh z matematickej analýzy II*; FPV UKF Nitra, 2005, ISBN 80-8050-865-8

[2] PETER MICHALIČKA: http://www.elearn.ukf.sk/file.php/21/MATIND.PDF, e-learn kurz

[3] ZBYNĚK KUBÁČEK, JÁN VALÁŠEK: *Cvičenia z matematickej analýzy I*, UK Bratislava, 1994, ISBN 80-223-0749-1

[4] ALOIS KUFNER: *Nerovnosti a odhady,* ŠMM, Mladá Fronta, Praha, 1975. - 120 s.