

Acta Mathematica Nitriensia
free electronic journal



Názov / Title

Acta Mathematica Nitriensia

Všeobecne o časopise

ISSN 2453-6083 (online)

On-line elektronický vedecký časopis venovaný otázkam teórie vyučovania matematiky

Periodicita: 2x ročne

Otvorený prístup

Pokyny pre autorov<http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php><http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php>**Recenzné konanie**

Časopis uskutočňuje dvojité anonymné a nezávislé recenzné konanie zaslaných príspevkov.

Dostupnosťwww.amn.fpv.ukf.sk**Vydavateľ**

Katedra matematiky

Fakulta prírodných vied

Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

Tr. A. Hlinku 1

949 74 Nitra

Slovensko

General information

ISSN 2453-6083 (online)

Free electronic scientific journal focused to current problems in mathematical education theory

Periodicity: twice a year

Open Access

Guidelines for authors<http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php><http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php>**Review process**

The journal carries out a double-blind peer review evaluation of drafts of contributions.

Available fromwww.amn.fpv.ukf.sk**Publisher**

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences

Constantine the Philosopher University in Nitra

Tr. A. Hlinku 1

949 74 Nitra

Slovakia

Redakčná rada / Editorial Board

Šéfredaktor / Editor in Chief: Dušan Vallo

Vedeckí editori / Associate editors:

prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc., prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc., prof. RNDr. Dagmar Markechová, CSc.

Editori / Editors: doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc., doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD., doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD., doc. PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.,

PaedDr. Lucia Rumanová, PhD., doc. RNDr. Iveta Scholtzová, PhD., doc. RNDr. Peter Vrábel, CSc.,

PaedDr. Júlia Záhorská, PhD

Technickí editori/Manuscript editors: RNDr. Kitti Vidermanová, PhD., doc. PaedDr. PhDr. Valéria Švecová, PhD.

Jazykový editor / Language editor: Mgr. Zuzana Naštická, PhD.

Editor webu / Web page editor: RNDr. Viliam Ďuriš, PhD.

Údaje k aktuálnemu číslu

Ročník: 1

Číslo: 2

Rok: 2015

Dátum vydania: 19. 10. 2015

Information to current issue

Volume: 1

No.: 2

Year: 2015

Publication date: October 19, 2015

Obsah

Fulier J., Tkačik Š.: Matematik Galileo a jeho dielo

Discorsi 1-14

Vrábel P.: Theoretical and Didactic Aspects of

Numeration of Real Numbers 15-20

Smiešková E.: Kreslíme ako Esher alebo umenie

zhodných zobrazení 21-28

Major J., Major M.: Developing Combinatorial

Thinking 29-34

Klimentová L., Šunderlík J.: Identifikácia

profesionálnej identity učiteľa matematiky 35-41

Vallo D.: Metodicko-terminologické nezrovnalosti vo

svete DGS 42-51

Varga M.: Načo im bola matematika 52-59

Content

Fulier J., Tkačik Š.: The Mathematician Galileo Galilei and his Work Discorsi 1-14

Vrábel P.: Theoretical and Didactic Aspects of Numeration of Real Numbers 15-20

Smiešková E.: The Drawing as Esher or the Art of Transformations 21-28

Major J., Major M.: Developing Combinatorial Thinking 29-34

Klimentová L., Šunderlík J.: Identification of professional Identity of Mathematics Teacher 35-41

Vallo D.: Methodological and terminological Inconsistencies in the Domain of DGS 42-51

Varga M.: What They Needed Mathematics for 52-59

Vítězová Z., Naštická Z.: Teacher trainees crossing the barrier between the concrete and the abstract - (mis)understanding of geometric concepts 60-67
Tomková V., Honzíková J.: Význam geometrie v technickom vzdelávaní žiakov 2. stupňa základnej školy 68-73
Chytrý V., Kroufek R., Janovec J.: Hra NIM jako nástroj pro výuku specifických oblasti matematiky a programování 74-82

Vítězová Z., Naštická Z.: Teacher trainees crossing the barrier between the concrete and the abstract - (mis)understanding of geometric concepts 60-67
Tomková V., Honzíková J.: The Importance of Geometry in Technical Education of Pupils at Lower Secondary Level 68-73
Chytrý V., Kroufek R., Janovec J.: NIM Game as a Tool for the Teaching of Specific Areas of Mathematics and Programming 74-82

Matematik Galileo Galilei a jeho dielo Discorsi

The mathematician Galileo Galilei and his work Discorsi

Jozef Fulier^a, Štefan Tkačík^b

^a Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr.
A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,

^b Department of Mathematics, Faculty of Education, Catholic University in Ružomberok, Hrabovská cesta 1A,
SK-034 01 Ružomberok

Received 6 October 2015; received in revised form 10 October 2015; accepted 13 October 2015

Abstract

This paper is devoted to the mathematical heritage of Galileo Galilei, the recognized Italian Renaissance mathematician, physicist, astronomer and philosopher. The contents of Galileo's work known as Dialogues Concerning Two New Sciences, which was translated into the Slovak language within a project supported by the Cultural and Educational Grant Agency of the Slovak Republic, provide clear evidence that Galileo was not only a physicist, but also a distinguished mathematician among his contemporaries, who left his mark in the history of mathematics. In addition, in this paper we deal with the relation between mathematics and physics with emphasized focus on several other great mathematicians who are generally perceived only as physicists or inventors.

Keywords: Galileo Galilei, mathematics, physics, history of mathematics.

Classification: A30, M50

1 Úvodné poznámky

V tomto článku sa budeme zaoberať matematickým odkazom významného talianskeho matematika, fyzika, astronóma a filozofa obdobia renesancie Galilea Galileiho (1564 – 1642). Dôvod je pomerne prostý. Táto téma istým spôsobom vyplynula z riešenia projektu Kultúrnej a edukačnej grantovej agentúry (KEGA) s názvom „Využitie pôvodných matematických demonštrácií a fyzikálnych pokusov, ktoré použil Galileo Galilei v mechanike a pohybe telies vo vyučovaní na základných a stredných školách“ na PF Katolíckej univerzity v Ružomberku a na FPV Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre.

Projekt je zameraný na spracovanie revolučných myšlienok a postupov, ktoré v roku 1638 uverejnil Galileo Galilei vo svojom vrcholnom diele „*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali*“ (Rozhovory a matematické dôkazy o dvoch nových vedách, o mechanike a pohybe telies). V ďalšom budeme často používať iba skrátený názov tohto diela **Discorsi**[‡].

Týmto dielom, ktoré bolo uverejnené na sklonku Galileiho života (a to v rodnej taliančine a nie latinčine, ako bývalo zvykom u vedeckých prác), Galilei položil základy novej vednej

*Corresponding author; email: jfulier@ukf.sk

†Corresponding author; email: stefan.tkacik@ku.sk

‡ V anglických prekladoch tohto diela sa spravidla používa názov *Dialogues Concerning Two New Sciences*.

DOI: 10.17846/AMN.2015.1.2.1-14

disciplíny – *mechaniky*. Pre preklad a spracovanie tejto tohto vrcholného diela Galilea Galileiho z taliančiny do slovenského jazyka (doposiaľ totiž nebolo toto dielo preložené do slovenského a ani českého jazyka) nás inšpiroval náš priateľ, český matematik svetového formátu, *prof. Petr Vopěnka*^{*}. *Prof. Vopěnka* nám dokonca poskytol jeden z mála exemplárov skutočných originálov[†] výtlačku Galileovej knihy *Discorsi* (vytlačenej v roku 1638 v holandskom Leidene), ktorý vlastnil. S *prof. Vopěnkou* sme odkonzultovali celý rad problémov, ktoré vznikali pri prekladaní toho diela do slovenčiny, či pri riešení rozličných otázok spojených jednak pri realizácii vedeckých seminároch venovaných životu a dielu Galilea. Pán profesor nám vždy veľmi ochotne pomohol a preto nás veľmi zarmútilo, keď sme sa dozvedeli, že *prof. Vopěnka* na jar roku 2015 zomrel. Je vhodné poznamenať, že na preklade tohto Galileiho diela z taliančiny veľký kus práce odvieďa Dr. Rosangela Libertini, ktorej patrí vďaka i za to, že sa nám podarilo nadviazať aj kontakt s *Accademia della crusca* vo Florencii, kde sa zachovali pôvodné Galileove listy, ktoré sa objasňujú niektoré aspekty tvorby jeho diela *Discorsi*.

2 Matematik Galileo versus fyzik Galileo

Galileo Galilei (1564 – 1642) bol významný taliansky matematik, fyzik, astronóm a filozof obdobia renesancie. Galileo Galilei patrí spolu s Michelangelom, Raffaelom, Napoleonom k malej skupine významných osobností novovekej histórie ľudstva, ktorých zvyčajne oslovujeme temer familiárne - iba ich krstnými menami. Väčšina ľudí si o Galileovi zo školských čias si zväčša pamätá len dve, príp. tri skutočnosti: na Šikmú vežu v jeho rodnej Pise, a na proces, ktorý viedla proti nemu inkvizícia, príp. niektorí z nich si možno ešte spomenú na legendu (ktorá je s veľkou pravdepodobnosťou nepravdivá) spojenú s Galileovým výrokom „*A predsa sa točí!*“ (Zem sa otáča okolo svojej osi) - po taliansky *Eppur si muove!*.

Temer všetky populárno – vedecké publikácie, o tomto vedcovi, ba dokonca aj niektoré publikácie vedeckého charakteru, zaraďujú Galilea Galileiho medzi významných fyzikov, resp. astronómov, ale už pomenej ho zaraďujú aj medzi význačných matematikov uvedeného obdobia. O tom, že **Galilei bol aj matematik**, sa často v rozličných publikáciách, najmä encyklopedického charakteru vôbec nedozvieme. Do istej miery ide o veľmi zvláštnu situáciu, pretože v priebehu celého svojho života Galileo Galilei pracoval a dostával plat za prácu *univerzitného profesora matematiky* či *dvorného matematika*. O fakte, že Galileo sa naozaj za matematika považoval, svedčia nielen slová Sagreda (reprezentoval postavu samotného Galileiho v jeho diele *Discorsi*), ale svedčí o tom aj list, ktorý Galilei v roku 1636 napísal svojmu priateľovi *E. Diodatimu*, v ktorom sa Galilei označuje za odborníka v geometrii, inými slovami za *odborníka v matematike*. Toto je dosť dôležité, pretože asi vhodné poznamenať, že vo všeobecnosti prirodzene nestačí, aby sme mohli okamžite zaradiť Galilea Galileiho

^{*} *prof. RNDr. Petr Vopěnka, DrSc.* (1935 - 2015), pôsobil na Matematicko-fyzikálnej fakulte UK v Prahe a neskoršie od roku 2003 na Západočeskej univerzite v Plzni, v rokoch 1990 -1992 bol ministrom školstva ČR. Výsledky svetového významu dosiahol, keď v sedemdesiatich rokoch 20. storočia založil a so svojimi žiakmi rozvinul tzv. *alternatívnu teóriu množín* (alternatívnej voči klasickej *Cantorovej teórii*). Neskoršie sa začal venovať filozofickým a historickým otázkam matematiky. Jeho najznámejším dielom je *Uhelný kámen európskej vzdelanosti a moci*. Veľký kus práce odvieďol pri prekladoch historicky významných textov (*Euklidove Základy, Aritmetický a algebraický traktát Al Chvárizmího*) do českého jazyka, čím ich sprístupnil aj pre slovenského čitateľa.

[†] Originály tejto knihy sú veľmi drahé. Ide totiž o knižné artefakty staré takmer 400 rokov. Na ilustráciu uvedme, že v posledných desaťročiach boli v renomovaných aukčných sálach vydražené minimálne dva originály Galileiovho diela *Discorsi*: 25 000 GBP (Sotheby's), za 30 550 \$ (Christie's) v roku 2001.

medzi matematikov (presnejšie medzi dôležitých matematikov svojej doby), pretože jeho mimopracovná činnosť, vrátane jeho publikačnej činnosti by mohla byť orientovaná na vedeckú oblasť, ktorá nekorešponduje s jeho povolaním. Takých prípadov história zaznamenala veľmi veľa. Žiarivým príkladom je *Pierre de Fermat* (1601 – 1665), povolaním právnik, ktorý napriek tomu, že sa venoval matematike iba vo svojom voľnom čase, dosiahol v matematike (analytická geometria, teória čísel, teória pravdepodobnosti, matematická analýza) také vynikajúce výsledky, že je právom považovaný za jedného z najväčších matematikov všetkých čias. Ďalším veľkým amatérom v matematike bol aj teológ, filozof, logik Bernard Bolzano (1781 - 1848), ktorý je považovaný za najväčšieho českého (nemecky hovoriaceho) matematika.*. Toto však nie je celkom prípad Galilea Galileiho, pretože Galilei sa celý život zaoberal matematikou nielen v spojitosti s prácou profesora matematiky[†], za ktorú dostával plat, ale matematikou sa zaoberal aj vo svojom voľnom čase a temer všetky jeho práce sú buď priamo o matematike, alebo je v nich matematika tvorivým spôsobom využívaná. Svedčí o tom aj fakt, že samotný Galileo sa za matematika naozaj považoval, čo dokumentujú nielen slová *Sagreda* (reprezentoval postavu samotného Galileiho) v jeho diele *Discorsi*, ale svedčí o tom aj dopis, ktorý Galilei v roku 1636 napísal svojmu priateľovi *E. Diodatimu*, v ktorom sa Galilei označuje za odborníka v geometrii, inými slovami za *odborníka v matematike*. Je preto dosť zaujímavé, že napriek tomu matematický prínos Galileiho diela zostal pre širšiu odbornú verejnosť úplne nepovšimnutý, či dokonca úplne ignorovaný‡.

Na tomto mieste rozhodne nechceme zľahčovať Galileov prínos pre fyziku, lebo ten bol obrovský a určite hlboko a na dlhú dobu ovplyvnil dovtedajší fyzikálny i filozofický obraz sveta. Iba chceme pripomenúť a zdôrazniť, že na tomto diele má nemalé zásluhy **Galilei ako matematik a jeho exaktný matematický spôsob myslenia a uvažovania** získané poctivým štúdiom prác Euklida, Archimeda a ich nasledovníkov, ktoré matematizáciou vied o prírode, konkrétne mechaniky, zmenilo po roku 1600, ponímanie dovtedajšej fyziky, ktorá bola do tých čias v područí Aristotelovej prírodnej filozofie. Skutočnosť, že Galileo dosiahol oslňujúce výsledky na poli fyziky, jednoducho nemôže byť dôvod na to, aby sme ignorovali jeho matematické výsledky, jeho prínos pre matematiku. Zaujímavé je, že história je nespravodlivá voči Galileovi aj z iného hľadiska. Totiž Galileova duchaplná obhajoba kontroverzného Koperníkovho heliocentrického systému, ktorú završil v roku 1632 v diele *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (*Dialógy o dvoch hlavných systémoch sveta*), spolu s jeho následným odsúdením inkvizíciou§ v roku 1633 zatienila, najmä pred širšou odbornou verejnosťou, nielen výsledky z matematiky, ale aj jeho najdôležitejšie výsledky z fyziky sú z časti poznateľné už v tomto diele, ale hlavne tie výsledky na poli fyziky, ktoré boli

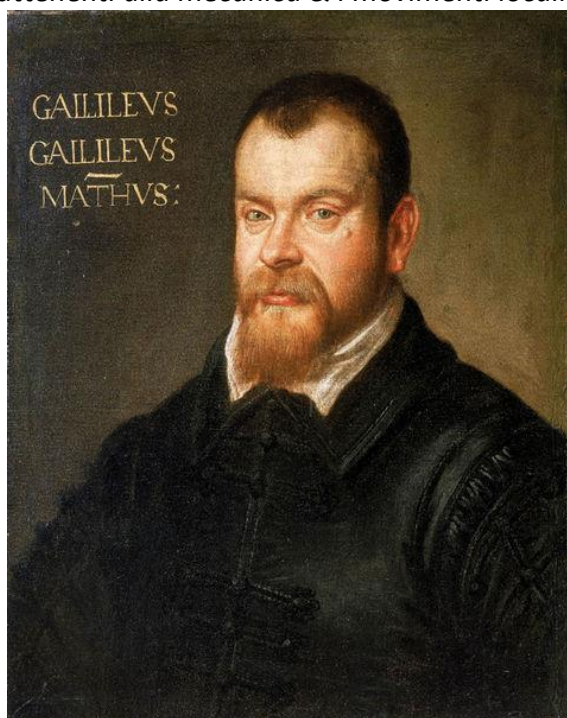
* Možno však spomenúť aj ďalšie mená, napríklad *Gerberta z Aurillacu* (950 -1003), jedného z najväčších matematikov západného sveta svojej doby, ktorý bol mníchom, biskupom a nakoniec pápežom (999-1003), známym pod menom *Silvester II*. V tejto súvislosti treba priznať, že v najmä v období stredoveku nájdeme medzi mníchmi, biskupmi veľa vynikajúcich matematikov (*Alcuin*, *Oresme* a pod.) čo pravdepodobne súviselo aj s tým, že to bola jedna z mála vrstiev obyvateľstva, ktorá mala v tom období prístup k vzdelaniu.

† Galileo pôsobil na ako *univerzitný profesor matematiky* na Univerzite v Pise v rokoch 1589 -1592 a v rokoch 1592 -1610 na Univerzite v Padove. Následne v rokoch 1610 – 1632 pôsobil vo Florencii ako filozof a dvorný matematik vojvodu z Toskánska *Cosima II.*, zo významného rodu Medicejovcov, bez povinnosti prednášať študentom.

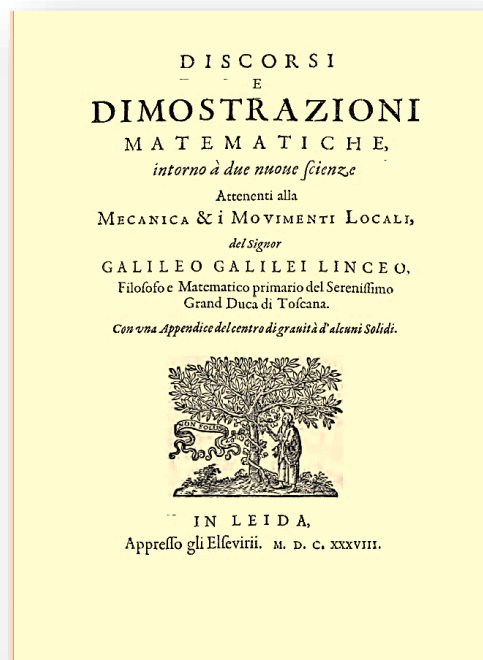
‡ Na tomto majú zásluhu aj samotní fyzici, ktorým sa vytrvalým zdôrazňovaním zásluh Galilea na vzniku novej fyziky a nového ducha vedy podarilo potlačiť u Galilea Galileiho jeho status *matematika*.

§ V roku 1992 (359 rokov od procesu s Galileom) pápež Ján Pavol II. vydal ospravedlnenie, ktorým zrušil výnos inkvizície z procesu s Galileom.

uverejnené v diele *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali*, a o ktorých širšia verejnosť temer nič nevie.



Obr. 1. Galileo Galilei, matematik
(autorom olejomalby je Dominico Robusti, v súčasnosti uložená je v National Maritime Museum of London)



Obr. 2. Titulná strana Galiliovho diela *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze a meccanica & i movimenti locali* (1638)

V *Dialógoch* sa viac-menej zavrášila *heliocentrická predstava slnečnej sústavy*, ktorá sa síce mohla spresňovať, no jej základy už nezniesli nijakú revíziu. To však ešte nebol všeobecný obraz sveta, ktorý by zahrnoval všetky prírodovedné poznatky. Predpokladom takéhoto obrazu bolo zjednotenie *heliocentrickej astronómie s mechanikou pozemských telies*, o ktoré sa zaslúžil o čosi neskôr jeden z najväčších fyzikov (sformuloval prvú teóriu sily a gravitácie), ale súčasne aj jeden z najväčších matematikov (ako spoluzakladateľ infinitezimálneho počtu) v histórii vedy vôbec, *Isaac Newton* (1643 - 1727).

Najprv však bolo potrebné položiť *základy mechaniky pozemských telies*. Toto sa s využitím matematických metód, exaktného matematického spôsobu uvažovania, podarilo práve G. Galileimu. Galileo Galilei začal okrem pozorovania v širšom meradle využívať *experimenty* (fyzikálne aj myšlienkové), *meranie skúmaných veličín* vstupujúcich do experimentu a úvahy založené nielen na aristotelovskej logike*, ale najmä na *matematických metódach*, na presnej *matematickej argumentácii*. Poznamenajme, že experiment je vyjavením ideálnej podstaty javu pomocou umelo navodenej situácie. Meranie je založené na tom, že umelú situáciu, t. j. predmety, vzťahy a postupy, ktoré ju konštituuju, postupne štandardizujeme. Týmto sa merací prístroj vlastne stáva nástrojom na uskutočnenie programu *matematizácie prírody*.

* *Aristoteles zo Stageiry* (384 pred Kr. -322 pred Kr.) bol starogrécky filozof a encyklopedický vedec zakladateľ logiky a mnohých ďalších vedných odvetví. Aristotelovská logika je časť je časť tradičnej logiky rozpracovaná Aristotelom a jeho nasledovníkmi; ktorej základom je teória kategorického sylogizmu založená na kategorickom a modálnom sylogizme. Zjednodušene povedané, z dvoch súdov (premís) sa *čistou myšlienkovou operáciou* (dedukciou) vytvára záver (konklúzia).

Podľa L. Kvasza (Kvasz, 1999) Galilei sa svojou koncepciou matematizácie prírody voči prevládajúcim Aristotelovým názorom na prírodovedu jasne vymedzil. Z nej totiž (mimo iného) vyplýva, že každý prírodný jav má povahu matematických ideálít. U niektorých charakteristík javov ako *dĺžka* alebo *tvár* sme schopní priamo nahliadnuť ideálne matematické objekty, ktoré tvoria ich podstatu. U iných javov ako *teplo*, *tlak* alebo *pohyb* žiaden ideálny objekt bezprostredne nevidíme. Galilei bol presvedčený, že aj tieto javy, ktoré by Aristotela ani vo sne nenapadlo matematizovať, majú ideálnu podstatu. Rozdiel je len v tom, že ich ideálna podstata je skrytá priamemu nazeraniu a leží niekde v hĺbke pod zjavným povrchom javu. Galilei tak matematickému opisu dal univerzálnu platnosť. Zmenil svet, ktorý sa stáva matematickým univerzom. Každý jav v prírode má svoju ideálnu, matematickú podstatu, kniha prírody je napísaná jazykom matematiky.

V *Discorsi* (1638) Galilei rozvinul matematické skúmanie pohybu a vzťahov medzi dráhou, rýchlosťou a zrýchlením. Neuverejnil síce žiadny systematicky výklad svojich ideí o intinitezimálnom počte, to prenechal to svojim žiakom Evangelistovi Torricellimu* (1608 – 1647), Bonaventurovi Cavalerimu† (1598 - 1647) a Vincenzovi Vivianimu (1622 – 1703). Galilei prostredníctvom svojej verzie *metódy nedeliteľných (indivisibilií)*, ktorú v *Discorsi* na niekoľkých miestach využil, jednoznačne ukázal, že mu je blízky duch novej matematiky, ktorá už stála pred bránami *diferenciálneho a integrálneho počtu* zavedeného I. Newtonom a G. W. Leibnizom‡. Galileiho *Discorsi* súčasne položilo aj základy pre bazálny prototyp novej metódy pre skúmanie sveta prírody, čo malo za následok vyňatie štúdia prírody z filozofie a jej nasmerovanie do vedy (lat. scienta, angl. science), pod ktorou sa dnes (najmä v anglosaských krajinách) hlavne rozumie: fyzika, chémia a biológia§.

3 Vzťah matematiky a fyziky

Aristoteles definoval matematiku (zo starogréckeho slova *mathema*, čo znamená „poznatie, štúdium, učenie, veda“) ako „vedu o množstve, o kvantite“ a toto vymedzenie sa udržalo až do 18. storočia. Od 19. storočia, keď enormne narástla abstraktnosť matematiky a požiadavky na jej presnosť, bol navrhnutý celý rad jej nových definícií, ktoré vyústili do diskusie, či matematika je vôbec vedou. *Fyzika* grécke slovo pre prírodu (pochádza zo starogréckeho slova *physis* „príroda“). Pred dvadsaťtimi storočiami Aristoteles napísal knihu o prírodnej filozofie, ktorý nazval *Fyzikou*. Aristotelove názory na prírodu dominovali európskemu mysleniu viac ako 2000 rokov. Prírodní filozofi sformulovali celý rad poučiek o príčinách o príčinách pohybu a o povahe vesmíru. Nerobili však žiadne merania skúmaných veličín, neuskutočňovali žiadne experimenty a matematické výpočty využívali veľmi zriedkavo, príp. výpočty nepoužívali vôbec. Takáto situácia pretrvala až do

* V roku 1643 *Torricelli* uskutočnil prvý pokus merania atmosférického tlaku pomocou hydrostatického tlaku ortuti.

† *Cavalieri* je považovaný za vplyvného predstaviteľa geometrie nedeliteľných rozpracovanú v *diele Geometria Indivisibilibus* (1653), čím sa stal jedným z predchodcov intinitezimálneho počtu. Zaviedol a zdôvodnil princíp (dnes sa nazýva Cavalieriho princíp), ktorý je vhodný na určovanie obsahov rovinných útvarov a objemov telies.

‡ Nevyhnutným predpokladom pre prekonanie tejto medzery bolo potrebné, aby sa v matematike vo väčšej miere rozvinula matematická symbolika, aby sa prehĺbilo a udomácnilo spojenie medzi algebrou a geometriou, vo forme už tom čase rodiacej sa, Descartovej a Fermatovej *analytickej geometrie*.

§ Dnes k týmto vedám spravidla priradujeme ešte geológiu.

čas Galilea Galileiho. Galileo považoval spôsob, akým prírodní filozofi vysvetľovali problematiku pohybu, za nepresvedčivé. Najviac nespokojný bol s tým, že Aristoteles sa vo svojich úvahách o pohybe telies sústredil iba na to *prečo objekty sa pohybujú*. Galileo chcel vedieť aj to *ako sa tieto objekty pohybujú*. Galileo transformoval Aristotelovu prírodnú filozofiu do matematickej a experimentálnej fyziky. J. Maclachlan vo svojej knihe *Galileo Galilei: First Physicist* (Maclachlan, 1997) uvádza, že navzdory tomu, v anglicky hovoriacich krajinách, sa ešte viac ako sto rokov po Galileovi hovorilo aj naďalej o *prírodnej filozofii* a nie o fyzike. Treba priznať, že pred koncom roka 1600 sa experimentálno-matematické štúdium prírody vo Francúzsku začalo nazývať „*la physique*“. Učenci sa zaoberajúci sa takýmito štúdiami boli nazývaní „*physiciens*“. Anglické slovo „*physicist*“ (fyzik) nevzniklo skôr ako v roku 1840. To teda znamená, že Galileo v dobe kedy žil, pravdepodobne nebol nazývaný fyzikom, a preto nemohol byť za fyzika ani považovaný. Pravdou však je, že Galileo Galilei vo svojich prácach používal postupy a výsledky, ktoré ležia v srdci toho, čo dnes rozumieme pod slovom fyzika, preto si iste označenie **fyzik** určite zaslúži. Na druhej strane treba priznať aj to, že v Galileových časoch, označenie či titul *matematika*, ktoré sa v tej dobe bežne používali (pozri na portrét Galilea na Obr.1, na ktorom je viditeľné slovo **MATHVS** čo označuje **MATHUS** – matematik) neboli až tak veľmi cenené. Totiž vrcholom bol totiž titul a pracovná pozícia *filozofa*, keďže v istom ponímaní boli všetky vedy súčasťou filozofie.

V tejto súvislosti celkom prirodzene vzniká otázka aký je vzťah matematiky a fyziky, príp. aký je vzťah matematiky a ostatných vied. Porovnávanie matematiky s fyzikou sa môže zdať neobvyklé. V súčasnosti je všeobecne prijatý názor, že matematika nie je vedou v zmysle anglického science, nevypovedá totiž o realite. Keby bol svet iný, mali by sme inú fyziku. Naproti tomu matematiky by sa táto zmena nedotkla. Nech je svet akýkoľvek, tvrdenia matematiky sú nemenné, platia nezávisle od stavu vecí. V súčasnej klasifikácii vied je matematika zaradovaná k formálnym vedám (patrí k nim aj logika) a je považovaná skôr za jazyk vedy*. Na rozdiel od fyziky, ktorá je považovaná za prototyp skutočnej vedy†.

Poznamenajme, samotné vnímanie matematiky ako jazyku vedy ako prvý vyslovil samotný G. Galilei vo svojom, pravdepodobne najznámejšom citáte, uverejnenom v práci *Il sagggiatore* (angl. *The Assayer*) v roku 1623: „*Filozofia (t.j. kniha prírody) je vpísaná do vesmíru ako do nejakej veľkolepej knihy, ktorá je neustále otvorená nášmu pohľadu. Táto kniha sa ale nedá pochopiť, pokiaľ človek najprv neporozumie jej jazyku a nedokáže prečítať písmená, ktorými je napísaná. Je napísaná matematickým jazykom a jej literami sú trojuholníky, kruhy a ďalšie geometrické útvary, bez ktorých človek nepochopí jediné slovo; a tak len tápe v temnom labyrinte.*“

* Možno aj to je dôvod prečo sa *Nobelova cena* (spojená s finančnou odmenou cca 864 000 €) neudeľuje v odbore matematika. Tá sa totiž udeľuje za zásadný vedecký výskum iba v odboroch fyzika, chémia, fyziológia alebo medicína, či za prínos pre ľudstvo (v oblastiach literatúra, mier). V roku 1968 síce pribudla aj Nobelova za ekonómiu (mimo chod medzi laureátmi tejto ceny sú aj štyria matematici, napríklad *John Nash* (1928 - 2015), známy z filmu *Čistá duša*), avšak toto ocenenie nie je vlastne Nobelovou cenou. Je to *Cena Švédskej ríšskej banky*, ktorá sa však udeľuje spoločne s ostatnými Nobelovými cenami. Za náhradu „*Nobelovej cenu za matematiku*“ bola dlhú dobu považovaná *Fiedsova medaila*, ktoré sa však udeľuje matematikom iba do veku 40 rokov (finančná odmena je približne 10 550 €). Od roku 2003 túto úlohu pravdepodobne prebrala *Abelova cena* udeľovaná *Nórskou akadémiou vied*, u ktorej už vekové obmedzenie pre laureátov absentuje, a ktorá sa výškou finančnej odmeny (cca 700 000 €) predsa len viac približuje k Nobelovej cene.

† Aj súčasnosti sme svedkami toho, že napriek tomu, že matematika nie je prírodnou vedou, v bežnom živote je veľmi často spájaná s prírodnými vedami, či dokonca je k prírodným vedám priradovaná. Napríklad sa stačí pozrieť na katedrovú skladbu fakúlt prírodných vied u nás i v zahraničí. Drvivá väčšina z nich obsahuje aj katedru matematiky. Tu sa však skôr uplatňuje historická zotrvačnosť a azda aj praktické hľadisko: veď najväčšie použitie matematika má v prírodných vedách.

Aj keď je Galileo pôvodcom myšlienky *matematizácie prírody*, dnes už vieme, že matematické prostriedky, ktorými chcel svoj program uskutočniť (trojuholníky a kružnice) sú príliš jednoduché na to, aby mohli vyjadriť univerzálne prírodné zákony. Na vyjadrenie prírodných zákonov bolo nevyhnutné vytvoriť úplne novú matematiku. Avšak k tomu, aby bolo možné matematicky vyjadriť „iba“ *zákony pohybu* bolo potrebné rozvinúť matematickú symboliku, pravidlá pre manipuláciu so symbolmi; *Descartes s Fermatom* museli vytvoriť *analytickú geometriu* s ideou súradnicovej sústavy; a až potom mohli *Newton s Leibnizom* položiť základy *infinitesimálneho počtu* (diferenciálny a integrálny počet) s fundamentálnymi pojmami *funkcia* a *diferenciálna rovnica*. Až využitím týchto prostriedkov sa otvorila možnosť naplnenia Galileovho programu a uvedenú úlohu bolo možné (aspoň potencionálne) *uspokojivo zvládnuť*.

V súčasnosti sa potvrdzuje, že veľa fyzikálnych zákonov je sformulovaných v tvare diferenciálnych rovníc (a ich sústav) a bez diferenciálnych rovníc si je ťažké predstaviť si štúdium a riadenie procesov od jadrových reakcií počnúc, po lety do vesmíru končiac. Známý fyzik a laureát Nobelovej ceny za fyziku Richard P. Feynman (1918 -1988) sa vyjadril ešte jednoznačnejšie: "Existuje jediný spôsob formulácie fyzikálnych zákonov, a to v tvare diferenciálnych rovníc." Na inom mieste Feynman tvrdí, že „*vďaka všeobecnosti a jasnosti*“ sa matematika stáva pre modernú fyziku „*súčasným jazykom i logikou*“. Podľa *Feynmana* fyzikálne zákony (aspoň tie fundamentálne) sa bez matematiky proste vysvetliť nedajú. Matematika sa totiž podľa neho nedá previesť do slov, pretože nejde len o púhy jazyk alebo systém symbolov, ale aj o samotný spôsob uvažovania a zdôvodňovania, ktorá matematický zápis prináša. Fungovaniu sveta je možné porozumieť len kvantitatívne, „*príroda nám ponúka informácie len v jednej forme...*“. Feynman, na rozdiel od súčasného fyzika S. W. Hawkinga*, bol presvedčený, že použitiu matematiky by sa nemali vyhýbať ani popularizátori vedy. Ťažko môžeme od prírody žiadať zmenu jazyka len preto, že matematika je pre veľa ľudí jednoducho ťažká, konštatuje Feynman. O význame matematiky pre fyziku a pre vedu vo všeobecnosti sa vyjadrili významní matematici M. Kac a S. Ulam takto: „*Matematika je do seba uzavretý mikrokosmos, ktorý má obrovskú schopnosť odzrkadľovať a modelovať akékoľvek procesy myslenia a pravdepodobne i celú vedu ako takú. Vždy prinášala veľký úžitok a v posledných rokoch ho prináša v ešte väčšej miere. Môžeme ísť dokonca ďalej a tvrdiť, že matematika je nevyhnutná na to, aby si človek pokoril prírodu a vôbec vyvíjal sa ako biologický druh, lebo formuje jeho myslenie.* (Kac - Ulam, 1977).

4 Discorsi

Ako už bolo konštatované, z celého Galileovho diela mali *Dialógy o dvoch hlavných systémoch sveta* najväčší význam pre štýl, metódu a vedeckého myslenia a pre rozšírenie heliocentrizmu. Pre rozvoj samotnej mechaniky však mala oveľa väčší význam kniha, ktorú Galileo napísal po svojom odsúdení inkvizíciou v Arcetri pri Florencii: „*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali*“ (*Rozhovory a matematické dôkazy o dvoch nových vedách, o mechanike a pohybe telies*). V istom zmysle je možné považovať Galileiho dielo *Discorsi* za jeho

* S. W. Hawking sa totiž v predslove českého prekladu svojej *Stručnej histórii času* vyjadril takto: „*Jenomže moderná veda je složitá a pouze nevelký počet specialistů ovládá matematiku, v jejíž řeči na ně nacházíme odpovědi. ... Zkušenější autoři mě varovali, že každá rovnice sníží zájem o knihu na polovinu. Rozhodl jsem se tedy, že vynechám všechny rovnice. Ale nakonec jsem přece jenom jednu rovnici do knihy zařadil: slavnou Einsteinovu $E = mc^2$. Doufám, že neodradí polovinu mých potenciálních čtenářů.*“

testament, pretože v ňom zhrnul výsledky viacerých svojich bádání, ktorým sa venoval v rozličných obdobia svojho života*. Galileo knihu dokončil začiatkom roka 1635 a po štyroch rokoch v roku 1638 sa ju podarilo potajomky vydať v Holandsku, v protestantskom *Leiden*†, kde inkvizícia katolíckej cirkvi dosah nemala.

V *predslove* tejto knihy sa vysvetľuje, ktorými *dvomi novými vedami* sa zaoberajú *Discorsi*. Sú to *dynamika* a *náuka o pevnosti*. V tejto knihe vystupujú tí istí spolubesedníci ako v *Dialógoch*: *Salviati*, *Sagredo* a *Simplicio*, ktorí vlastne reprezentujú rôzne vývojové štádiá myslenia a názorov samotného Galilea na uvedenú problematiku. *Salviati* predstavuje moderného výskumníka, učenca a reprezentuje vtedajšie myšlienky samotného Galilea. *Simplicio* reprezentuje učenca zachovávajúci súdobú akademickú tradíciu (Aristotelovo učenie), ktorý na rozdiel od *Dialógov o dvoch hlavných systémoch sveta* už nepôsobí tak jednoducho, až prostoducho. *Sagredo* vytvára medzičlánok, istý druh premostenia medzi nimi, kladie netriviálne otázky a ponúka podnety na zamyslenie. Napriek tomu, že dialogická forma diela kladie nemalé nároky aj na dnešného čitateľa, možno konštatovať, že dialógy medzi priateľmi *Salviatim*, *Sagredom* a *Simpliciom* sú veľmi duchaplné a svieže. Bohužiaľ pre matematicky menej zdatného čitateľa je text náročný, pretože obsahuje veľa matematiky a pre matematicky zdatného čitateľa pôsobí dialogická forma priveľmi rozvláčne, keďže namiesto dlhého dialógu by dnes stačilo uviesť niekoľko rovníc a niekoľko úprav s nimi. Treba však uvedomiť, že takýto nástroj Galilei ešte k dispozícii nemal.

Obsahovo sú *Discorsi* rozdelené do tzv. *štyroch dní*. V slovenskom vydaní tohto diela (zatiaľ ešte neúplného) je každému dňu venovaná samostatná brožúrka, ktoré rozdeľujú toto dielo do jeho štyroch dielov.

Prvý deň pojednáva o pevnosti a zlomení pevných látok, odolnosti proti rezaniu, odpore proti stlačeniu, štruktúre materiálov, existencii vákua, plávajúcich telesách, optike parabolických zrkadiel, páde rôznych závaží, páde telies vo vákuu a vzduchu, kmitavom pohybe kyvadla, akustike a hudbe.

Druhý deň venovaný problematike pružnosti materiálov a rovnovážnej sile. Počas *Tretieho* a *Štvrtého dňa* *Salviati*, *Sagredo* a *Simplicio* čítajú Galileiho pojednanie o pohybe telies (presnejšie, Galilei hovorí o tzv. miestnom pohybe). Z aspektu matematiky a jej implementácie do vedy, ktorá sa dnes nazýva fyzika (teda z aspektu témy, ktorou sa zaoberáme v tomto článku) sú tieto dve časti veľmi skutočne zaujímavé a inšpiratívne.

V *Tretom dni* Galileo vysvetľuje základné princípy dynamiky pri rovnomernom pohybe a pri rovnomerne zrýchlenom pohybe. Sú odvodené rovnice pohybu padajúcich telies. Galileo, na rozdiel od Aristotela, neskúma fyzikálne príčiny voľného pádu, ale sa otázke ako sa teleso pohybuje pri voľnom páde, pričom sa prioritne venuje **matematickej stránke problému**. Rovnomerne zrýchlený pohyb vymedzuje ako taký, „*pri ktorom v rovnakých časových úsekoch dochádza k rovnakým prírastkom rýchlosti*“. Základný zákon voľného pádu Galileo vyslovil už na konci besied v rámci prvého dňa, v súvislosti s otázkami vákua, keď vyvracal Aristotelove dôkazy proti jestvovaniu prázdna. Podľa Aristotela je rýchlosť pohybu nepriamo úmerná hustote prostredia. Preto v prázdnom priestore s nulovou hustotou, by mal mať pohyb nekonečnú rýchlosť. Z neexistencie takého pohybu Aristoteles vyvodil

* Toto dokumentuje i *Galileova poznámka*, keď po napísaní diela zaslal vydavateľovi dodatky k „tretiemu“ a „štvrtému“ dňu (pridal k nim aj svoj traktát o centre ťažísk telies) s dôkazmi a závermi „*zistenými priamo mnou vo veku 22 rokov po dvoch rokoch štúdia geometrie a je lepšie ich uviesť, ako by sa stratili*“.

† *Discorsi* boli vydané vo vydavateľstve *Elsevier*, ktoré založil v roku 1580 *Lodewijk Elsevier*. Jeho potomkom sa podarilo vybudovať (vo svojej dobe) najväčšie vydavateľstvo na svete, ktoré existovalo až do roku 1791. V roku 1880 bola založená nová vydavateľská spoločnosť, ktorá si názov *Elsevier* privlastnila. Dnes je to renomovaný vydavateľský gigant vedeckých prác, ktorý vydal už viac ako 20 000 knižných titulov.

neexistenciu vákuu. Galileo na tento argument rozpracoval teóriu konečnej a pre všetky telesá konštantnej* rýchlosti voľného pádu vo vákuu. Aristotelovu predstavu, že ťažšie telesá padajú rýchlejšie ako ľahšie vyvrátil veľmi jednoduchým, ale skutočne pôvabným, myšlienkovým experimentom. Predpokladajme, že veľký kameň sa pohybuje rýchlosťou rovnou osem a druhý, oveľa ľahší kameň sa pohybuje rýchlosťou rovnou štyrom. Keď ich spojíme, dostaneme teleso, ktoré padá strednou rýchlosťou, menšou ako osem. Ale dva kamene tvoria teleso, ktoré je ťažšie ako teleso prvé†.

V tejto časti sa Galileo zaoberal aj mechanickým kmitaním a sformuloval *princíp izochronného kyvadla*, ktoré neskoršie zohralo veľmi dôležitú úlohu pre meranie času. Veľmi podnetné sú Galileove experimenty s pohybom kovových guľčiek na naklonenej rovine v závislosti od sklonu naklonenej roviny. Totiž naklonená rovina umožnila Galileovi skúmať z jednotného hľadiska aj dva zdanlivo nesúvisiace pohyby, pohyb vodorovný (rovnomerne), resp. pohyb zvislý rovnomerne zrýchlený (t.j. voľný pád telesa) ako hraničné prípady pohybu telesa na naklonenej rovine. Nemožno nespomenúť jednu *dôležitú zmenu*, ktorú Galilei zaviedol pre vymedzenie rovnomerného pohybu, čo malo bezprostredný vplyv na matematickú stránku tohto pojmu. Totiž ako uvádza Kuznecov (Kuznecov, 1975) pred Galileom *rovnomerný pohyb bol definovaný ako pohyb, pri ktorom teleso prejde rovnaké vzdialenosti za rovnaké časové úseky*. K tejto definícii Galileo dodáva iba jedno slovo: pri rovnomernom pohybe prejde rovnaké vzdialenosti v **ľubovoľných**‡ rovnakých časových úsekoch. Toto môžeme dokumentovať *Galileovými slovami* z nášho prekladu *Tretieho dňa* do slovenčiny: *Pohyb nazývame rovnomerný alebo pravidelný ak prejdená vzdialenosť pohybujúceho sa telesa v ľubovoľných, ale rovnako dlhých časových intervaloch je rovnako veľká. Galileovo vysvetlenie je nasledujúce: Na rozdiel od doterajších definícií (tie nazývali pohyb rovnomerný v prípade, keď rovnakú vzdialenosť prejdeme v rovnakých časových intervaloch), my sme pridali slovíčko „ľubovoľný“, čo znamená tieto, akékoľvek pravidelné časové intervaly. Lebo je možné, že v určitých pravidelných intervaloch, bude prejdená vzdialenosť rovnako veľká za rovnaký čas, ale v menších častiach, ktoré vytvárajú dané vzdialenosti nebudú prejdené v rovnakých časových intervaloch.*

Toto slovo „ľubovoľný“ znamená, rýchlosť sa môže vzťahovať na nekonečne malé úseky dráhy a otvorilo Galileovi priestor na zavedenie pojmu *okamžitá rýchlosť* pri rovnomerne zrýchlenom pohybe.. To je krok, ktorým sa Galileo podstatne približuje k terajšej predstave o rýchlosti telesa ako o *limite podielu dĺžky prejdenej dráhy a veľkosti príslušného časového intervalu*. V *Discorsi* rieši trojica besedujúcich apóriu nepretržitého pohybu tým, že zavádzajú *pojem rýchlosti v danom bode*. V prípade rovnomerne zrýchleného pohybu pre určenie rýchlosti v bode, napríklad pri voľnom páde telesa, tradičná predstava o rýchlosti rovnomerného pohybu zjavne nepostačuje. Práve preto Galileo berie rýchlosť ako spojitú meniacu sa veličinu. Príslušné paradoxy (napríklad paradox, že teleso vrhnuté smerom nahor by sa vlastne nikdy nemalo zastaviť) Galilei rieši konštatovaním, že určitá rýchlosť sa vzťahuje na nekonečne malý úsek dráhy (ktorú teleso prejde za taktiež za nekonečne malý časový interval). V súlade s tým sa musel zmeniť aj *pojem rýchlosti*. Bolo treba ho rozpracovať s celým duchom galileiovskej dynamiky. Pre Galilea je **rýchlosť podielom nekonečne malého**

* Pri voľnom páde je konštantné zrýchlenie pre všetky telesá. Vo vákuu je rýchlosť rovnaká v každom okamihu pre telesá, ktoré sú pustené z pokoja z rovnakej výšky v rovnakom okamihu.

† Je možné, že Galilei inšpiráciu pre tento dôkaz našiel u nemeckého filozofa a logika Alberta Saského (Albert von Sachsen) (1320 -1390), ktorý tvrdil, že desať kameňov musí padať rovnakou rýchlosťou ako jeden.

‡ Bez tohto spresnenia sa totiž môže stať, že v určitých časových úsekoch teleso prejde rovnaké vzdialenosti, kým vzdialenosti, prejdené za rovnaké, ale menšie časti týchto časových úsekov, rovnaké nebudú.

elementu dĺžky prejdenej dráhy k nekonečne malej dĺžky časového intervalu. Treba však priznať, že v samotnom *Discorsi* takáto definícia rýchlosti *nie je explicitne sformulovaná*, ale fakticky Galileo takúto definíciu ustavične používal. Preložené do dnešného moderného jazyka, Galileo pod rýchlosťou v bode priamočiareho pohybu *intuitívne* rozumel v podstate našu **okamžitú rýchlosť** $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, ktorá sa uvádza v súčasných kurzoch matematickej analýzy ako *fyzikálna interpretácia derivácie funkcie v bode*. Na tejto časti sa dá presvedčivo dokumentovať ako nová rodiaca sa fyzika *podnietila vznik rýdzo matematických pojmov*: nekonečne malá veličina a následne i pojem derivácie a integrálu.

Z matematického hľadiska je veľmi zaujímavé Galileiho zdôvodnenie toho, že pri *rovnomernej zrýchlenom pohybe veľkosť prejdenej dráhy je úmerná štvorcu času* (presnejšie $s = \frac{1}{2}at^2$). Galileiho úvahy o rýchlosti a zrýchlení pohybu telesa, ktoré sme spomínali vyššie, bezprostredne vedú k prvej či druhej derivácii zákona dráhy (ak použijeme dnešnú terminológiu).

Toto bol významný prínos Galileovej dynamiky pre matematiku 17. storočia, dôsledku čoho, v priebehu ďalšieho vývoja, rodiaci sa pojem derivácie nevznikal iba s problémom určovania smernice dotýčnice ku grafu funkcie, ale najmä s galileovským vymedzením *problému okamžitej rýchlosti* telesa v danom bode. V takto vnímanom kontexte a súvislostiach však *Galileovo zdôvodnenie faktu* (pretlmočené do dnešnej matematickej terminológie), že veľkosť prejdenej dráhy telesa pohybujúceho sa rovnomerným zrýchleným pohybom (rýchlosťou $v(t) = at$) v časovom intervale $[0, T]$ sa rovná obsahu trojuholníka, ktorý je zhora ohraničený priamkou $v = at$, zdola časovou osou v intervale $[0, T]$ už obsahuje zárodok *perly matematického myslenia*, špeciálny prípad *Základnej vety diferenciálneho a integrálneho počtu* (Newtonova – Leibnizova veta).

Podporné stanovisko pre toto naše tvrdenie, ktoré sa možno bude zdať niekomu pritiahnuté za vlasy, sme našli v práci *Historical Encyclopedia of Natural and Mathematical Sciences* (2009), ktorej autorom je Ari Ben-Menahem z Weizmannovho inštitútu vedy v Izraeli. V tejto skutočne rozsiahlej encyklopédii (má 5986 strán) sa na str. 1112 uvádza, že „*The first published statement concerning this Fundamental Theorem of Calculus appears in Lectiones geometricae, a treatise published by Barrow in 1670. The theorem, however, is believed to have been recognized intuitively by Galileo 50 years earlier in connection with his study of motion.*“ Sme presvedčení o tom, že už tento výsledok zaraduje **Galilea Galileiho k špičkovým matematikom svojej doby***.

Vo *Štvrtom dni* sa v *Discorsi* pojednáva o strelách. Je tu sformulovaný dôležitý fyzikálny princíp, princíp zotrvačnosti (známy zo školských lavíc ako Prvý Newtonov pohybový zákon). Táto časť obsahuje prvú vedeckú teóriu o pohybe telesa v dvojrozmernom priestore, použitú na vysvetlenie pohybu striel. Galilei demonštrovaním svojho princípu skladania pohybov, presnejšie ich rýchlostí (vodorovného rovnomerného pohybu a voľného pádu ako zvislého rovnomernej zrýchleného pohybu) dokazuje, že vystrelená strela letí po parabolickej dráhe. Je skutočne zaujímavé sledovať ako sa statický objekt získaný v staroveku *Apolloniom z Pergy* (262 - 190 pred n. l.) rezom kužeľovej plochy a roviny mení v Galileovom diele *Discorsi* na dynamický objekt, ktorý je trajektóriou vystrelenej delovej gule. V porovnaní s dnes používanými vzorcami pre popis parabolických dráh vystrelených projektíl, v ktorých

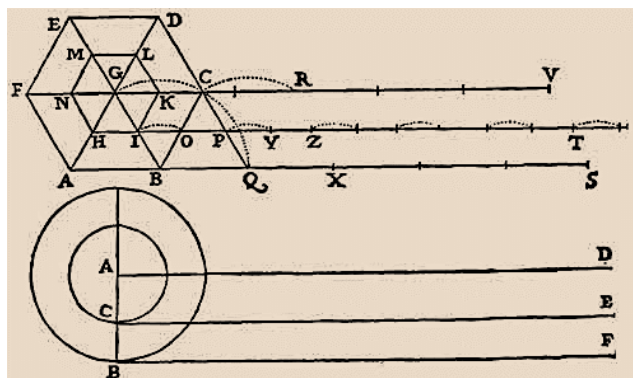
* To platí i napriek tomu, že niektorí historici matematiky predpokladajú (napr. A. P. Juškevič), že Galileo bol pravdepodobne ovplyvnený (aj keď to vo svojej práci nespomína) prácou *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, ktorú napísal v roku 1350 vynikajúci francúzsky matematik Nicole Oresme (1323-1382). V každom ohľade však Galileove úvahy boli úplnejšie a komplexnejšie.

vystupujú goniometrické funkcie, je jeho popis pomerne ťažkopádny. Na druhej strane, metóda, ktorú použil Galileo nie je o nič menej presná. Dokazuje to aj tabuľka základných vlastností týchto parabolických trajektórií v závislosti od veľkosti *elevačného uhla* (náklonu dela), ktorú Galileo s podivuhodnou presnosťou zostavil.

Na záver tejto časti spomeňme ešte tri zaujímavosti (kuriozity), ktoré sú spájané s *matematickým odkazom Galileiho*.

Prvým paradoxom je, že Galileo ukázal (povedané dnešnou terminológiou), že množinu všetkých prirodzených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ je možné bijektívne zobrazit priradením ($n \rightarrow n^2, n \in \mathbb{N}$) na jej vlastnú podmnožinu $N_2 = \{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$ a teda obidve množiny sú ekvivalentné z hľadiska „počtu prvkov“. Galileo okrem lakonického konštatovania „to nemôže byť“, neskoršie doplnil toto konštatovanie tvrdením, že *nekonečné množiny nemajú tie isté vlastnosti ako množiny konečné**. Poznamenajme, že táto vlastnosť nekonečných množín bola v 19. storočí znovuobjavená B. Bolzanom.

Je skutočne zaujímavé, že táto vlastnosť *nekonečných množín* sa objavuje aj pozadí druhého paradoxu, ktorý sa objavil v starogréckej práci *Mechanica*, pripisovanej Aristotelovi. Paradox je známy pod názvom *Aristotelovo koleso* (*Rota Aristotelica*). Vysvetlenie tohto paradoxu našiel až Galileo v *Discorsi*. K dispozícii máme dve pevne spojené kolesá, jedno je vo vnútri druhého tak, že ich okraje vytvárajú dve sústredné kružnice s polomeri r, R , $r < R$. Kolesá sa majú otáčať bez kĺzania okolo ich spoločného stredu. Po jednej otáčke sa bod B dostane do bodu F a bod C do bodu E . Z druhej časti Obr. 3 (je kópiou obrázka z *Discorsi*) je zrejmé, že dĺžky úsečiek BE, CE sa rovnajú obvodom uvedených kruhov. To však znamená, že $r = R$, čo je nemožné.

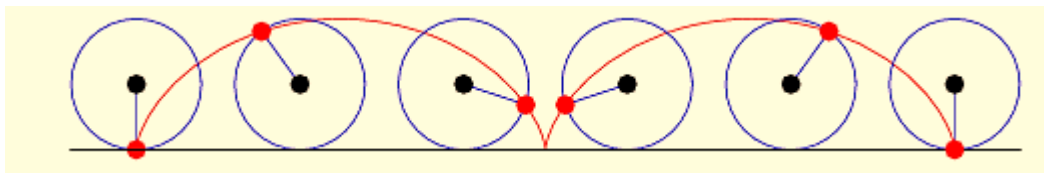


Obr. 3. Aristelovo koleso (zdroj Galilei: *Discorsi*)

Galileo vysvetlil tento paradox nahradením kružníc dvomi pravidelnými šesťuholníkmi. Na hornej časti Obr. 3 je „vidieť“ (Galileo to však veľmi podrobne, na viac ako dvoch stranách textu, dokazuje), že pri otáčaní šesťuholníkových kolies bod K neprejde do bodu O , ale do bodu P . To však znamená, že vrcholy menšieho šesťuholníka sa okrem otáčania aj *posúvajú*. Táto úvaha zostáva v platnosti pre ľubovoľné pravidelné n -uholníky a teda aj pre *kruhy*. Podstata tohto zdanlivého paradoxu spočíva v chybnom predpoklade, že *ak medzi množinami bodov dvoch kriviek existuje bijektívne zobrazenie, tak tieto krivky majú rovnakú dĺžku*. Keďže Toto tvrdenie však pre nekonečné množiny (dokonca s mohutnosťou kontinua) vo všeobecnosti neplatí.

Treťou zaujímavosťou, ktorú spravidla spájame s Galileom je jedna z najpozoruhodnejších a najkrajších kriviek (nazývaná aj *Helenou* (t.j. *Krásnou Helenou*) *geometrie*).

* Na uvedenú vlastnosť nekonečných množín narazili už niekoľkí matematici pred Galileom. Galileo bol však prvý, ktorý upozornil na to, že je *potrebné rozlišovať medzi týmito skupinami množín*.



Obr. 4. Cykloida a je konštrukcia

Podľa významného historika matematiky *Floriana Cajoriho* Galileo v roku 1599 túto krivku objavil, presne definoval a dal jej meno **cykloida**. Kinematická definícia cykloidy je veľmi názorná: *cykloida je krivka, ktorú ako svoju stopu zanecháva bod kružnice, ktorá sa kotúľa po rovnej podložke*. Je to asi *najzaujímavejšia* krivka v celej histórii matematiky i histórii vedy vôbec. Cykloida sa objavuje v rozličných problémoch fyziky a matematiky. Cykloida je totiž riešením niekoľkých významných problémov pri hľadaní kriviek s požadovanými extrémnymi vlastnosťami, preto sa (vzhľadom na bezprostrednú spojitosť s uvedenými problémami) nazýva aj *tautochróna*, *izochróna*, či *brachystochróna*). Pre jej pozoruhodné vlastnosti ju nachádzame v prírode a našla uplatnenie v architektúre i technike (oveľa viac je možné sa dozvedieť z článku *Stachová – Stacho* (2013).

5 Záver

Dúfame, že sa nám aspoň z časti podarilo dokumentovať, že prínos *Galilea Galileiho* pre rozvoj matematiky bol dôležitý a napriek starostlivo pestovanému imidžu špičkového fyzika a vedca svojej doby, ktorý z veľkej časti zatienil jeho matematický odkaz, určite si zaslúži, aby sme o ňom hovorili aj ako **významnom matematikovi** svojej doby. Jednoducho by sa nemalo stávať, aby sa pri hodnotení diela *Galilea Galileiho* neobjavilo slovo *matematik*, či presnejšie významný matematik. To je samozrejme úlohou hlavne nás matematikov, resp. učiteľov matematiky. Pozoruhodné je to, že túto úlohu môžeme rozšíriť aj o ďalšie mená ďalších významných fyzikov a astronómov, ktorí boli nielen svojou profesiou matematikmi, ale v matematike dosiahli aj špičkové výsledky. Navzdory tomu, podobne ako to bolo u Galilea, v širšom spoločenskom povedomí nie sú medzi matematikov vôbec zaradení.

Môžeme uviesť konkrétne príklady. Vo všeobecnosti totiž nie je známym faktom, že zo školských lavíc známy fyzik, *Archimedes zo Syrakúz* (287 -212 pred n.l.) bol matematikom, dokonca **najväčším matematikom staroveku**; že Galileovi súčasníci *Johannes Kepler* (1571 – 1630), *Bonaventura Torricelli* (1608 – 1647) spolu s jedným najväčších fyzikov v histórii vedy vôbec *Isaacom Newtonom* (1643 -1727) **boli matematikmi**.

Podobný osud stihol aj dvoch významných matematikov *Jána Segnera* a *Jozefa Maximiliána Petzvala*, ktorí sa narodili na území dnešného Slovenska, avšak v čase kedy Slovensko bolo súčasťou Rakúska – Uhorska.

Ján Segner (1704 – 1777) sa narodil v Bratislave. Preslávil sa vynálezom jednej z prvých vodných turbín (tzv. *Segnerovho kolesa*), preto je temer výlučne považovaný za fyzika a vynálezcu. To i napriek tomu, že na poli matematiky zožal niekoľko prvenstiev a úspechov v matematike, resp. vo vyučovaní matematiky. *J. Segner* sa totiž stal **prvým profesorom matematiky na slávnej Univerzite v Göttingene**, čím sa nezmazateľne zaradil medzi slávnych matematikov tejto univerzity, ktorí na tejto univerzite pôsobili. Spomeňme aspoň tých najslávnejších: *K. F. Gauss* (1777 – 1855), *F. Klein* (1849 – 1925) a *D. Hilbert* (1862 – 1943). *Segner* na tejto univerzite pôsobil ako profesor matematiky v rokoch 1735 - 1755. Tu sa aj spriatelil s jedným z najväčších matematikov histórii vôbec, s *Leonhardom Eulerom* (1707 -

1783) a na jeho odporúčanie sa J. Segner stal členom Petrohradskej akadémie vied. Od roku 1755 pôsobil ako *profesor matematiky* na univerzite v Halle.



Obr. 5. Ján Andrej Segner (Johann Andreas von Segner)
(1704 – 1777)



Obr. 6. Jozef Maximilián Petzval (Joseph Maximilian Petzval)
(1807 - 1891)

Jozef Maximilián Petzval (1807 - 1891) sa narodil v Spišskej Belej. Laickou verejnosťou je považovaný za fyzika či technika, napriek tomu, že jeho profesiou bola **matematika** - vyše 40 rokov prednášal matematiku na Viedenskej univerzite. Petzval sa preslávil najmä ako vynálezca *fotografického objektívu* (tzv. *Petzval Poträtobjektiv*) svetového významu, ktorý významne znížil expozičný čas potrebný pre tvorbu portrétových fotografií. Z tohto dôvodu je Petzval považovaný hlavne za vynálezcu či fyzika. Poznamenajme, že keď sa Petzval oboznámil s prvým prakticky použiteľným fotografickým prístrojom, tzv. daguerreotypom (pomenovanom podľa jeho vynálezcu L. Daguerre), zistil, že jeho najväčšou slabinou je dlhý expozičný čas na tvorbu dostatočne kvalitnej fotografie, čo bolo spôsobené nekvalitným objektívom prístroja. Ovplyvnený aj naliehaním svojho kolegu Petzval sa nakoniec rozhodol, že navrhne nový typ objektívu, ktorý tento nedostatok odstráni. Jeho ďalšie kroky už boli pravdepodobne ovplyvnené skutočnosťou, že bol skutočne *dobrým matematikom*. Nesnažil sa totiž nový objektív hľadať experimentálnym overovaním rozličných objektívov, ale rozhodol sa, že nový objektív (ako sústavu zloženú z rozličných šošoviek) najprv na základe zákonov *geometrickej optiky* a **využitím matematických metód „vypočíta“**. Úloha sa však ukázala veľmi náročná na množstvo a náročnosť rozličných výpočtov. V tomto smere mu významne pomohol korunný princ, arcivojvoda Ludwig (1784 - 1864), ktorý mu na tieto **zložité výpočty** poskytol 8 delostrelcov a *troch desiatnikov* zo svojho vojska. Totiž delostrelci, spolu s ich dôstojníkmi boli od čias **Galilea Galileiho** vzdelávaní v matematike v školách pre delostrelcov (jednu takúto školu absolvoval aj veľký *Napoleon Bonaparte*). Výpočty robené v takomto už v takomto veľkom kolektíve počtárov sú niekedy označované za predchodcov **paralelného počítača** (aj keď iba jeho ľudskej formy). Výsledkom **šiestich mesiacov zložitých výpočtov** bol prelomový objektív v histórii fotografovania, ktorý zmenil expozičný čas fotografovania (v tej dobe 10 až 30 minút) na niekoľko sekúnd. Z uvedeného vyplýva, že J. M. Petzval si označenie **matematik** rozhodne zaslúži.

Podakovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu KEGA SR číslo 003KU-4/2013.

Literatúra

- Ari Ben Menahem (2009). *Historical Encyclopedia of Natural and Mathematical Sciences*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- Feynman R. (1998). *O povaze fyzikálných zákonů*, Aurora, Praha.
- Galilei, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali*. Leiden: Elzevier Press.
- Galilei, G. (1914). *Dialogues Concerning Two New Sciences*. New York: Macmillan.
- Galilei, G. (1623). *Il saggiaiore* (The Assayer), Roma.
- Galilei, G. (2013). *Rozhovory a matematické dôkazy o dvoch nových vedách, o mechanike a pohybe telies*. 1. diel. VERBUM –vydavateľstvo KU Ružomberku, Ružomberok.
- Galilei, G. (2014). *Rozhovory a matematické dôkazy o dvoch nových vedách, o mechanike a pohybe telies*. 2. diel. VERBUM –vydavateľstvo KU Ružomberku, Ružomberok.
- Galilei, G. (2015). *Rozhovory a matematické dôkazy o dvoch nových vedách, o mechanike a pohybe telies*. 3. diel. VERBUM –vydavateľstvo KU Ružomberku, Ružomberok.
- Kuznecov, B.G. (1975). *Od Galilea po Einsteina*. Nakladateľstvo Pravda, Bratislava.
- Maclachlan, J. (1997). *Galileo Galilei First Physicist*, Oxford University Press Oxford New York.
- Gillies, D. (ed.) (1992). *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press
- Hawking, S.W. (2007). *Stručná historie času*. Argo, Dokořán.
- Juškevič, A.P. (1977). *Dějiny matematiky ve středověku*. Akademie Praha.
- Kac, M., Ulam, S. (1977). *Matematika a logika*. Praha, SPN.
- Kuhn, T. (1997). *Struktura vědeckých revolucí*. Oikoymenh, Praha.
- Kvasz, L. (1999). *Gramatika zmeny*. Chronos, Bratislava.
- Stachová, D. Stacho, M. (2013). *O krivke najrýchlejšieho pádu*. In: Informačný vek modifikuje metódy a formy vyučovania matematiky. - Žilina: Žilinská univerzita, s. 120 -132,
- Struik, D.J. (1963). *Dějiny matematiky*. Malá moderní encyklopedie, Orbis Praha.
- White, M. (2011). *Antikrist Galileo*. Academia, Praha.

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Segner.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Petzval.html>

https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Petzval

Theoretical and Didactic Aspects of Numeration of Real Numbers

Peter Vrábek

**Department of mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 4 October 2015; received in revised form 7 October 2015; accepted 9 October 2015

Abstract

The notion of number incorporates a few of aspects. It is mainly its sense accordingly its definition as a mathematical object and the assignation of fundamental properties of operations with numbers. The notation of numbers expressed by admissible characters and algorithms of operations are further aspects. Mathematically least important aspect is the verbal denomination of numbers finally. First aspect belongs to basic equipment of mathematicians and it has purely theoretical character. The theoretical bases of notation of numbers and also possibilities their interpretations in education of mathematics on grammar schools and in the preparation of teachers of mathematics are determined in the paper.

Keywords: natural and real numbers, Archimedean property, whole part of number, notation of number.

Classification: 97C70, 97C90, 97U20

Introduction

The comprehension of the principle notation of natural and rational numbers (we omit the notion of real number) in positional numeration system belongs in intellectual outfit perhaps of every person. It is possible to form the notion of natural even rational number onto primary school intuitively. There is a deeper understanding of essence numeration of numbers in the first year-class of grammar school. However the work with numbers of pupils even students and peoples anywise taper to acquaintance of algorithms various operations. But already the importance of other numeration system as decimal for example binary hints that it should not be so. It appears at the moment through numeration of numbers that these algorithms of calculation are as good as equal in the positional numeration with any admissible ground. It is important for teachers of mathematics so as they perceived that basic knowledge make possible to inscribe positive numbers whether or not natural, rational or real effectively and moreover they guarantee comfortable practice of basic operations with numbers (Bürger [1] 1973; Smítal [2] 1977; Vilenkin [4] 1977).

1 Assumed knowledge numeration of numbers

The exact definition of numbers as mathematical objects is fundamental assignment of theoretical arithmetic and it belongs at the university. Natural numbers inclusive of zero ($\mathbb{N}_0$) are defined either as cardinal numbers of finite sets with utilization of set equivalence or they are defined axiomatically by Peano's system of axioms. The structure of integers $\mathbb{Z}$ is raised consequently by algebraic middles over extension of the structure $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ and the structure

* Corresponding author: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2015.1.2.15-20

of rational numbers $\mathbb{Q}$ by extension of the structure $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Real numbers $(\mathbb{R})$ are defined either through the medium Dedekind's cuts of ordered set $\mathbb{Q}$ or by fundamental sequences of rational numbers (Šalát [3], 1982). None of that is possible to use on grammar school, especially as regards natural numbers according as real numbers.

The idea of equivalent sets emerges beside each other one-one assigning of elements of two sets with the same finite number points. So we can for example number two to explicate as common property of sets that contain some element and still one element, that they are equivalent, hence there is between them mentioned one-one assigning of elements.

The key scopes for numeration of numbers are following theorem (assertions):

A. Every non-empty subset of the set $\mathbb{N}$ has the smallest element.

B. Let $a \in \mathbb{N}_0(\mathbb{Q}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$, $b \in \mathbb{N}(\mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+)$. Then there is such natural number n , that $a < bn$ (Archimedean property).

It is possible to advance proof of these assertions also on grammar school:

Let $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}_0$. Take arbitrary element $m \in M$ and then smallest element of finite set $\{0, 1, \dots, m\} \cap M$ is also smallest element of set M .

We can consider in the case B as follows. Let $a, b \in \mathbb{Q}_0^+$, $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$, $p, q, r, s \in \mathbb{N}$. It suffices to put $n = p(s + 1)$ because

$$a = \frac{p}{q} \leq p < p \frac{(s+1)}{s} = \frac{1}{s} p(s+1) \leq \frac{r}{s} p(s+1) = bp(s+1).$$

Now let $a, b \in \mathbb{R}_0^+$. We could come from the apprehension that there are positive rational numbers a_1, a_2, b_1, b_2 such that $a_1 < a < a_2$, $b_1 < b < b_2$. There is natural number n with property $a_2 < b_1 n$ on the ground of the preliminary consideration. Then $a < bn$.

The known theorem from number theory about division with remainder is accordingly the corollary of the assertions A and B:

Let $a \in \mathbb{N}_0$ and $b \in \mathbb{N}$. There are unique numbers $q, r \in \mathbb{N}_0$ such that

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

We outline the proof with the utilization of the theorem A, B. The set $M = \{n \in \mathbb{N}; a < bn\}$ is non-empty subset of the set $\mathbb{N}$ on the ground of B. The set M has the smallest element u pursuant to A. Put $q = u - 1$ and $r = a - bq$, so $a = bq + r$. The following relationships

$$qb = (u - 1)b \leq a < bu$$

result from the inequality $u - 1 < u$ and from the choice of u .

Then we obtain that

$$0 \leq r = a - bq < bu - (u - 1)b = b.$$

If $a = bq_i + r_i$, $0 \leq r_i < b$, $i = 1, 2$, then $b|q_1 - q_2| = |r_2 - r_1|$. It is possible only in the case that $q_1 = q_2$, $r_1 = r_2$, because $|r_2 - r_1| < b$.

If we apply the theorem about division with remainder repeatedly for $b > 1$ so we obtain

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + a_0, & 0 \leq a_0 < b \\ q_0 &= bq_1 + a_1, & 0 \leq a_1 < b \\ &\vdots \\ q_{n-2} &= bq_{n-1} + a_{n-1}, & 0 \leq a_{n-1} < b \end{aligned}$$

$$q_{n-1} = b \cdot 0 + a_n, \quad 0 \leq a_n < b.$$

The sequence nonnegative whole numbers $q_0, q_1, \dots$ is decreasing apparently, so there is such $n \in \mathbb{N}$ that $q_n = 0$. Then

$$a = bq_0 + a_0 = b^2q_1 + ba_1 + a_0 = \dots = b^n a_n + b^{n-1}a_{n-1} + \dots + ba_1 + a_0.$$

Instead $a = b^n a_n + b^{n-1}a_{n-1} + \dots + ba_1 + a_0$ we write briefly $a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_b$. We say also about number notation in the b -adic notation system.

The following assertion is further simple corollary of assertions A, B which is due in number notation:

For every $x \in \mathbb{R}^+$ there is unique such $m \in \mathbb{N}_0$ that

$$m \leq x < m + 1.$$

Actually if we put $b = 1$ in Archimedean property then we obtain:

for every $x \in \mathbb{R}^+$ there is such $n \in \mathbb{N}$ that $x < n$. The set $M_1 = \{n \in \mathbb{N}; x < n\} \subseteq \mathbb{N}$ has on the ground of A the smallest element u . Then $u - 1 \leq x < u$. Put $m = u - 1$. The unicity of m is evident.

The number m is called whole part of real number x . We denote its by sign $[x]$.

It is needed to sense that for every number $x \in \mathbb{R}^+$ there is $n \in \mathbb{N}$ with the property $\frac{1}{n} < x$. It suffices to put pre $a = \frac{1}{x}$ a $b = 1$ in the assertion B.

The notion of mathematical induction and the construction of a sequence by mathematical induction is last needed scope for real number notation in positional numeration system.

It is possible to advance on grammar school intuitively the fact that the set $M \subseteq \mathbb{N}$ satisfying the properties

$$\text{a) } 1 \in M \text{ and b) } n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$$

equals to whole set $\mathbb{N}$:

Let $m \in \mathbb{N}$. We gain number m from number 1 by means of addition ones after $m - 1$ steps. The element m belongs to set M basically assumptions a) and b). Often this fact is approached by the medium of the dominoes effect metaphorically.

The mathematical induction is used moreover on the construction of a sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ with required properties:

It is framed first member a_1 . Moreover it is established how we design member a_{n+1} in general, if we have designed member a_n ($n \in \mathbb{N}$). Then the set $M = \{n \in \mathbb{N}; a_n \text{ is designed}\}$ satisfies the properties a), b). Then $M = \mathbb{N}$ and thus it is designed each member the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2 Decimal expansion of real numbers

Now we can introduce the final theorem about notation of nonnegative real number in the decimal numeration system. We do it on the ground of the results of the part 1. We utilize nevertheless admittedly besides the notation of nonnegative integers. It is possible to carry the proof of first theorem about the existence of an expansion of real number on grammar school. The second theorem about unicity of this expansion appertains on college or grammar school with advanced school teaching of mathematics.

Theorem 1. For every nonnegative real number a there are $a_0 \in \mathbb{N}_0$ and such infinite sequence of numbers $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, where $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $n = 1, 2, \dots$, that the following inequalities

$$0 \leq a - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \right) < \frac{1}{10^n}$$

are valid for any $n \in \mathbb{N}_0$.

The inequality $a_n < 9$ is true for infinite number of n 's additionally.

Proof. Let $a \in \mathbb{R}_0^+$. Put $a_0 = [a]$, $b_1 = a - a_0$. Then

$$a = a_0 + b_1, a_0 \in \mathbb{N}_0, 0 \leq b_1 < 1.$$

Denote $a_1 = [10b_1]$, $b_2 = 10b_1 - a_1$. Then

$$b_1 = \frac{a_1}{10} + \frac{b_2}{10}, 0 \leq b_2 < 1, 0 \leq 10b_1 < 10.$$

Thus $a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{b_2}{10}$. If we designed numbers $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ and numbers $b_1, b_2, \dots, b_n$ then we put $a_n = [10b_n]$, $b_{n+1} = 10b_n - a_n$. Then relations

$$(1) \quad a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^n}, 0 \leq b_{n+1} < 1$$

are true. By the mathematical induction we devised the sequence of numbers $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (besides the sequence $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$) with required properties. The inequalities

$$0 \leq a - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \right) = \frac{b_{n+1}}{10^n} < \frac{1}{10^n}$$

are valid also.

Now we prove that inequality $a_n < 9$ is valid for infinite amount natural numbers n . We shall proceed indirectly. Let m be such natural number that $a_k = 9$ for any $k > m$. There is such $l \in \mathbb{N}$ that $1 - b_{n+1} > \frac{1}{l}$. Evidently $\frac{1}{l} > \frac{1}{10^l}$. Hence we obtain

$$(2) \quad \frac{b_{m+1}}{10^{m+1}} < \frac{1}{10^m} \left(1 - \frac{1}{10^l} \right) = \frac{9}{10^{m+1}} + \frac{9}{10^{m+2}} + \dots + \frac{9}{10^{m+l}}.$$

Then from valid attitudes

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_m}{10^m} + \frac{9}{10^{m+1}} + \frac{9}{10^{m+2}} + \dots + \frac{9}{10^{m+l}} &\leq x = \\ a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_m}{10^m} + \frac{b_{m+1}}{10^{m+1}} & \end{aligned}$$

we receive the opposite inequality to inequality (1). It is misunderstanding.

Theorem 2. Each nonnegative real number a can be uniquely expressed in the form

$$(3) \quad a = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

where $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $n = 1, 2, \dots$, and for infinite number n 's we have $a_n < 9$.

Proof. We utilize the equality (1) and the designed sequences $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ in the theorem 1 with given properties. Denote

$$s_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Then $\lim_{n \rightarrow \infty} (a - s_n) = 0$ because $0 \leq a - s_n = \frac{b_{n+1}}{10^n} < \frac{1}{10^n}$. Hence we have $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a$. The equality (3) emerges from the definition sum of infinite series. It is necessary to prove the unicity of the expression (3). Let be valid also the equality

$$a = a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{10^n}, \quad a'_0 \in \mathbb{N}_0, \quad a'_n \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

and let for infinite number n 's be valid $a'_n < 9$. Then

$$0 \leq c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} < 1, \quad 0 \leq c' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{10^n} < 1,$$

$$|a_0 - a'_0| = |c - c'| < 1.$$

Number $|a_0 - a'_0|$ is whole and nonnegative. Thus $|a_0 - a'_0| = 0$ and $a_0 = a'_0$. Then following equalities are valid:

$$c = c', \quad a_1 + \frac{a_2}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^{n-1}} + \dots = 10c = 10c' = a'_1 + \frac{a'_2}{10} + \dots + \frac{a'_n}{10^{n-1}} + \dots$$

We can receive equality $a_1 = a'_1$ by similar consideration as for a_0, a'_0 . It can be already proved that $a_n = a'_n$ for any $n \in \mathbb{N}_0$ by the mathematical induction. We inscribe the equality (3) in form

$$(4) \quad a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

whereby integer a_0 is expressed in decimal numeration system.

The equality (4) means in fact that it is needed to add to nonnegative integer a_0 sum of infinite numerical series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. The right side of the equality (4) is numeration of nonnegative real number a in the decimal positional system. It is called also the decimal (decadic) expansion of the number a . The numbers a_n ($n = 1, 2, \dots$) are called decimal (decadic) numeral (figure, digit).

If is the decimal expansion of a number a periodic accordingly

$$a = a_0, c_1 c_2 \dots c_p d_1 d_2 \dots d_k \dots d_1 d_2 \dots d_k \dots, \quad c_i, d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, k,$$

we obtain

$$a = a_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{u}{10^p} + \frac{u}{10^{p+k}} + \dots =$$

$$a_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{u}{10^p} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^k}} = a_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_k}{10^k} + u \frac{10^{k-p}}{10^k - 1}.$$

$$\text{where } u = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \dots + \frac{d_k}{10^k}.$$

We proved so that if the decimal expansion of a number a is periodic then this number a is rational.

It is valid also the inverted implication. Let $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. If we divide number p with number q then we can obtain partial remainders just from the set $\{0, 1, \dots, q - 1\}$. It is possible only two cases:

we obtain the remainder 0 past finite number steps or
a certain grouping of nonzero remainders is still repeated.
The number a is rational in both cases.

Conclusion

It is manipulated directly with decimal expansion of rational numbers only on the grammar school. We outlined possibilities approach of decimal expansion of real numbers on grammar school in the contribution. We integrated theorem 2 into schooling on college by reason of employment of the limiting process for sequences. On the other hand it makes merely use of convergent geometric series. The geometric series belong on grammar school.

References

- [1] Bürger, H., Schweiger, F. *Zur Einführung der reellen Zahlen*. Didaktik für Mathematik, 1973, 98-108.
- [2] Smítal, J., Šalát, T. *Reálne čísla (učebný text pre 3. ročník gymnázií s rozšíreným vyučovaním matematiky)*. Bratislava: SPN, 1977.
- [3] Šalát, T. *Reálne čísla*. Bratislava: Alfa, 1982.
- [4] Vilenkin, N.J. a kol. *Matematika*. Moskva: Prosveščenie, 1977.

Kreslíme ako Escher alebo umenie zhodných zobrazení

The Drawing as Escher or the Art of Transformations

Edita Smiešková

**Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1,
SK-949 74 Nitra*

Received 11 September 2015; received in revised form 24 September 2015; accepted 1 October 2015

Abstract

The submitted article aims to present possibility of how to teach geometric transformations in connection with visual arts. The author of the article believes that the simple art techniques can motivate and activate pupils in teaching of mathematics, regardless of their age and ability. Beside that, the non traditional tasks have an affect on the motivation of pupils, too. The topic of geometric transformations give us space to teach mathematics in interesting way and offer pupils to be creative.

Key words: Motivation. Teaching Geometry. Creativity.

Classification: B60, C20, G10

Úvod

K často riešeným problémom vo vzdelávaní na školách patria okrem problémov so sústredením, aj problémy s motiváciou žiakov k práci. Niektorí autori vidia riešenie tohto problému vo vytvorení väčšieho priestoru pre tvorivosť žiakov pri učení a vyučovaní. To zároveň predstavuje aj jeden zo základných princípov a cieľov modernej pedagogiky a humanisticky orientovanej výchovy (Lokšová, Lokša, 1999).

Jedným z princípov zvyšovania motivácie žiakov je zabezpečiť, aby vo vyučovaní boli používané tvorivejšie úlohy, pretože nerozvíjajú iba tvorivosť, ale aj samostatnosť a motiváciu (Durič a kol., 1986).

Tvorivé úlohy sa vyznačujú tým, že sú pre žiakov nové a neznáme, obsahujú prvky nejasnosti, neurčitosti a sú prekvapivé. Nie sú pri nich určené všetky podmienky riešenia úlohy. Ich riešenie si vyžaduje tvorivý postup, ktorý sa vyznačuje aktívnou poznávacou činnosťou (hľadanie, experimentovanie, bádanie). Takýmito úlohami môžu byť úlohy spájajúce matematiku a výtvarné umenie. Vhodným príkladom spojenia matematiky a umenia sú teselácie, ktoré tvoril holandský grafik M. C. Escher, ktorý nebol matematikom, avšak študoval ornamentálne vzory, v ktorých sa uplatňujú matematické princípy zhodných zobrazení.

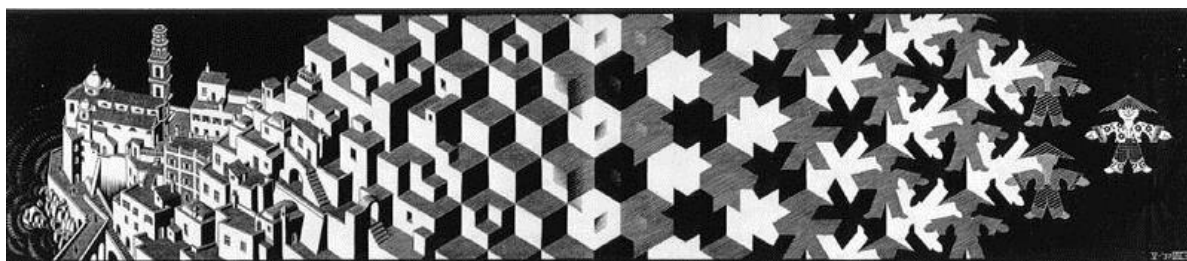
* Corresponding author: edita.smieskova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2015.1.2.21-28

Kto je M.C. Escher?

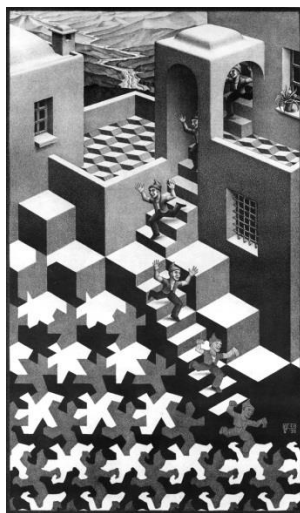
M.C. Escher alebo Maurits Cornelis Escher sa narodil v Leewarden v Holandsku v roku 1898. Patrí medzi najznámejších grafikov a jeho diela sú známe po celom svete. Počas života, jeho dielo bolo vnímané a považované za príliš staromódne, a tiež príliš matematické. Našu pozornosť v jeho dielach upúta množstvo matematických princípov a rôznych matematických prvkov. Escherove obrazy obsahujú systematické princípy konštrukcie. Hranice medzi možným a nemožným svetom dávajú Escherovmu dielu zvláštne postavenie nielen vo výtvarnom umení, ale aj v matematike či geometrii. Pre Eschera bol povrch videného sveta iba kúskom látky, ktorú môžete nastrihať, zložiť, vytvarovať a usporiadať rôznymi spôsobmi. Ako vynikajúci kresliar si dal za úlohu portrétovať tieto neskutočné transformácie priestoru v rámci známych hraníc vystavených na kuse papiera. Výsledné obrazy sa stali obľúbenými umeleckými dielami pre množstvo divákov po celom svete. Escher o svojej práci v liste synovcovi Rudolfovi Escherovi z 17.1.1944 píše, že v prvom rade je jeho „*práca tesne spojená s pravidelným rozdeľovaním roviny. Všetky obrazy posledných rokov vychádzajú z princípu kongruentných figúr, ktoré nezanechávajú prázdne miesta a idú do nekonečna alebo aspoň bez obmedzenia zapĺňajú rovinu*“. Escher vo svojej tvorbe zašiel oveľa ďalej ako len k vyplňaniu roviny, venoval sa aj rezom roviny a tvoril rôzne priestorové objekty (Escher, Locher, Veldhuyse, 2009).

Escherove teselácie

Escher vytvoril umelecké diela v matematike známe ako teselácie. Poznal pravidelné aj nepravidelné teselácie. Jeho záľuba v teseláciách začala návštevou chrámu v Alhambre v Španielsku v roku 1926. Ornamenty, ktoré tu videl boli podnetom pre jeho umelecké diela. Escher dlho študoval tieto ornamentálne vzory, až nakoniec prišiel s kompletným systémom ich tvorby. Prvými dielami inšpirovanými týmto umením sú Metamorfózy (obr. 1) a Cyklus (obr. 2).



Obr. 1: Metamorfózy I, 1937, drevorez, 195 x 908 mm

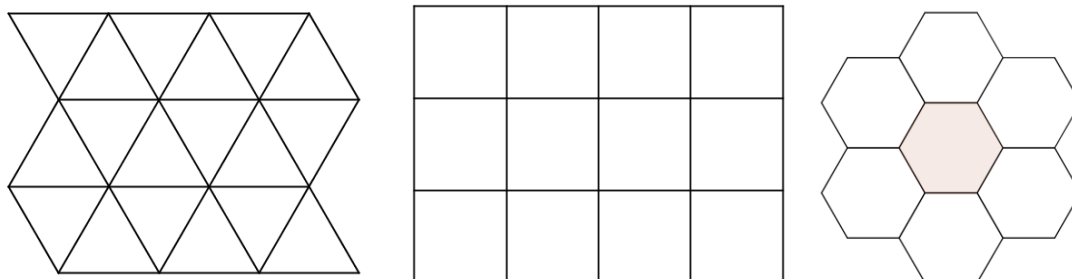


Obr. 2: *Cyklus*, 1938, litografia, 475 x 279 mm

Teselácie

Definícia teselácií, uvedená v Oxfordskom matematickom slovníku (Clapham, Ch., Nicholason, J., 2009) je, že teselácie vyplňajú rovinu rovinnými útvarmi bez vzájomného prekrytia a medzier. Teselácie môžu byť pravidelné alebo nepravidelné.

V školskej matematike sa žiaci oboznamujú iba s pravidelnými teseláciami, ktoré vznikli z rovnostranných trojuholníkov, štvorcov alebo pravidelných šesťuholníkov (obr. 3). Žiaci sa s pojmom teselácie vo vyučovaní matematiky neoboznamujú priamo, ale tento pojem je skrytý v konštrukčných úlohách s inými vzdelávacími cieľmi.



Obr. 3: *Rovnostranný trojuholník, štvorec a šesťuholník*

Porozumieť Escherovmu umeniu znamená porozumieť hlavným princípom teselácií. Existujú 4 základné spôsoby ako vytvoriť teselácie pomocou zobrazení, a to: posunutím, otočením, posunutou súmernosťou.

Ako zaradiť teselácie do vyučovania matematiky?

Escherovo umenie tvorby teselácií bolo podnetným na vytvorenie pracovných listov a úloh pre workshop organizovaný na katedre matematiky Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre s názvom: *Kreslíme ako Escher alebo umenie zhodných zobrazení*.

Workshop sa konal 20.5. 2015 a bol určený pre žiakov vybraného nitrianskeho gymnázia. Zúčastnilo sa ho 54 žiakov vo veku od 16 – 17 rokov, ktorých sme rozdelili do troch približne rovnako veľkých skupín. Samotný workshop prebiehal v troch etapách po 60 minút.

Vzdelávacie ciele workshopu:

- podporiť medzipredmetové vzťahy, a tak motivovať žiakov k učeniu sa matematiky najmä geometrie;
- ukázať žiakom použitie zhodných zobrazení v umení ;
- dať žiakom priestor na tvorivosť a vlastné objavovanie;
- rozvinúť geometrickú predstavivosť žiakov.

Workshop sa začal úvodom o teseláciách, kde sa nachádzajú v našom okolí a ako ich možno nájsť aj v dielach Eschera. Následne sme žiakov rozdelili do dvojíc, trojíc alebo štvoríc podľa toho ako prejavili záujem o spoločnú prácu.

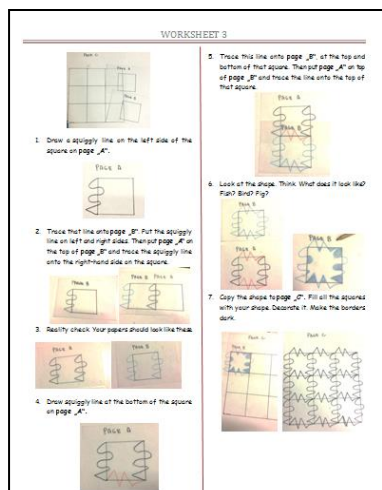
Chceli sme od žiakov, aby vytvorili vlastné teselácie podľa predloženého postupu. Každá skupina dostala iný postup tvorby teselácií. Konkrétne sme vytvorili 6 pracovných listov s rôznymi postupmi ako tvoriť teselácie. Pracovné listy boli vytvorené v anglickom jazyku z dôvodu, že išlo o žiakov bilingválneho gymnázia. Tri pracovné listy boli zamerané na tvorbu teselácií z rovnostranného trojuholníka a tri na tvorbu teselácií zo štvorca. Pri jednotlivých pracovných listoch sme sa snažili použiť rozličné postupy tvorby, aby sme žiakom ukázali otvorenosť tohto problému.

Na konci workshopu si žiaci vybrali reprezentanta svojej skupiny, ktorí prezentoval postup, akým vytvorili svoje teselácie. Cieľom bolo, aby oboznámili aj ostatných spolužiakov mimo svojej skupiny so spôsobom tvorby teselácií z daného pracovného listu. Pre nás to bola spätná väzba, či žiaci skutočne jednotlivým postupom porozumeli. Tvorivú atmosféru workshopu podporili nielen rozdelením žiakov do skupín, ale aj vhodnou hudbou.

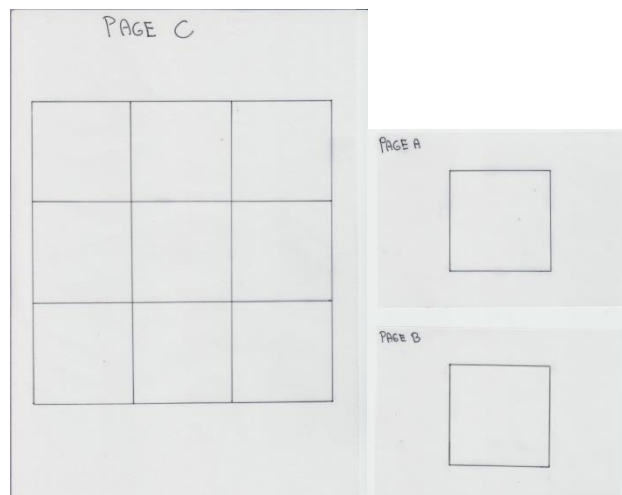
Ukážka pracovného listu

V tomto článku popíšeme iba jeden vybraný pracovný list (obr. 4). Žiaci mali podľa tohto pracovného listu vytvoriť teseláciu vychádzajúcu z rovinného útvaru - štvorca, pričom pri tvorbe teselácie mali využiť posunutie.

Pracovný list 3 použilo pri riešení 9 žiakov. Každý žiak k tomuto pracovnému listu, okrem postupu dostal tri transparentné papiere (obr. 5). Na dvoch menších papierocho bol narysovaný rovnako veľký štvorec a tieto papiere sme označili ako PAGE A a PAGE B. Na treťom transparentnom papieri označenom ako PAGE C bolo narysovaných 9 rovnako veľkých štvorcov ako na papierocho PAGE A a PAGE B, narysované boli tesne vedľa seba. Úlohou pre žiakov nebolo postup z pracovného listu kopírovať, ale sa ním inšpirovať pre vlastnú tvorbu.



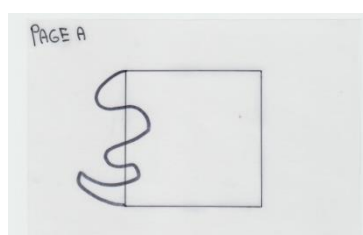
Obr. 4: Pracovný list 3



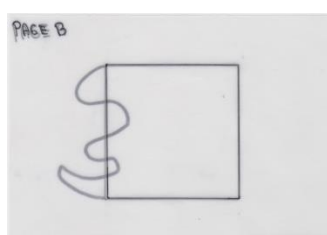
Obr. 5: Transparentné papiere

Ďalej bližšie popíšeme postup, ktorý bol žiakom na tomto pracovnom liste predložený:

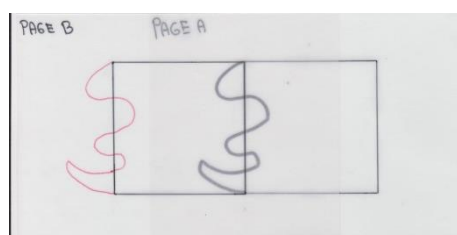
- 1) Narysuj ľubovoľnú krivku na ľavej strane štvorca na PAGE A (obr. 6).
- 2) Prekresli túto krivku na PAGE B (obr.7). Nakresli túto krivku na pravú a aj na ľavú stranu štvorca na PAGE B. Potom polož PAGE A na vrch PAGE B a prekopíruj túto krivku aj na pravú stranu štvorca na PAGE A (Obr. 8).
- 3) Over si, že tvoje dva papiere PAGE A a PAGE B vyzerajú ako na obr. 9.
- 4) Nakresli ľubovoľnú krivku na spodnej strane štvorca na PAGE A (obr. 10).
- 5) Prekopíruj túto krivku na PAGE B na vrchnú a na spodnú stranu štvorca na PAGE B. A potom polož PAGE A na PAGE B a prekopíruj túto krivku na vrch štvorca na PAGE A. (obr. 11).
- 6) Pozri sa na tvary, ktoré ti vznikli. Čo ti pripomínajú? Rastlina? Zviera? (obr. 12)
- 7) Prekopíruj tento tvar na PAGE C. Vyplň všetky štvorce na PAGE C týmto tvarom. Základný tvar vyznač a farebne dotvor svoje dielo (obr. 13).



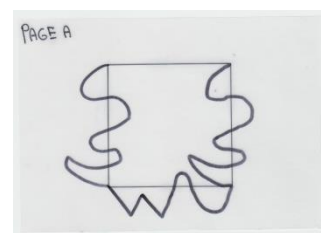
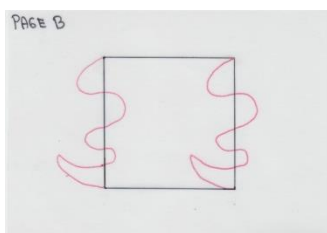
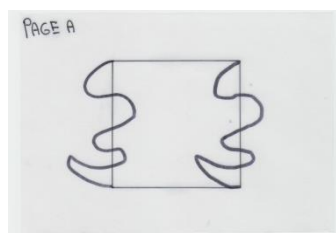
Obr. 6: Krivka na ľavej strane štvorca

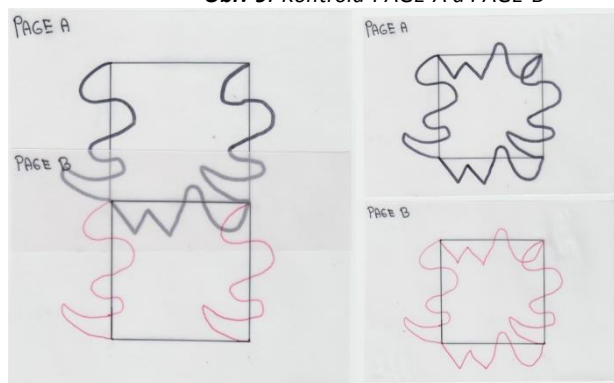
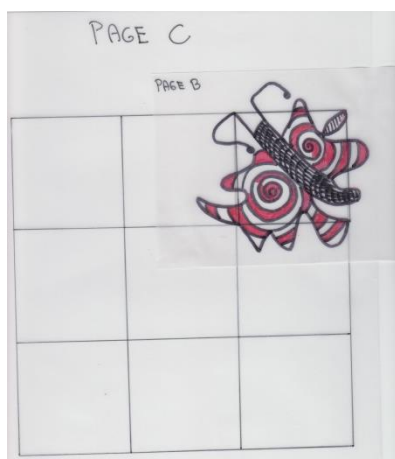
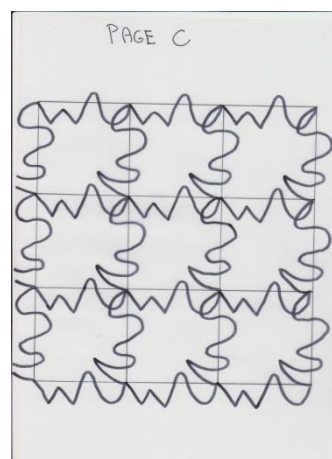


Obr. 7 Papier PAGE A je pod PAGE B



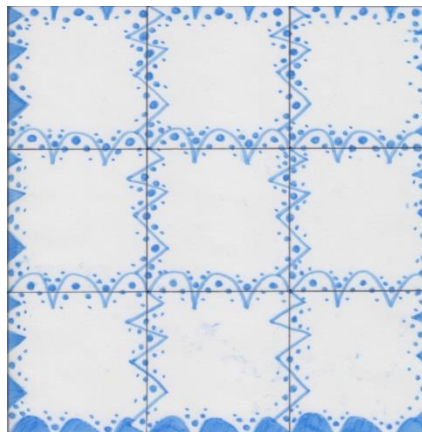
Obr. 8: PAGE A je pod PAGE B

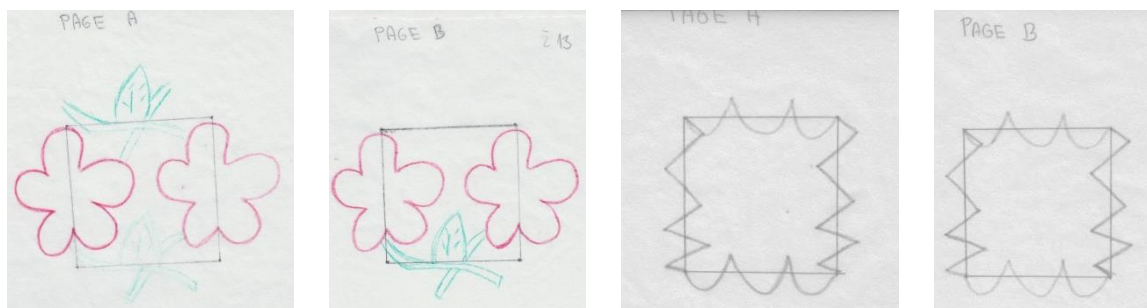


Obr. 9: Kontrola PAGE A a PAGE B**Obr. 10:** Krivka na spodnej strane štvorca**Obr. 11:** PAGE B je na PAGE A**Obr. 12:** Hľadanie tvaru**Obr. 13:** Vyplnenie PAGE C

Riešenia žiakov

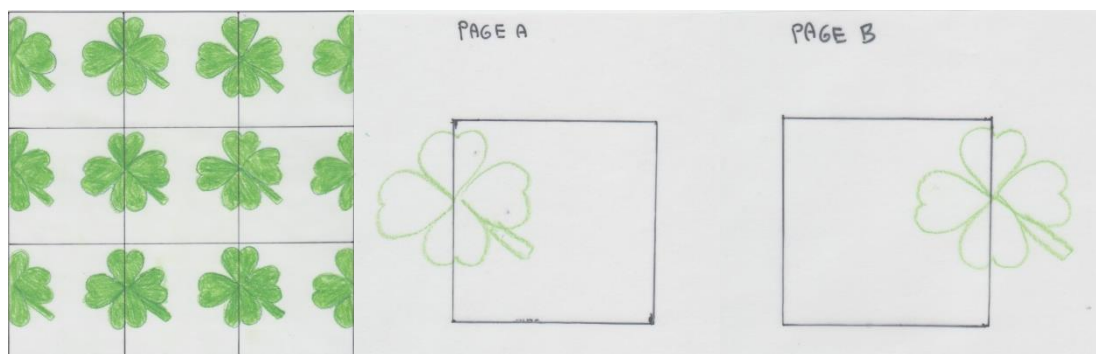
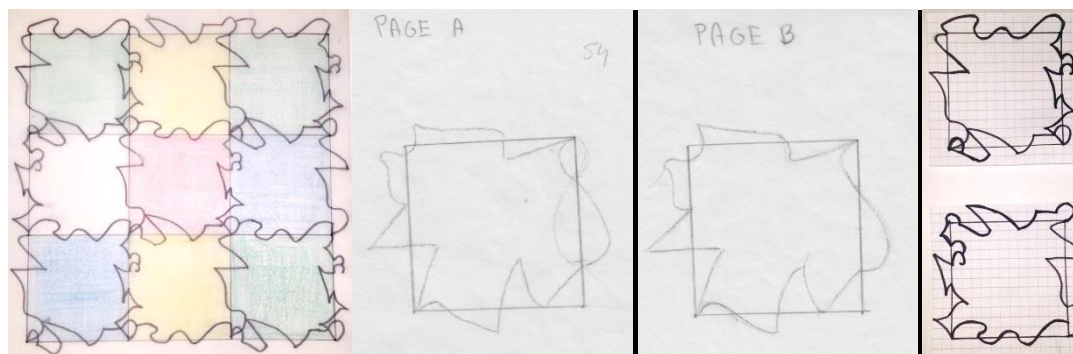
Úlohu riešilo 9 žiakov, z ktorých 7 žiakov úlohu splnilo, a jeden žiak splnil úlohu čiastočne a jedno riešenie sme nezaradili ani k správnym, ani k nesprávnym riešeniam. Okrem splnenia úlohy sme hodnotili aj tvorivosť riešení, avšak 60 min. nebolo postačujúcich na celkové dokončenie prác. Na obr. 14 sú dve riešenia, ktoré považujeme za správne. Pri prvom riešení si žiak hneď na začiatku vymyslel tvar kvetiny, ktorým vyplní rovinu. Žiak pri tvorbe použil posunutie správne a vhodne. Zaujímavé je, že krivku pre spodnú stranu štvorca si zvolil ako uzavretú krivku (tvar kvetiny). Pri druhom riešení vidíme, že žiak postupoval presne podľa postupu, najskôr navrhol tvar, ktorým následne farebne dotvoril. Postup riešenia žiakov ilustrujú odovzdané časti PAGE A a PAGE B (obr. 15).



Obr. 14: Správne riešenia**Obr. 15:** PAGE A a PAGE B správnych riešení žiakov

Na obr. 16 je ďalšie riešenie žiaka. Riešenie so štvorlístkom považujeme za čiastočne správne. Podľa PAGE A a PAGE B usudzujeme, že žiak nevynaložil veľkú námahu a hneď si nakreslil tvar štvorlístka, ktorý síce správne posunul, čo môže vidieť na PAGE A a potom následné prekreslenie tvaru štvorlístka na PAGE B. Žiak neriešil dolnú a hornú stranu štvorca, preto toto riešenie považujeme iba za čiastočne splnené.

Na obr. 17 je ďalšie žiacke riešenie, ktoré sme nezaradili ani k správnym, ani k nesprávnym riešeniam. Podľa PAGE A a PAGE B vidíme, že žiak si nakreslil ľubovoľne všetky strany štvorca a tieto prekreslil z PAGE A na PAGE B, nevytvoril však útvar, ktorý by pokrýval rovinu resp. teseloval. Pri ďalšej tvorbe si pomohol štvorčekovým papierom (obr. 17). Vidíme, že žiak nakreslil dva útvary, ktoré sa navzájom „doplňajú“. Jeho úlohou však bolo vytvoriť jeden teselujúci útvar. Výsledné riešenie vytvoril striedaním dvoch útvarov zo štvorčekových papierov. Riešenie je iné ako všetky ostatné riešenia, a teda tento žiak sa nepridržiaval daného postupu. V jeho riešení by sme okrem posunutia mohli nájsť aj ďalšie zhodné zobrazenia. Tento žiak bol pri tvorbe podľa nášho názoru naozaj tvorivý.

**Obr. 16:** Čiastočne správne žiacke riešenie**Obr. 17:** Čiastočne správne žiacke riešenie

Na základe dotazníkov a rozhovoru so žiakmi sme niektorých inšpirovali k ďalšej tvorbe. Žiaci v škálovacom dotazníku hodnotili aj zrozumiteľnosť pracovných listov. Pracovný list 3 ohodnotili na škále od 1 – 5, kde 1 znamenalo úplne zrozumiteľný a 5 nezrozumiteľný, nasledovne: 2 žiaci zakrúžkovali 1, 6 žiakov zakrúžkovalo 2 a 1 žiak zakrúžkoval 3. Na základe toho subjektívne hodnotíme, že náš pracovný list bol zrozumiteľný a primeraný ich veku.

V 29% prípadoch sa žiaci vyjadrili, že sa im workshop *veľmi páčil* a 67% sa *páčil* a iba 4% žiakov z celkového počtu 54 hodnotili workshop ako *priemerný*.

Obsah workshopu bol pre 22% žiakov veľmi zaujímavý, pre 69% zaujímavý a 9% žiakov ho hodnotilo ako obyčajný.

A či sa žiaci naučili niečo nové? 27% žiakov sa naučilo veľa nových vecí, 61% žiakov sa niečo nové naučilo, 6% aspoň niečo nové sa naučili, ale bolo toho málo a 6% žiakov sa vôbec nič nové nenaučili.

Záver

Počas workshopu si niektorí žiaci našli vlastný postup tvorby, čo považujeme za kreatívne a tvorivé. Naším zámerom nebolo, aby žiaci vytvorili kópiu Escherovho diela, ale aby si uvedomili rozmanitosť postupov pri vypĺňaní roviny. Okrem toho sme chceli, aby si žiaci uvedomili využiteľnosť zhodných zobrazení v rovine.

Zo skúseností z realizácie workshopu a výsledkov našich pozorovaní sme dospeli k záveru, že na to, aby bol žiak schopný vytvoriť teseláciu podľa predloženého návodu nepotrebuje mať formálne vedomosti o zhodných zobrazeniach, pretože tieto sú v postupe skryto zakomponované. Dôležitým predpokladom na splnenie úlohy z workshopu bola predstavivosť, manuálna zručnosť, a tiež tvorivosť. Úlohy s teseláciami patria medzi úlohy, ktoré dávajú žiakom priestor na tvorivosť, a tak ich môžu motivovať k učeniu sa matematiky. Motivačne na žiakov pôsobí aj spojenie matematiky a výtvarného umenia. Navyše teselácie, ich tvorba, pozorovanie a zamýšľanie sa nad princípmi ich tvorby môžu rozvíjať geometrickú predstavivosť žiakov.

Literatúra

Clapham, Ch., Nicholason, J. 2009. The Concise Oxford Dictionary of Mathematics.

New York: Oxford University Press Inc, 2009.

Csachová, L. 2010. *Pravidelné a náhodné teselácie vo vyučovaní matematiky, dizertačná práca*. Praha: PF UK v Prahe, 2009.

Durič, L. a kol. (1986). Psychológia tvorivosti so zameraním na žiakov základných škôl. *Psychológia a škola X*. Bratislava: SPN, 1986.

Escher, M. C., Locher, J. L., Veldhuyse, W. F. 2009. M. C. Escher a jeho magie. Praha: Slovart, 2009.

Harris, A. 2000. The Mathematics of Tessellation. London: St Martin's college, 2000.

Lokšová, I., Lokša, J. 1999. Pozornosť, motivácia, relaxácia a tvorivosť detí ve škole. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-205-X.

Developing Combinatorial Thinking

Joanna Major^a – Maciej Major^a

**Institute of Mathematics, Pedagogical University in Krakow, Podchorążych 2, PL-30-084 Kraków*

Received 20 September 2015; received in revised form 23 September 2015; accepted 27 September 2015

Abstract

The article presents remarks concerning the possibility of introducing elements of probability in teaching at the primary stage of education. In our paper we focused on combinatorial thinking. In the course of the study, the pupils were asked to solve a few problems. They included problems related to combinations (two-element and three-element combinations of a four-element set) and permutations (three- and four-element ones).

Keywords: probability, pupils' combinatorial thinking, primary education

Classification: AMS (2000) 97B20

Introduction

Elements of geometry, arithmetic, and algebra are introduced from the beginning of mathematical education. At the same time, probability (here understood as a fusion of elements of probability theory, combinatorics and descriptive statistics) occupies very little space in the curricula. In the current Polish core curriculum in mathematics – primary education (from 4th to 6th grade of primary school), there are only some elements of descriptive statistics. The pupil is required to master the following skills: gathering and organizing data, recognising and interpreting data presented in texts, tables, diagrams, and graphs (see Core Curriculum, 2012).

Due to the fact that teaching probability is so limited, the research on the possibility of introducing some elements of stochastics from the beginning of the primary education is very interesting. Needless to say, it is not the matter of familiarizing pupils with ready-made components of probability but of providing them with opportunities of exploring the concepts of probability and developing their probabilistic thinking. These mathematical activities seem to be important for the educational process as the surrounding reality abounds with random events.

The theorists of mathematical instruction point at the necessity of familiarizing pupils with the elements of probability as early as possible. According to H. Freudenthal, “... *the process of developing students' probabilistic thinking should be carried out in a systematic way, parallel to the development of deterministic thinking. Moreover, it should be continued over many years of education and, as a consequence, it should be started as early as possible*” (cf. Łakoma, 1988). It is noteworthy that H. Freudenthal in his concept of teaching emphasises the importance of guiding the students into the process of mathematisation, which is understood as organising the reality through mathematical measures, in as diversified

^a * Corresponding author: joanna.major.up@gmail.com
DOI: 10.17846/AMN.2015.1.2.29-34

manner as possible, whereby the probability theory is regarded as one of the best ways to achieve this goal (Łakoma, 1989).

Analysis of results

The research on pupils' combinatorial thinking was conducted in May 2015 (at the end of the school year) in a primary school near Krakow. It was effectuated in two stages. During the first stage, the pupils worked on a survey. The second stage of research included discussing the solutions of the problems with the pupils. The study was conducted in a small (ten-member) group of fourth-grade pupils representing various levels of mathematical skills.

The goal was an attempt to answer the question whether the fourth-grade pupils were capable, using their existing skills and knowledge, of solving combinatorial problems.

In the course of the study, the pupils were asked to solve a few problems. These included problems related to combinations (two-element and three-element combinations of a four-element set) and permutations (three- and four-element ones).

Due to the fact that the pupils were not familiar with combinatorial terms, the problems were worded as follows:

- P1. In how many ways can you invite 2 out of 4 people to a party?
- P2. In how many ways can you invite 3 out of 4 people to a party?
- P3. In how many ways can you load 3 blocks with different colours (yellow, green, and blue) onto 3 carriages so that there is exactly one block in each carriage? Write or draw all solutions.
- P4. In how many ways can you load 4 blocks with different colours (yellow, green, blue, and pink) onto 4 carriages so that there is exactly one block in each carriage? Write or draw all solutions.
- P5. How many different three-digit numbers can be composed of digits: 1, 2, and 3? Write or draw all solutions.
- P6. How many different four-digit numbers can be composed of digits: 1, 2, 3, and 4? Write or draw all solutions.

When answering the questions, pupils enjoyed full liberty to choose the method of presenting their solutions. This allowed us to observe the manners in which they mathematized the described situations.

In P1, most pupils put down all possibilities. In addition, in their solution of the problem, most of them assigned names to particular people mentioned in the problem or marked them with different colours, drawing coloured lines grouped in twos.

Almost all pupils presented solutions with a similar structure to the one depicted in Figure 1.

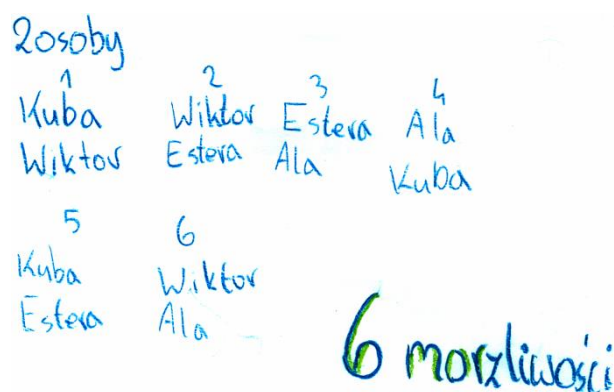


Figure 1.

Having listed all possibilities, pupils gave the answer. There are six possibilities.

One of the solutions worthy of mentioning is the one where the author obstinately tries to present the wording of the problem with the letter symbols (see Figure 2.)

Ala
Estera

$$A + E : 4 = 2$$

$$2 : 4 = 2$$

Figure 2.

The author writes the formula and then she assumes that $A + E = 1$. This conclusion follows from the fact that the correct answer to the question posed in the problem is 2.

When solving P2, most pupils chose the identical method as in P1. Figure 3 presents a sample correct solution of P2.



Figure 3.

It is noteworthy that during the interview summing up different solutions of P2, one of the pupils pointed out that there must be four possibilities. She stated that inviting 3 people out of 4, we leave one person out, and one person may be selected in four different ways.

Answering the question of P3, most pupils obtained the correct answer (six possibilities), whereby the pupils drew all the possibilities (cf. Figure 4).



Figure 4.

Three pupils did not obtain the correct solution. Two of them only presented the data of the problem by drawing them (cf. Figure 5).

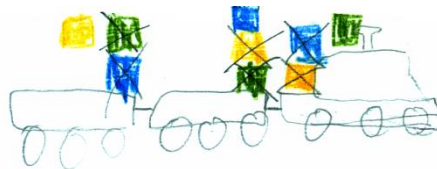


Figure 5.

The third pupil gave (drew) only three possibilities. The essence of this solution was based on the fact, which was not included in the problem's wording, that a block with a particular colour may be placed only once in a given carriage. (see Figure 6).



Figure 6.

Answering the question contained in P4, the pupils applied a method analogous to the one used in P3. Unfortunately, the correct answer was given only by one person, who started by drawing all possibilities (the pupil drew all trains with a pink block in the first carriage – six trains) and then wrote that the number of trains will be four times bigger, i.e. there will be 24 trains.

The remaining pupils made errors in their solutions, mainly consisting of omitting certain possibilities (permutations). This resulted probably from the fact that the number of all trains is as high as 24; therefore their identification (enumeration) requires a sufficiently systematic approach, which some of the pupils lacked. For illustration, two selected solutions are presented (see Fig. 7 and Fig. 8).

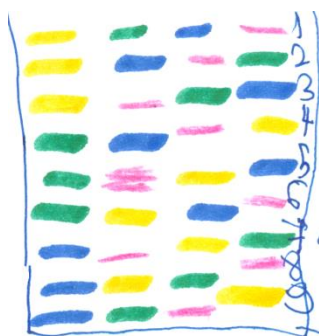


Figure 7.



Figure 8.

The mathematical layers of problems P5 and P3, as well as problems P6 and P4, are identical; therefore the numerical answers are also identical. The pairs of problems differ in their wording, whereby the problems P5 and P6 are purely mathematical. The pupils did not notice the analogy between the pairs of problems and they tried to solve each problem separately. Meanwhile, problems P5 and P6 posed much more difficulties. Perhaps this results from the fact that as the pupils solved a mathematical problem, they tried to apply familiar algorithms and courses of action, whereas when solving P3 and P4 they were guided by experience and common sense.

It is notable that in problems with realistic wording, pupils presented the possibilities in a more systematic way than in those related to numbers.

Problem P6 was solved correctly by one person only. The reasoning of this pupil was analogical to that proposed by the same person in the solution of P4 (see Figure 9).

$$\begin{array}{cccc}
 1234 & 1432 & 2134 & 2431 \\
 1243 & 1342 & 2143 & 2314 \\
 1423 & 1324 & 2413 & 2341
 \end{array} \cdot 2 = \textcircled{24}$$

Figure 9.

Among the examined pupils, one person solved many problems with numerical answers based on estimation/guessing the number of possibilities.

Conclusion

In the final interview, the surveyed pupils said that the proposed tasks were interesting and different from those solved during the mathematics lessons on a daily basis. They also pointed out that the issues referred to in the tasks occurred in the everyday life.

The observations made during the research bring us to the conclusion that some probabilistic issues may be introduced at the beginning of the primary stage of education. With the right formulation of problems it is possible to develop the pupils' ability to encode information. Assigning tasks similar to those described above makes it possible to shape basic probabilistic intuitions as well as a systematic approach in presenting all possibilities. Therefore, it also leads to the development of logical thinking.

References

- Łakoma, E.(1988). *O poglądach H. Freudenthala na temat nauczania rachunku prawdopodobieństwa i statystyki*: Matematyka, 4, 204-213.
- Łakoma, E. (1989). *H. Freudenthal o kształtowaniu podstawowych pojęć probabilistycznych*: Matematyka 2. 82-90.
- Podstawa Programowa* (Core Curriculum). (2012). <http://www.lex.pl/du-akt/-/akt/dz-u-2012-977> , access 2nd June 2015

Identifikácia profesionálnej identity učiteľa matematiky Identification of Professional Identity of Mathematics Teacher

Klimentová Lucia^a – Šunderlík Ján^a

^a*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr.
A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 25 September 2015; received in revised form 28 September 2015; accepted 5 October 2015

Abstract

In the article we describe metaphors as a diagnostic tool in mathematics teachers' education. We assume that metaphors can offer self-reflection in finding professional identity of teachers and provide insight into teacher's beliefs to teaching. In presented pilot study we focused on two research samples in-service and pre-service teachers. Based on the results of pilot study we discuss the advantages and limitation of metaphors as a analytical tool for better understanding the mathematics teachers' role that is important in pre-service and in-service teacher education.

Key words: metaphors, beliefs, professional identity of mathematics teacher.

Classification: C-20, B-50

Úvod

V súčasnej dobe sa na školách kladie dôraz na zmenu prístupu vo vyučovaní matematiky. Ide hlavne o aktivitu žiaka vo vyučovaní a o zapájanie objavných a konštruktivistických prvkov, ktoré by žiakom pomohli lepšie porozumieť učivu. Veľmi významnú úlohu tu zohráva učiteľ a jeho osobnosť. Každý učiteľ by mal dôkladne ovládať svoj odbor, mať dobrú pedagogickú prípravu a vysokú všeobecnú kultúru.

S typológiou osobnosti učiteľa súvisí aj učiteľovo chápanie výučby. Jeden učiteľ odmieta akékoľvek inovácie vo výučbe, iný zasa nekriticky obdivuje a prijíma všetko nové, ďalší nemá vyhranený názor, mení ho podľa svojho momentálneho záujmu alebo podľa toho, čo je „v móde“. (Turek, 2008) „Učiteľovo chápanie výučby predstavuje všeobecnú stratégiu pre myslenie a konanie učiteľa, tvorí základ pre učiteľovo uvažovanie o skutočnosti, je východiskom pre plánovanie výučby, pre vlastné vyučovanie, hodnotenie pedagogickej reality, seba samého, žiakov, kolegov, nadriadených“ (Průcha – Walterová – Mareš, 1995, in Turek, 2008).

„Pojmom učiteľovo chápanie výučby sa rozumie súbor učiteľových názorov, presvedčení a postojov k výučbe, ako aj súbor argumentov, ktorými učiteľ svoje názory, presvedčenie, postoje zdôvodňuje.“ (Kalhous – Obst, 2002, in Turek, 2008) V našom príspevku budeme takto

* Corresponding author: lucia.klimentova@ukf.sk ; jsunderlik@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2015.1.2.35-41

komplexne chápaný pohľad na učiteľa stotožňovať s takzvanou „profesionálnou identitou učiteľa“.

Učitelia matematiky, ako aj študenti učiteľstva matematiky, majú rôzne skúsenosti s učením sa a vyučovaním matematiky. Na základe toho si dlhodobo a neuvedomele formujú vnútorné postoje. Tieto postoje zohrávajú dôležitú úlohu akéhosi filtra, ktorý ovplyvňuje vyučovanie a učenie sa v triede.

Uvedenie si vlastných postojov, s ktorými prichádzajú študenti učiteľstva matematiky na štúdium, je dôležitou súčasťou pri príprave budúcich učiteľov matematiky a mala by sa venovať pozornosť ich aktívnemu rozvíjaniu prostredníctvom reflexie. Z uvedeného dôvodu by okrem kvalitného matematického vzdelania mala byť prítomná počas prípravy učiteľov matematiky aj reflexia študentov učiteľstva na ich vlastnú pedagogickú prax, čo výrazne podporuje rozvoj profesionálnej identity učiteľov matematiky. Uvedenej problematike sa venujú štúdie rozvoja profesionálnej identity študentov učiteľstva matematiky pomocou podpory reflexie na vlastnú pedagogickú prax (Šunderlík 2013, Šunderlík, Čeretková 2012). Stále však v slovenskej praxi chýbajú vhodné metódy, ktoré by nám poskytli korektný vhľad do postojov širšej skupiny učiteľov matematiky.

Teoretické východiská

„Človek si môže utvárať postoj ku všetkému okolo seba – k ľuďom, veciam, umeniu, náboženským predstavám, ale aj voči sebe samému. Človek môže mať postoje len k tým veciam, ktoré existujú v jeho svete, v jeho zornom poli. Ak má obmedzený svet a nemá dostatok podnetov a skúseností, tak niektoré postoje nemá rozvinuté, alebo ich jednoducho nemá vôbec.“ (Dúbravová, 2014)

„Postoje radíme k významným motivačným činiteľom a činiteľom celostného rozvoja osobnosti, ktoré usmerňujú správanie a konanie človeka.“ (Lepik, Pipere, 2012, in Klimentová, 2015)

„Hannula chápe pojem postoj ako koncepciu, pohľad a osobnú ideológiu, ktorá tvaruje učiteľovu prax. Výskumy postojov vo vzdelávaní matematiky sú zamerané na to, aký majú učitelia pohľad na matematické vzdelávanie, a na vzdelávanie všeobecne.“ (Hannula, Lepik, Pipere, Tuohilampi, 2013, in Klimentová, 2015)

Postoje zohrávajú významnú rolu vo vyučovaní prostredníctvom učiteľa a jeho vyučovacieho štýlu. Pôsobia na to, čo bude učené, ako to bude učené a čo sa žiaci naučia. Formujú, ako učiteľ cíti a myslí v matematike, ako sa ju učí a ako ju vyučuje. (Oksanen, Hannula, 2013) Toto všetko tvorí vyučovací štýl učiteľa. Možno ho chápať ako určitý individuálne špecifický spôsob vyučovania, ktorý v určitom období a kontexte učiteľ uprednostňuje. (Rovňanová, 2015)

Vzhľadom na to, že postoje učiteľa sa neprejavujú priamo, je potrebné hľadať vhodný nástroj, ktorý by nám poskytol najpresnejší obraz o vnútorných postojoch učiteľa. V našom príspevku vychádzame z výskumu, v ktorom (Sfard, 1998) uvádza, že voľba metafory je podmienená spôsobom rozhodovania, teda použitie odlišnej metafory viedlo k rozdielnemu spôsobu uvažovania o skúmanej téme. Z čoho vyplýva, že rozdielne premýšľanie vedie k odlišným akciám, a teda metafory majú schopnosť sa prelínať z jednej domény na druhú. (Löfström at al.

2010) Vzhľadom na hlboké zakorenenie postojov a časté neuvedomovanie si ich, ako aj ich pôvodu veríme, že analyzovanie učiteľmi vytvorených metafor o vlastnom vyučovaní matematiky prinesie viac svetla v problematike skúmania vnútorných postojov učiteľov k vyučovaniu.

Pomocou metafor opisujeme javy cez známe pojmy. Používanie metafor týkajúcich sa učenia a vyučovania vedie k začiatkom videnia procesu zmien učiteľa. (Oksanen, Hannula, 2013)

Upozorňujeme, že metafory sa nedajú samy o sebe dokázať, ani nedemonštrujú nič nové. Iba nám umožňujú vidieť nové svetlo v tom, čo robíme alebo prežívame. (Ahmet 2006, in Oksanen, Hannula, 2013)

Metodológia dotazníkového prieskumu

V snahe zistiť, popísať a interpretovať učiteľovo chápanie výučby sme zostavili výskumný rámec na skúmanie postojov učiteľov matematiky, ktorý je súčasťou skupiny výskumníkov združených v projekte NorBa TM (New Open Research: Beliefs about Teaching Mathematics – Nový otvorený výskum zameraný na skúmanie postojov vo vyučovaní matematiky). V našom príspevku sa zameriavame len na časť uvedeného výskumu, v ktorom sme skúmali respondentmi vytvorené metafory vzťahujúce sa na rolu učiteľa. Vzhľadom na pilotný charakter výskumu sme si stanovili nasledovnú výskumnú otázku: „Aké je zastúpenie jednotlivých typov metafor o učiteľoch matematiky medzi respondentmi?“

Na zodpovedanie našej výskumnej otázky sme použili viacpoložkový dotazník NorBA TM, z ktorého sme spracovali iba jednu časť týkajúcu sa danej problematiky.

Ako sme už vyššie spomenuli, respondenti pozostávali z dvoch skupín. Išlo o stredoškolských učiteľov matematiky v Nitrianskom kraji a o študentov druhého ročníka magisterského štúdia učiteľstva matematiky v kombinácii na Univerzite Konštantína Filozofa v Nitre.

Úlohou respondentov bolo napísať metaforu, ktorá vystihuje ich samotných ako učiteľov matematiky a stručne túto metaforu vysvetliť. Metaforu však nevnímame ako básnický jazykový prostriedok, ale ako psychologickú metódu dopĺňovania viet, ktorá slúži na odhalenie určitej osobnostnej dynamiky v závislosti na použitých vetách. Táto metóda pozostáva z viet, ktoré nemajú ukončenie a úlohou respondenta je vetu dokončiť. V našom prípade mali respondenti dokončiť vetu: „*Ja ako učiteľ matematiky som...*“. Našou úlohou bolo potom tieto metafory kategorizovať, a podľa určitých znakov za pomoci manuálu od Löfströmovej, Poomovej a Hannulu (2011) ich zaradiť do nasledovných skupín:

1. Učiteľ ako matematický expert
2. Učiteľ ako didaktický expert
3. Učiteľ ako pedagogický expert
4. Metafory vzťahujúce sa na osobnosť človeka
5. Metafory týkajúce sa vyučovacieho prostredia
6. Hybridy / Zmiešané metafory

Prvé tri skupiny podľa Beijaard, Verloop a Vermunt (2000) vychádzajú z myšlienok práce Schulmana (1986), ktorý kategorizoval učiteľove vedomosti na vedomosti z predmetu, pedagogické vedomosti a pedagogické vedomosti daného predmetu. Štvrtá skupina je zameraná na samotnú osobnosť učiteľa a piata skupina je zameraná na prostredie, v ktorom prebieha vyučovanie. Poslednou skupinou sú tzv. Hybridy, kde sme zaradili metafory, ktoré sa

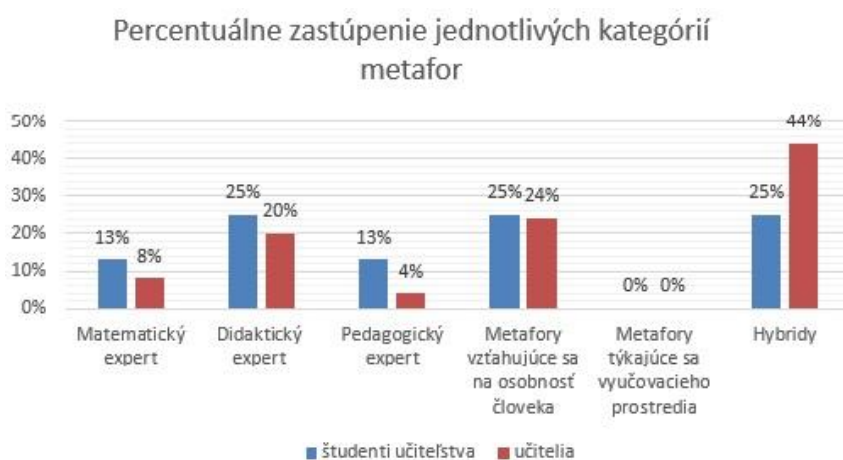
dali súčasne zaradiť do dvoch alebo viacerých skupín. Uvedená metóda skúmania metafor je doplnková v oblasti skúmania postojov prostredníctvom analýzy hlavných komponentov z ostatných modulov dotazníka, ktoré však v tomto príspevku neuvádzame, ale môžeme ich nájsť v (Šunderlík, Rybanský 2015).

Metaforu sme zatriedili do vyššie uvedených šiestich skupín najskôr každý samostatne. Zhoda zatriedenia pri učiteľoch matematiky bola 52% a pri študentoch učiteľstva 75%. Nízke percento zhody pri určovaní metafor bolo zapríčinené najmä kategóriou Hybridov, kde boli mierne odchýlky so zaradovaním metafor do viacerých kategórií. Sporné prípady boli následne prediskutované a spoločne zaradené do príslušnej kategórie.

Zistenia a interpretácia výsledkov

Dáta boli zozbierané vo februári 2015 od stredoškolských učiteľov v Nitrianskom kraji (ďalej len učitelia matematiky) a študentov druhého ročníka magisterského štúdia učiteľstva matematiky v kombinácii na Univerzite Konštantína Filozofa v Nitre (ďalej len študenti učiteľstva). Na dotazník reagovalo 53 učiteľov, čo je 32% celkovej populácie stredoškolských učiteľov matematiky Nitrianskeho kraja a 19 študentov učiteľstva, čo je 63% populácie. Na skúmanú časť dotazníka však reagovalo iba 47% zúčastnených učiteľov a 42% zúčastnených študentov učiteľstva. Z uvedeného vyplýva, že tvorba metafor pre učiteľov matematiky je pomerne náročná a v dotazníkovom prieskume bola vynechaná každým druhým respondentom. To nám ukazuje základné limity použitia uvedenej metódy a navrhnúť opatrenia pre hlavný zber údajov.

Prehľad výsledkov prieskumu uvádzame v grafe č. 1.



Graf 1: Percentuálne zastúpenie jednotlivých metafor

Do skupiny **Učiteľ ako matematický expert** sme zaradili 13% študentov učiteľstva, ale iba 8% učiteľov matematiky. Ide o učiteľa, ktorý preferuje rigoróznosť matematických vedomostí a zameriava sa viacej na matematický obsah ako didaktiku alebo pedagogiku. Metaforu popisujú učiteľa ako prameň vedomostí. Vyučovanie je zamerané na prenos informácií študentom.

Príklad: Chodiaca encyklopédia. *Vysvetlenie:* Učiteľ sa musí neustále vzdelávať, musí mať odborné vedomosti.

Ďalšou skupinou bola skupina **Učiteľ ako didaktický expert**. Sem sme zaradili 25% študentov učiteľstva a 20% učiteľov matematiky. Sú to učelia, ktorí majú vedomosti o tom, ako vyučovať matematiku tak, aby žiaci videli jej využitie v praxi. Na rozdiel od predchádzajúcej kategórie sa matematické vedomosti prelínajú s vedomosťami o vyučovaní matematiky. Dôraz sa kladie na didaktické podanie obsahu a vytváranie podporného vyučovacieho prostredia, ktoré pomáha žiakom pri učení sa, optimálne využívanie vyučovacích a učebných metód a iných podporných techník.

Príklad: Režisér. *Vysvetlenie:* Usmerňuje, ale dáva priestor na vlastné myšlienky.

V skupine **Učiteľ ako pedagogický expert** sa nachádza 13% študentov učiteľstva a 4% učiteľov matematiky. Základným prvkom pedagogických vedomostí je porozumenie ľudskému mysleniu, správaniu a komunikácii. Dôraz sa kladie na vzťahy, hodnoty, morálny a emocionálny vývin.

Príklad: Bútľavá vrba. *Vysvetlenie:* Vypočujem si všetko a potom diskutujem.

Najviac zastúpenou skupinou spomedzi jednozložkových skupín bola skupina **Metafory vzťahujúce sa na osobnosť človeka**. Bolo sem zaradených 25% študentov učiteľstva a 24% učiteľov matematiky. Tieto metafory sa nevzťahujú na vyučovanie ani na žiakov. Sú zamerané na to, čo vyučovanie reprezentuje pre každého učiteľa. Popisujú rysy alebo charakteristiky učiteľovej osobnosti, ale neodkazujú na úlohy učiteľa. Poukazujú na to, kto učiteľ je.

Príklad: Praktik. *Vysvetlenie:* Nakoľko učím na odbornej škole, snažím sa aplikovať matematiku na odbor a na praktické využitie v každodennom živote. Som praktický typ človeka, veľmi rada využívam IKT.

Do skupiny **Metafory týkajúce sa vyučovacieho prostredia** sme na základe kritérií nezaradili žiadneho študenta, ani učiteľa matematiky. Metafory týkajúce sa vyučovacieho prostredia – popisujú vlastnosti a charakteristiky práce/ pracovného prostredia. Opisujú, kde (fyzicky, sociálne, organizačne) alebo v akom prostredí učiteľa pracujú. Vykresľujú učiteľa v sociálnom kontexte trieda so žiakmi), ale nezobrazujú matematické vedomosti učiteľa.

Celkovo najviac zastúpenou skupinou bola skupina **Hybridy/Zmiešané metafory**. Zaradili sme sem 25% študentov učiteľstva a až 44% učiteľov matematiky, čo je takmer polovica. Ide o skupinu, ktorá zahŕňa kombináciu vyššie uvedených kategórií. Zvyčajne zmiešané metafory obsahujú pedagogický alebo didaktický aspekt.

Príklad: Kúzelná mapa. *Vysvetlenie:* Pozná všetky cesty, ale nechá žiakov vybrať si, ktorou cestou sa vyberie. Ak si žiak zvolí úplne novú, vlastnú, cestu a je správna, táto cesta sa do mapy zakreslí.

V tabuľke 1 ponúkame štruktúru zmiešaných metafor stredoškolských učiteľov matematiky.

Tabuľka 1: Štruktúra hybridných metafor stredoškolských učiteľov matematiky

	didaktický expert + metafora vzťahujúce sa na osobnosť človeka	matematický expert + pedagogický expert	matematický expert + metafora vzťahujúce sa na osobnosť človeka	matematický expert + didaktický expert	didaktický expert + pedagogický expert	metafora vzťahujúce sa na osobnosť človeka + metafora týkajúce sa vyučovacieho prostredia	matematický expert + didaktický expert + pedagogický expert
počet respondentov	2	2	2	2	1	1	1
počet percent	8%	8%	8%	8%	4%	4%	4%

Diskusia a záver

Vzhľadom na prezentovanú metodológiu a jednotlivé ukážky môžeme považovať použitie metafor za sľubný diagnostický nástroj, akúsi sondu do postojov učiteľov. Pilotná štúdia nám však poukázala na viaceré limity použitia uvedeného nástroja. Jedným z nich je aj neochota, často aj z časového hľadiska, reflexie nad vlastnou pedagogickou praxou, čo znižuje percentuálnu návratnosť pri získavaní údajov.

Na druhej strane aj vzhľadom na pilotný charakter štúdie je zaujímavé porovnanie zastúpenia zmiešaných metafor u študentov učiteľstva a učiteľov matematiky z praxe. Zastúpenie zmiešaných metafor, graf č. 1, je u stredoškolských učiteľov matematiky takmer dvojnásobné. Predpokladáme, že na uvedenú skutočnosť môže mať vplyv vlastná pedagogická prax stredoškolských učiteľov, ktorá spôsobuje, že chápanie výučby je komplexnejšie a jednotlivé oblasti sú vnútorne prepojené.

V budúcnosti chceme uvedené výsledky skúmať na väčšej výskumnej vzorke, kde by sme mohli presnejšie stanoviť kategórie jednotlivých metafor a porovnať ich s faktormi analýzy hlavných komponentov, ako bolo uvedené v Šunderlík, Rybanský (2015).

Podakovanie

Príspevok bol napísaný vďaka podpore medzinárodnej výskumnej skupiny NorBaTM - New Open Research: Beliefs about Teaching Mathematics.

Literatúra

Dúbravová, V. (2014). *Postoje v teórii a pedagogickej praxi. Kvalita alebo kvantita? Zisťovanie postojových zmien v globálnom vzdelávaní a multikultúrnej výchove*, 24 -30. doi: http://nadaciamilanasecku.sk/goq/publikacia/NMS_K&K%20publikacia_komplet.pdf

Klimentová, L. (2015). *Implementácia objavného vyučovania matematiky so zameraním sa na skúmanie postojov učiteľov*. (Diplomová práca). Dostupné v Centrálnom registri záverečných prác.

Löfström, E., Poom K., a Hannula, M. (2011). *Categorisation of Teacher Metaphors – Manual for Implementing the Beijaard, Verloop & Vermunt Teacher Knowledge Base Model*. Manual for NorBa Project.

Löfström, L., Hannula, M. S. Valickis, K. P. 2010 *The Cabbageworm in the classroom: Methaphors as Expressions of Students' Beliefs abuout the Teacher Role*. In *Proceedings of the*

34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 225-232. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Oksanen, S., Hannula, M. (2012). *Finish mathematics teachers' beliefs about their profession expressed through metaphors*. Current state of research on mathematical beliefs XVIII: Proceedings of the MAVI – 18 Conference, September 12 – 15, 2012, Helsinki, Finland, 315 - 326.doi:

https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/42720/MAVI_18_proceedings.pdf?sequence=2

Rovňanová, L. (2015). *Učebné štýly žiakov a vyučovacie štýly učiteľov*. Bratislava: MPC.

Šunderlík, J., Rybanský, L., (2015) *Developing and Piloting an Instrument for measuring upper Secondary Mathematics teachers beliefs in Nitra Region*. Acta mathematica Nitriensia, Vol. 1, No. 1, p. 128 – 134.

Šunderlík, J., Čeretková, S. (2012) *Identification of learning situations during prospective teachers' student teaching in two countries*. 12th International Congress on Mathematical Education, 2012, Seoul Korea, P. 5612 – 5619, available:

http://www.pedocs.de/volltexte/2013/7128/pdf/Sunderlik_Ceretkova_2012_PRIMAS.pdf

Turek, I. (2008). *Didaktika*. Bratislava: Iura Edition.

Metodicko-terminologické nezrovnalosti vo svete DGS

Methodological and Terminological Inconsistencies in the Domain of DGS

Dušan Vallo^a

^a*Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 28 September 2015; received in revised form 3 October 2015; accepted 8 October 2015

Abstract

In this article we concerned with some methodological and terminological problems that are occurring in computer-aided teaching geometry and we underline their transfer to the education process.

Keywords: dynamical geometry software, geometry, didactics of mathematics

Classification: G10, R20

Úvod

Súčasný stav zavádzania a priameho využitia dynamických geometrických programov (DGS) vo výučbe matematiky a geometrie je veľmi rozmanitý a má mnoho rôznych aspektov. V prvom rade existuje množstvo softvérových produktov, na ktoré sa priamo, či sprostredkované, viažu aj výučbové, či iné metodicko – študijné materiály a manuály.

Skúsený učiteľ v praxi vie posúdiť mieru priameho použitia DGS vo výučbe, ich kvalitu a odbornú úroveň. Je bežným javom, že úspešnosť integrácie DGS do výučby je závislá od konkrétneho výberu softvéru, pričom sa sledujú také faktory, ako sú cenová dostupnosť programu, nároky na hardvér, kompatibilita s predchádzajúcimi verziami a v neposlednom rade univerzálnosť využitia softvéru v rôznych tematických celkoch.

Viaceré DGS majú spoločné znaky akými sú, napr. interaktivita a dynamickosť konštrukcií, voľba atribútov konštruovaných útvarov a objektov a mnoho ďalších. S prihliadnutím na uvedené výhody, ktoré robia z DGS silný motivačný podporujúci prostriedok výučby, poukážeme v tomto príspevku na niektoré metodické a terminologické problémy, ktoré sa objavujú pri počítačom podporovanej výučbe geometrie a zdôrazníme ich prenos do vyučovacieho procesu.

Poznanie nižšie uvedených nezrovnalostí môže byť pre učiteľa prínosné vo viacerých ohľadoch:

- umožní mu odhadnúť vhodnosť vybraného softvéru vzhľadom k cieľom výučby,
- znalosť obmedzení, či didaktická nedokonalosť DGS mu dovoľí vyberať si vhodnú formu na sprostredkovanie geometrického poznatku, či realizáciu konštrukcie,

- c) vyhne sa nepríjemným prekvapeniam, ktoré sú z didaktického hľadiska viac na škodu, ako na osoh,
- d) uvedomí si súvislosti medzi jednotlivými matematickými disciplínami,
- e) získa objektívny pohľad na použitie DGS.

Za tým účelom budeme písať o DGS všeobecne a nebudeme sa viazať na konkrétny softvérový produkt. Zdôvodňujeme to tým, že väčšina z dostupných softvérov aj tak disponuje obdobnou ponukou možností a nástrojov.

Axiomatické poňatie základných útvarov a ich vizualizácia

V geometrii, ako aj v jej výučbe, sú historicky zaužívané isté slovné vyjadrenia, nie vždy logicky presné. Uvedieme dve ukážky.

Veta. *V trojuholníku oproti dlhšej strane leží väčší uhol.*

Veta (SUS). *Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v dvoch stranách a uhle nimi zovretom.* Exaktne vzaté, uhol je časť roviny, množina bodov prieniku dvoch polrovín. Uvažovaná strana trojuholníka teda neleží oproti uhlu, ale každý jej bod patrí uhlu.

Komentár k zneniu druhej vety je obdobný. Strany nezvierajú uhol, pretože to odporuje definícii uhla a navyše, ramená uhla sú polpriamky.

Tieto a mnohé iné konvencie sú výsledkom tradície, prameniacej z intuície a snahy o čo najnázornejšie sprostredkovanie geometrického poznatku.

Obdobný fenomén pozorujeme aj v DGS, kde sa bežne operuje so slovnými spojeniami typu „označiť bod“ (tým sa nemyslí na pomenovanie bodu) „uchopiť bod (resp. iný útvar)“, „premiestniť bod“, „pevný bod“, či „voľný bod“.

V klasickom ponímaní výučby geometrie, kde sa používa pravítko, ceruzka a papier, tieto „terminologické“ tvary nemohli vzniknúť, pretože odporujú axiomatickému ponímaniu základného, a teda nedefinovaného pojmu *bod*.

Ide však o také virtuálne manipulácie so zobrazovanými útvarmi na pracovnej ploche (obrazovke PC), ktoré činia DGS tým, čím sú, t.j. prostriedkami umožňujúcimi interaktívne, pre žiaka motivačné a dobre vizualizované konštrukcie.

Slovenská matematická terminológia nepozná vhodné pomenovanie tohto javu. V odbornej literatúre sa autori s touto ťažkosťou vyrovnávajú rôzne – buď zostáva nepovšimnutá, alebo sa hovorí o „*pohyblivosti bodov*“, prípadne sa zavádza nový pojem tzv. „*práca s geometrickou premennou*.“ *

Na 38. konferencii slovenských matematikov v Liptovskom Jáne v roku 2006 odznela prednáška odborníka na matematickú terminológiu prof. RNDr. J. Čižmára, CSc., z abstraktu ktorej vyberáme (Čižmár, 2006):

„Nová príručka by mala predovšetkým odstrániť všetky zjavné chyby, malformácie, patvary, neústrojné klišé, skostnatenou tradíciou alebo nedostatkom odvahy (či zodpovednosti) tradované narušenia základných a odôvodnených princípov teórie terminológie – jednoducho všetkých tých omylov v matematickej terminológii,

* Pod slovným spojením „práca s geometrickou premennou“ autori (V. Jodas, L. Koreňová, 2002) myslia: „Keď algebraik povie „majme ľubovoľné prirodzené číslo“ ... a napíše n , je to iné, ako keď geometer povie „Majme ľubovoľný trojuholník ...“ a nakreslí jeden konkrétny trojuholník.“ Citované podľa –(Žilková 2009), str. 72. Týmto je povedané, že pomocou DGS ten jeden konkrétny trojuholník vie užívateľ transformovať na iný tak, že „presunie“ – zmení polohu jedného vrchola a konštrukcia sa automaticky prekreslí.

mylnosť ktorých stála už na začiatku ich začlenenia do terminologickej normy, avšak v tom čase bola mimo obzoru nášho poznania, či lepšie – bola výrazom nášho obmedzeného a nedokonalého poznania.“

Nová príručka slovenskej matematickej terminológie dodnes nebola vydaná. Domnievame sa, že aj keby bola, naznačený fenomén je v DGS natoľko osobitý, že by zostal ako otvorený problém. Navyše tvrdíme, že z pragmatického pohľadu by išlo o bežnú deformáciu nazerania na interaktívne geometrické konštrukcie. Ako analogický príklad uvádzame, že aj v prípade klasického rysovania ceruzkou na papieri má naznačená čiara istú hrúbku, ktorá sa zjavne a nutne musí ignorovať.

Atribúty konštruovaných útvarov

K štandardným nástrojom DGS patrí aj zmena atribútov konštruovaných útvarov, čím sa myslí vizuálna zmena farebnosti modelov, štýlu zvýraznených čiar a plôch, ich „hrúbky“ a pod.

Ako demonštračný príklad nám opäť posluží *bod*, ktorý sa zvyčajne na pracovnej ploche počítača virtuálne modeluje ako samostatný geometrický útvar v tvare kruhu, štvorca, či kružnice alebo prieniku dvoch úsečiek (krížik) s rôznymi voliteľnými rozmermi.

Konštrukcie, kde bod „presahuje“ priamku, sú teda na zamyslenie. Obdobne, aj pri dynamických softvéroch modelujúcich geometrické útvary trojrozmerného priestoru, kde priamka sa javí napr. ako valcová plocha.

V každom prípade ide o paradox, ktorý nie je možné z DGS odstrániť - geometrický útvar sa musí vizualizovať nejakou vhodnou formou na pracovnej ploche.

Je jasné, že aj vo výučbe geometrie, kde sa učí klasickým spôsobom, prichádza k analogickým nezrovnalostiam. Nie sú však také markantné a žiaci k nim nie sú takí vnímaví.

Z uvedeného vyplýva aj jedno dôležité varovanie.

Neuvážené aplikácie DGS do výučby geometrie v raných štádiách výučby, či už planimetrie na prvom stupni ZŠ alebo v začiatkoch stereometrického učiva, by mohlo viesť k vytvoreniu nesprávnych geometrických predstáv a následnej deformácii poznávacieho procesu.

Euklidov prístup ku konštrukciám

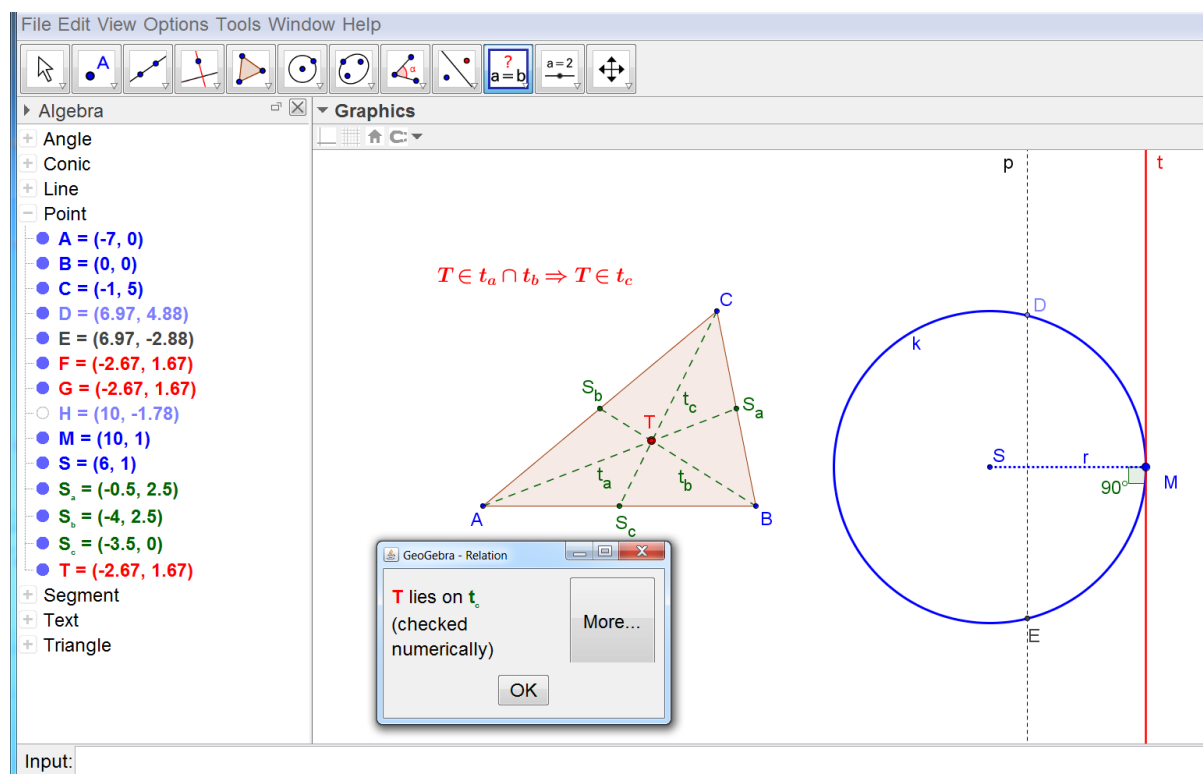
Ďalším problémom je euklidovský prístup ku konštrukciám. Vysvetlíme na príklade priamky.

Priamka je jednoznačne určená dvomi navzájom rôznymi bodmi, ktoré sú priamo dané, alebo sú určené ako priesečníky zostrojených útvarov. V klasickej výučbe nie je nutné, aby tieto priesečníky boli exaktne zvýraznené, postačuje vizuálny prienik dvoch kriviek na tabuli, či papieri.

V DGS sa musí priesečník exaktne definovať pomocou vhodného konštrukčného nástroja (zvyčajne nazvaného *priesečník*), inak ho počítač neidentifikuje a nie je možné s ním pracovať.

Spoločné body prieniku dvoch útvarov

Ak bod je stredom zväzku priamok 1. druhu, potom je jediným spoločným bodom ľubovoľných dvoch priamok tohto zväzku. Pre DGS existuje $C(2, n)$ priesečníkov, kde n je počet priamok zväzku, t.j. každý priesečník je možné určiť ako prienik ľubovoľných dvoch priamok. Takým spôsobom existujú pre počítač tri priesečníky ťažníc trojuholníka, ktoré sú z geometrického pohľadu totožnými bodmi, pre počítačový program tri identity.



Obr. 1

Naviac, v DGS sa nerozlišuje, či sme útvar pomocou daných bodov už zostrojili.

Napríklad, ak sme dvomi danými bodmi raz pomocou nástroja „zostroj priamku určenú dvoma bodmi“ priamku zostrojili a opäť použijeme tento nástroj na dané body, znovu priamku zostrojí a program eviduje vo vnútornom zozname zostrojených útvarov pod iným pomenovaním, t.j. nerozlišujú sa totožné útvary (obr. 1).

K nezrovnalostiam prichádza aj pri automatickom určovaní priesečníkov, najmä ak ide o prienik dvoch kriviek a aspoň jedna je kvadratická. Sečnica kružnice pretína kružnicu v dvoch navzájom rôznych bodoch, ktoré v DGS vie užívateľ pohodlne označiť. Interaktivita programu dovoľuje zmeniť pozíciu priamky voči kružnici, dynamika vyznačuje aktuálne pozície priesečníkov, kým sečnica „prejde“ do vizuálneho, limitného prípadu dotýčnice.

Podľa definície je dotýčnica priamka, ktorá má s kružnicou jediný spoločný bod. V tomto prípade počítač eviduje body dva, pretože pracuje na báze základov analytickej geometrie a úloha o vzájomnom prieniku priamky a kružnice sa prevádza na nájdenie koreňov kvadratickej rovnice s reálnymi koeficientmi (hodnoty softvér použije ako súradnice odpovedajúcich bodov, ktoré následne zobrazí).

Vizualizácia relácie totožnosti vychádzajúca z deduktívneho ponímania geometrie teda núti premýšľajúceho užívateľa (učiteľa, žiaka) k zamysleniu sa nad významom aparátu analytickej geometrie.

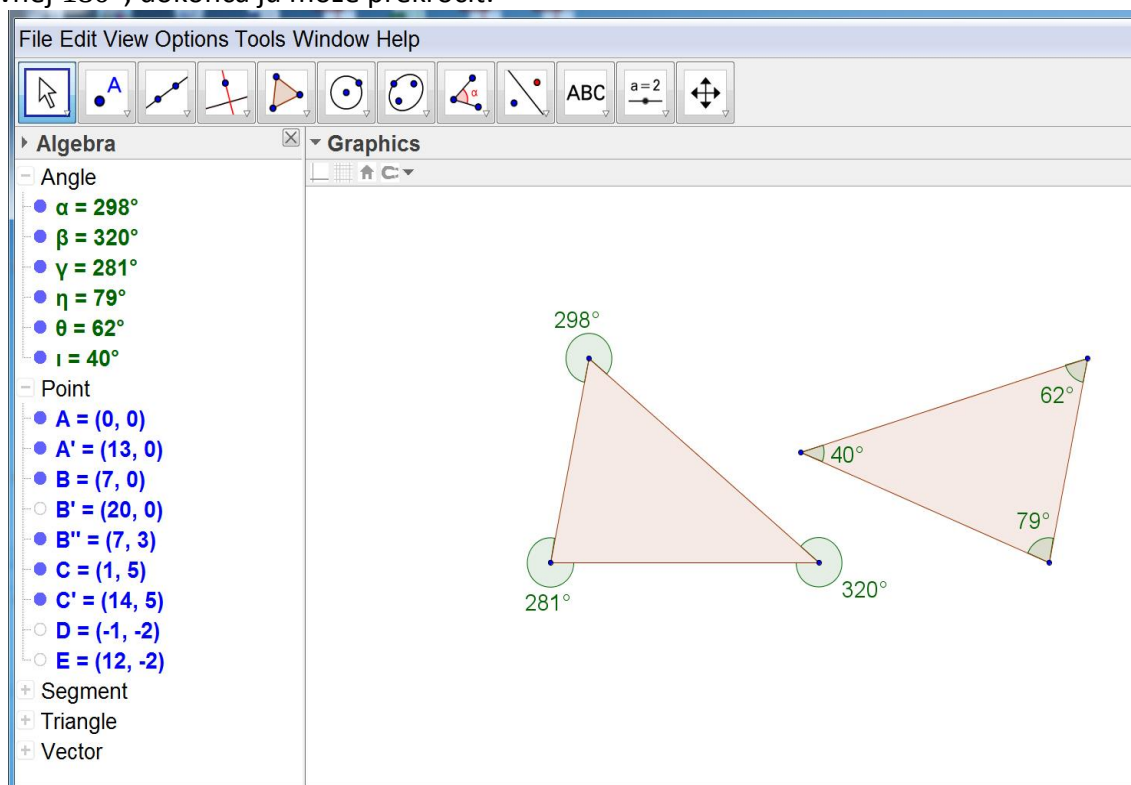
Odhad a meranie

Tým, že DGS pracujú na báze aparátu analytickej geometrie, prinášajú aj inú vymoženosť – meranie vzdialeností, veľkostí uhlov a výpočty obsahov. Hoci je užívateľovi umožnené, aby nastavil presnosť numerických výpočtov s vopred stanoveným počtom desatinných miest, stále pôjde o približné výpočty.

Z toho dôvodu treba neraz žiakom zdôrazniť, že zobrazované hodnoty nemôžu byť považované za relevantný dôkaz vybranej geometrickej vety. Jej všeobecnú platnosť je nutné dokázať. Názorná numericko-grafická vizualizácia je len podnetom k objavovaniu a formulácii hypotézy.

Napríklad, ak sa rozhodne učiteľ demonštrovať vetu o súčte veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka, ľahko nechá pomocou nástroja „meranie uhla“ uhly zmerať a ich aktuálne hodnoty zobrazíť, dokonca určiť aj ich súčet.

Môže nastať prípad, že výsledná zobrazená hodnota sa bude líšiť od očakávanej konštanty rovnej 180° , dokonca ju môže prekročiť.



Obr. 2

Veľkosti vyznačených uhlov na obrázku nezodpovedajú geometrickému poznaniu.

Na obr. 2 je nastavené zaokrúhľovanie na celé čísla. Majme však na pamäti, že nech nastavíme zaokrúhľovanie na ľubovoľnú presnosť, vždy pôjde o približné výpočty. Navyše, v trojuholníku ABC bolo zvolené automatické určenie veľkostí vnútorných uhlov. Výsledok – program vyznačil a zmeral nekonvexné uhly, pretože „rešpektoval“ ich orientáciu zavedenú poradím, v akom boli body A, B, C zostrojované. Premiestnením bodu B do opačnej polroviny s hraničnou priamkou AC , program automaticky preznačí uhly na vnútorné uhly trojuholníka ABC .

Aká je príčina?

Vo výučbe geometrie sa orientácia uhla zavádza až na strednej škole, kedy sa vyučuje zhodná transformácia – otočenie. DGS však s orientáciou pracujú striktne a veľkosti uhlov zobrazujú a merajú v kladnej orientácii.

Obdobná situácia nastáva pri meraní dĺžok úsečiek. Ich orientácia sa v DGS nezavádza, čo je dobré a v súlade s definíciou dĺžky úsečky. Numerická presnosť však môže obdobne komplikovať predkladaný geometrický poznatok.

Konštrukčné úlohy o trojuholníku na ZŠ

Použiteľnosť DGS pri konštrukčných úlohách, v zadaní ktorých vystupuje uhol, resp. jeho veľkosť, je na základnej škole značne obmedzená.

Ak uvážime napríklad konštrukciu trojuholníka podľa vety SUS, potom v klasickom prístupe ku konštrukcii si žiak ako prvú zostrojí úsečku, ktorá leží na ramene daného uhla. Následne zostrojí bod druhého ramena pomocou uhlomeru tým, že nanesie uhlomerom odpovedajúcu veľkosť daného uhla, zostrojí druhé rameno a kružnicovým oblúkom na práve zostrojenom ramene vyznačí krajný bod priľahlej úsečky k danému uhlu.

Práve manipulácia s uhlomerom, taká samozrejímavá pre žiaka, je v DGS prostredí na úrovni základnej školy problematická.

Presne zostrojiť „chýbajúce“ rameno žiak / učiteľ môže buď zhodnosťou - otočením úsečky okolo jej krajného bodu alebo priamou konštrukciou ľubovoľnej polpriamky so spoločným začiatočným bodom, keď danú - požadovanú veľkosť uhla prispôsobí zadaniu vďaka interaktivite programu.

V prvom prípade, keď žiaci nepoznajú transformáciu (otočenie), ide o intuitívne pochopiteľný algoritmus, podaný viac-menej bez vysvetlenia.

V druhom prípade vidíme prispôbovanie si podmienok zadania, didakticky nevhodné uľahčenie, nabádajúce k hádaniu, ktoré môže viesť aj k problematickému vyhodnocovaniu počtu riešení v diskusii konštrukčnej úlohy.

Práca v rozšírenej euklidovskej rovine

Za jeden zo závažnejších metodických problémov v DGS však považujeme „prácu s nekonečnom“.

Učíme žiakov euklidovskú geometriu a niektoré DGS kvôli „plynulosti“ konštrukcií pracujú v rozšírenej euklidovskej rovine. Takýmto výučbovým softvérom je napr. Cabri II a Cabri II Plus. Skryté „nekonečno“ sa naplno prejaví v konštrukciách rôzneho charakteru, kde vystupuje automatická animácia.

Predstavme si, že demonštrujeme žiakom podstatu vzorca na výpočet obsahu trojuholníka podľa vzorca $S = \frac{1}{2}zv$, kde z je základňa, v výška trojuholníka. Zostrojíme teda základňu z ,

vo vybranej vzdialenosti v rovnobežku, na ktorej zvolíme ľubovoľný bod. Vyznačíme trojuholník a necháme program vypočítať (numericky) a zobrazíť obsah útvaru zabudovaným nástrojom.

Ak pohybujeme bodom po priamke, obsah zostáva konštantný, pretože ako dĺžka základne, tak aj výška trojuholníka, sú nezmenené.

Zmenou jedného z uvedených parametrov, zmení sa aj hodnota obsahu trojuholníka. Potiaľ je všetko v poriadku.

Ak však pohybujeme bodom po priamke dostatočne dlho, prípadne použijeme nástroj „animácia“, po nejakom čase tento bod „preskočí“ a príde do viditeľnej časti počítačovej plochy z druhej strany, než „odišiel“.

Úlohy s číselnými vstupmi

Väčšina zadaní konštrukčných úloh na ŽS a SŠ je s konkrétnymi číselnými požiadavkami na dĺžky daných úsečiek, resp. veľkosti uhlov.

To vyžaduje pri riešení pomocou DGS zadanie konkrétnej hodnoty do programu vopred, čo nie je problém, pretože s touto možnosťou DGS disponujú - rôznymi spôsobmi a v rôznej kvalite.

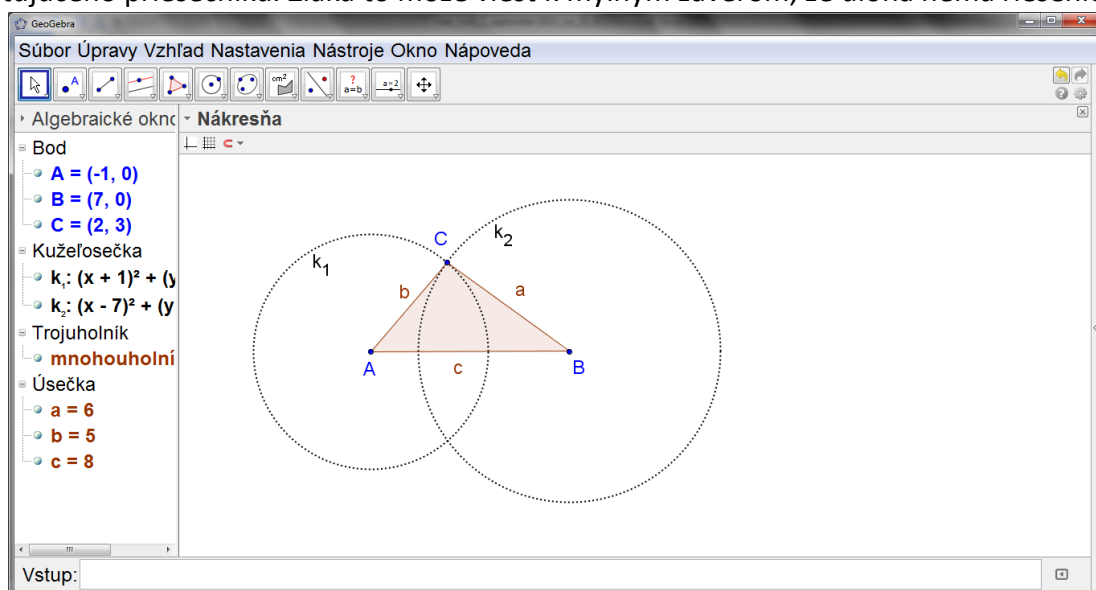
Má však úsečka dĺžky 2 cm, ktorú deklaruje výstup z programu, skutočne 2cm?

K deformácii odhadu hodnôt prichádza aj v momente, keď konštrukciu „priblížime“ oku pozorovateľa.

Predimenzovanie konštrukcií za účelom interaktivity

Žiakov učíme rysovať pomocou tradičných prostriedkov esteticky a úsporne, aby obrázok nebol preplnený a dal sa ľahko „čítať“.

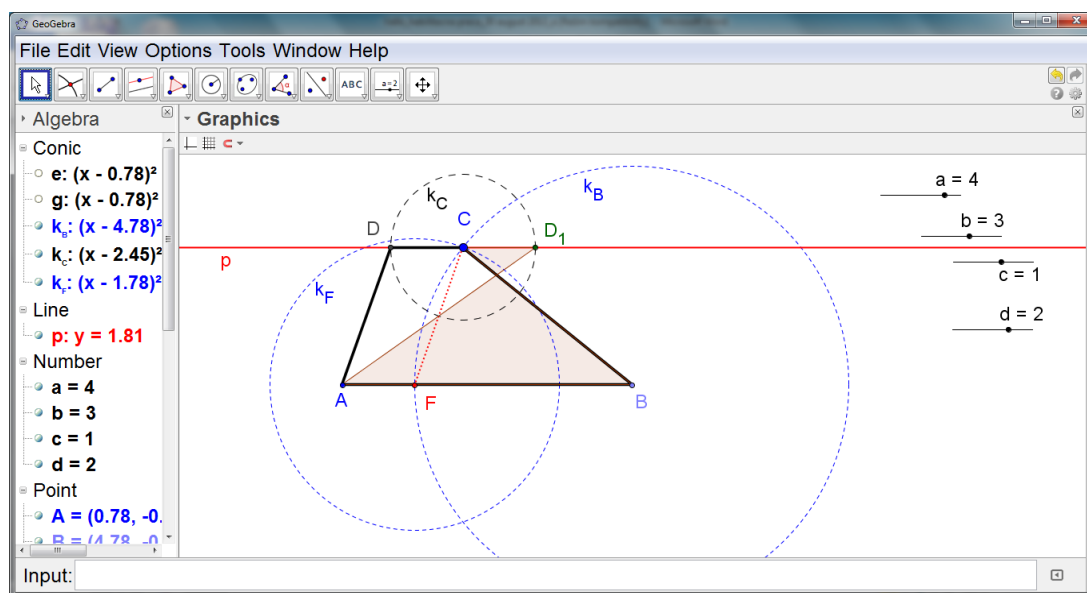
Ak aplikujeme takýto prístup aj do výučby pomocou DGS, pri zásahu do konštrukcie aj pri zachovaní vstupných hodnôt, môžeme „stratiť“ výsledok v dôsledku zániku dovtedy existujúceho priesečníku. Žiaka to môže viesť k mylným záverom, že úloha nemá riešenie.



Obr. 3

Zabezpečiť konštrukciu tak, aby bola interaktívna a stále „dobrá“ vyžaduje pri zostrojovaní nevyužívať útvary konečných dĺžok, t. j. namiesto kružnicových oblúkov zostrojovať kružnice a namiesto úsečiek a polpriamok radšej priamky.

Musíme poznamenať, že takto občas dostaneme výsledok, ktorý nie je riešením. Vhodným ilustračným príkladom sú konštrukčné úlohy na zostrojenie štvoruholníka, kedy sa vo výslednej konštrukcii môže objaviť aj tzv. skrížený štvoruholník.



Obr. 4

Na obr. 4 je riešenie konštrukčnej úlohy v programe GeoGebra s týmto zadáním:

Zostrojte lichobežník ABCD, ak sú dané dĺžky jeho strán, $a=4\text{cm}$, $b=3\text{cm}$, $c=1\text{cm}$, $d=2\text{cm}$.

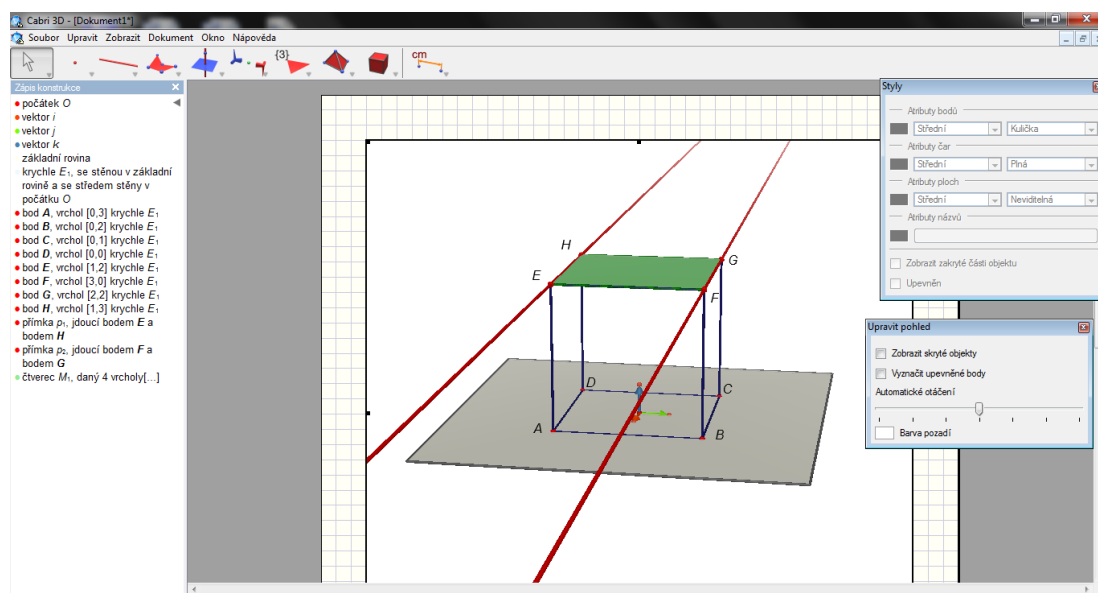
Prienikom rovnobežky p s kružnicou $k_C(C, c=1\text{cm})$ sú dva body D, D_1 . Riešením je však len bod D , útvar $ABCD_1$ predstavuje tzv. „skrížený štvoruholník“. V zahraničnej literatúre, skrížený štvoruholník je množina bodov roviny, ktoré sú ohraničené zloženou, uzavretou lomenou čiarou so štyrmi vrcholmi. V našej, slovenskej metodike takýto útvar nepovažujeme za štvoruholník.

Nie je útvar ako útvar

Ak učiteľ na tabuli zostrojí uzavretú lomenú čiaru s tromi vrcholmi, prehlási ju za trojuholník. Je zrejmé, že podľa definície je trojuholníkom množina bodov roviny ohraničená touto čiarou, vrátane čiary. Z didaktických dôvodov nie je však žiadúce na tabuli zvýrazňovať plochu. Pre prácu v DGS je nutné programu definovať, že má „pracovať“ s rovinným útvarom, pretože vyššie prevedená konštrukcia v geometrickom programe zostane lomenou čiarou, s ktorou sa dá pracovať inak ako s trojuholníkom zostrojeným pomocou nástroja „mnohouholník“.

Vizualizácia útvarov trojrozmerného priestoru

K najznámejším a najpoužívanejším dynamickým výučbovým softvérom, ktoré vizualizujú trojrozmerný euklidovský priestor, sú v súčasnosti Cabri 3D a GeoGebra 5.



Obr. 5

Nespornou výhodou týchto počítačových programov je ich funkcia virtuálnej manipulácie s konštrukciami, ako aj možnosť prezerania si konštrukcií z rôznych pohľadov. Za tým účelom hlavnou zobrazovacou metódou je stredové premietanie a nie klasické voľné rovnobežné premietanie, ktoré učíme žiakov na hodinách geometrie. (Šedivý, 2006)

Voľné rovnobežné premietanie určené svojimi charakteristikami neumožňuje takúto manipuláciu s objektmi.

Výhoda „poprezerania si konštrukcie z každej strany“ má podľa nášho názoru významný didaktický prínos.

Voľne povedané, ide o prípad porušenia pravidiel zobrazovania telies v školskej geometrii, nie zákonitostí zobrazovacích metód. Uvážme túto skutočnosť na ukážke, kde sa zostrojené rovnobežky - priamky FG a EH nezobrazia ako rovnobežné.

Zo skúsenosti vieme, že vo väčšine prípadov si tento jav žiaci/užívatelia nevšimnú. V prípade, že by sa tak stalo, má učiteľ k dispozícii vyššie uvedené vysvetlenie.

Záver

Na záver ešte poznamenáme, že tvorivý učiteľ dokáže aj z týchto „nevýhod“ a terminologických nezrovnalostí čosi podnetné „vyťažiť“ a využiť vo vyučovacom procese. To, čo sa javí ako metodologický problém, môže byť v rukách šikovného a tvorivého učiteľa príležitosťou k názornému, konštruktivistickému prístupu k výučbe. Takýmito a obdobnými úvahami sa ešte budeme zaoberať v niektorom z ďalších príspevkov.

References

- Čižmár, J. (2006). *Aktuálne problémy slovenskej matematickej terminológie* Paper presented at the 38. konferencia slovenských matematikov, Liptovský Ján.
- Fulier, J., Ďuriš, V., & Frantová, P. (2007). *Systémy počítačovej algebry (CAS) vo vyučovaní matematiky*. Nitra: UKF v Nitre.
- Jodas, V., Koreňová, L.: (2002). *Metodická príručka Cabri II*. Bratislava: Metodické centrum, Nepa Slovakia.

- Vaníček, J. (2009). *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha: Ped. fakulta UK v Praze.
- Šedivý, O. (2006). *Názornosť najmä pri vyučovaní geometrie priestoru*, Nitra: FPV UKF v Nitre.
- Žilková, K. (2009). *Školská matematika v prostredí IKT (Informačné a komunikačné technológie)*. Bratislava: UK Bratislava

Načo im bola matematika What They Needed Mathematics for

Marek Varga^{*}

^a *Department of mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 30 September 2015; received in revised form 14 October 2015; accepted 15 October 2015

Abstract

Maths teachers and teachers in general, regardless the subject and educational level, often encounter learners asking “What do I need this for?” In the introduction of this paper let us ask a slight modification of the question – when one managed to learn *it* (something subject-related), how far could they make it in their lives? When investigating this issue we avoided professional mathematicians whom the discovery of a theorem itself gave enough satisfaction. We focus on outstanding personalities of the world history who achieved astonishing results in mathematics as well, yet, rarely a word about them is spent in history lessons.

Keywords: history of maths, emperors, generals, presidents.

Classification: A 39

Úvod

Tesne pred vyjadrením znechutenia či nezájmu nad preberaným učivom študenti základných, stredných, vysokých škôl zvyknú položiť obľúbenú otázku „a načo mi to bude?“. V našom článku sa skúsime na ňu pozrieť z iného uhla – ak už v histórii niekto ovládal matematiku, čo všetko mohol dosiahnuť... Pokúsime sa pritom vybrať postavy z rôznych storočí, rôznych krajín a navyše sa zameriame predovšetkým na známych vojvodcov a generálov. Na záver si predstavíme aj na menšie dotyky matematiky či matematikov so svetovými dejinami, ktoré samozrejme boli kladné i záporné.

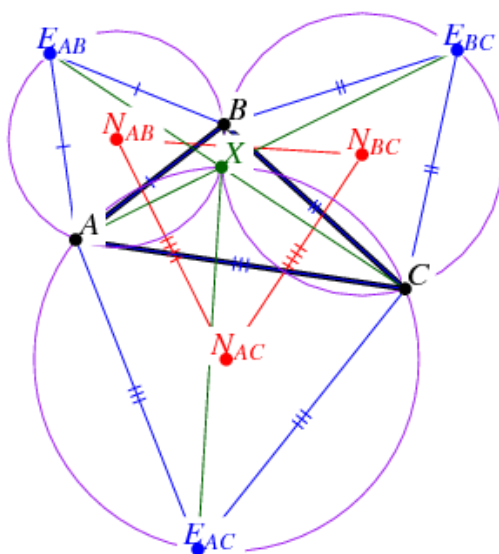
Cisári, prezident, pápež

Naším prvou hviezdou v zozname nie je nik menší ako Napoleon Bonaparte (1769 – 1821), francúzsky cisár, dobyvateľ Európy. Svoj talent pre matematiku ukazoval už od 10 rokov, okrem toho miloval dejepis – predovšetkým ho zaujímali životopisy slávnych, či už Alexandra Veľkého alebo Julia Caesara. Po ukončení vojenskej akadémie bol prijatý na elitnú parížsku školu Ecole Militaire, kde dokonca kvôli nedostatku peňazí musel ukončiť dvojročný kurz za jeden rok. Medzi jeho skúšajúcich patril aj Laplace (ktorého neskôr Napoleon vymenoval do senátu, udelil mu aj grófsky titul a nakrátko bol ministrom vnútra). Jeho matematické znalosti – výpočty uhlov a trajektórií – mu umožnili stať sa už v 16 rokoch poručíkom delostrelectva. K jeho ďalšiemu prudkému postupu pomohli aj búrlivé časy francúzskej revolúcie, boje proti kontrarevolúcii i cudzím mocnostiam – a tak sa stal brigádnym generálom, veliteľom armády,

^a * Corresponding author: marga@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2015.1.2.52-59

konzulom a napokon aj francúzskym cisárom (1804). Výbojnými vojnami ovládol veľkú časť Európy, jeho pád začal až po neúspešnom ťažení v Rusku. Jeho ďalšie osudy sú dostatočne známe, preto sa vrátime k matematike, kde môžeme nájsť Napoleonovu vetu:

Nech je daný trojuholník ABC , zostrojme nad každou jeho stranou rovnostranný trojuholník. Potom stredy strán opísaných kružníc k trom zostrojeným trojuholníkom vytvárajú tiež rovnostranný trojuholník (tzv. Napoleonov trojuholník).



Obrázok 1: Napoleonov trojuholník

Jej dôkaz možno nájsť v [4] alebo [5]. Na tomto mieste nemôžeme ešte nechať bez povšimnutia, že veliteľom ruskej armády, ktorá porazila Napoleona bol maršal Michail Illarionovič Kutuzov. Kým ho cár povolal do služby priamo v armáde, pôsobil na Šľachtickej delostreleckej akadémii (bol aj jej absolventom) ako vyučujúci matematiky.



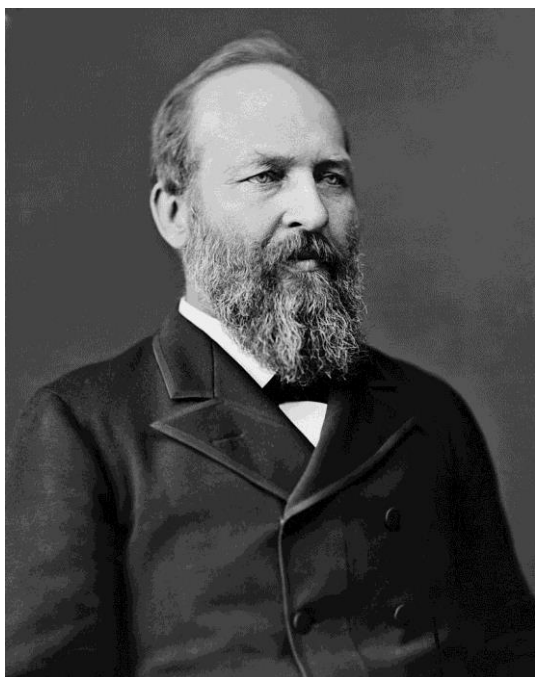
Obrázok 2: Napoleon Bonaparte



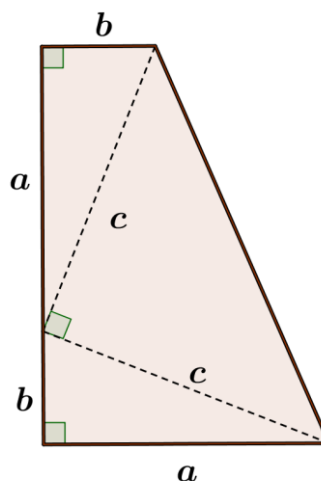
Obrázok 3: M. I. Kutuzov

Ďalšieho „utajeného“ matematika nájdeme za veľkou mlákou, a opäť na vysokom poste – 20. americký prezident James Abram Garfield (1831 – 1881). Bol mimoriadne inteligentný, dokázal písať oboma rukami. Vo svojom úrade pôsobil len 200 dní, kým bol naňho spáchaný atentát – guľku v jeho tele pomáhal hľadať aj Alexander G. Bell pomocou svojho nového vynálezu, detektoru kovov. Avšak prezident podľahol infekciám získaným počas operácie. Opäť sa vráťme k jeho matematickým schopnostiam – na nasledovných riadkoch skrátené predvedieme Garfieldov dôkaz Pytagorovej vety. Využitím obrázka 5 pre obsah daného lichobežníka platí $S_L = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)v = \frac{1}{2}(a+b)(a+b)$. Ak sa naň pozrieme ako na útvar

zložený z troch trojuholníkov, pre uvedený obsah máme $S_L = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cc$. Porovnaním týchto výrazov hneď dostávame $a^2 + b^2 = c^2$.



Obrázok 4: J. A. Garfield



Obrázok 5

Významného učenca a matematika nájdeme aj priamo na pápežskom stolci – 139. pápež Silvester II. (950 – 1003), vlastným menom Gerbert d'Aurillac. Narodil sa vo Francúzsku, v mladom veku vstúpil do kláštora a vzdelanie sa mu dostalo v Katalánsku – kde sa vtedy stretávala európska a arabská veda. Neskôr bol považovaný za jedného z najväčších učencov tej doby, bol učiteľom rímskonemeckých cisárov Otta II. aj Otta III. Spolupracoval s nimi na ich sne zjednotenia Západorímskej a Východorímskej ríše (a neskôr Európy) ako Imperium Christianum (Ríša kresťanov). Z hľadiska matematiky sa mu predovšetkým pripisuje zavedenie arabských číslíc do európskej matematiky (nepoužíval nulu) – a tak bol schopný v hlave robiť výpočty, ktoré boli nemožné pre tých, čo používali rímske číslice. Vzniklo tak viacero legend o tom, ako vlastní knihu kúziel, je čarodejníkom, spolčený s diablom, či dokonca vyrobil bronzovú ťavu, ktorá dokázala na každú otázku odpovedať áno – nie. Pri zložitejších výpočtoch používal abakus – ten bol známy už v staroveku, no vytratil sa a potom sa musel do Európy vrátiť z arabskej časti sveta.

**Obrázok 6:** Silvester II.***Generáli a matematika***

Matematický talent sa nezriedka vyskytuje u úspešných vojvodcov, niektorých z nich spomenieme v ďalších riadkoch. Začnime Jurijom von Vega (1754 – 1802), rakúskym generálom slovinského pôvodu. Najskôr pracoval ako inžinier, neskôr vstúpil do armády a navrhol nové typy diel a húfníc, pomocou ktorých dokázal získať niekoľko dovtedy nedobytných pevností. Mária Terézia ho tak povýšila až na generálmajora. Je zaujímavé, že v časoch mieru sa venoval písaniu učebníc matematiky i fyziky, bol tiež autorom niekoľkých zväzkov logaritmických tabuliek (preložené do viacerých jazykov). Taktiež vydal zbierku integrálov. Je po ňom pomenovaný kráter na mesiaci, tiež mal portrét na slovinských bankovkách.

**Obrázok 7:** J. Vega**Obrázok 8:** R. E. Lee

Ďalším generálom do partie môže byť Robert Edward Lee (1807 – 1870). Pred matematikou dal prednosť vojenskej kariére, dôstojnícku školu West Point dokončil ako druhý najlepší v ročníku. Venoval sa stavbe opevnení, neskôr navrhoval trasy útokov armády. Tieto skúsenosti využíval vo vojnách s Mexikom, Indiánmi, neskôr bol hlavným veliteľom južanskej Konfederácie v americkej občianskej vojne. Napriek jeho mnohým víťazstvám musel napokon podľahnúť priemyselne vyspelejšiemu Severu, po vojne bol rektorom univerzity v Lexingtone.

Titul generalissima získal aj český šľachtic Albrecht Václav Eusebius z Valdštejna (1583 – 1634). Pomáhal Ferdinandovi II. stať sa českým kráľom a zároveň aj v bojoch proti protestantskej Lige. V mladosti však študoval matematiku, napr. aj na univerzitách v Bologni či Padove.

Generála – matematika napokon nájdeme aj v bojovom lietadle. Mikuláš Grofčík (1917 – 2009) bol počas druhej svetovej vojny pilotom RAF. Keďže sa však pri výcviku rýchlo preukázal jeho talent na matematiku, poslali ho na ďalšie štúdium univerzity a potom už mohol vniknúť do tajov najmodernejšieho a prísne utajovaného riadenia radarového systému na ochranu vzdušného priestoru. Osobne sa naďalej zúčastňoval pátracích a evakuačných letov. Po vojne sa vrátil do vlasti, neskôr ušiel pred komunistickým prevratom a pôsobil ako odborný asistent na City University v Londýne.



Obrázok 9: Albrecht



Obrázok 10: M. Grofčík

Úvodom ďalších riadkov sa najskôr ospravedlníme rímskemu cisárovi Hadriánovi (76 – 138), že sme ho zaradili až sem. Prečo toľká zdvorilosť? Cisár mal talent na maliarstvo i poéziu, ale predovšetkým na matematiku a architektúru. Navrhol a dal postaviť chrámy a iné budovy v Ríme aj v Aténach, taktiež dal postaviť ochranné opevnenia na severe provincie Británia a na juhu provincie Afrika. Avšak architekta, ktorý si dovolil jeho dielo kritizovať, dal popraviť...



Obrázok 11: Hadrián

Dotyky matematiky s históriou

Na záver spomenieme ešte jemnú súvislosť matematiky s dejinnými udalosťami, pričom spomenieme aj slovíčko „keby“, ktoré historici nemajú v obľube.

Milenkou Vladimíra Iljiča Lenina (1870 – 1924) bola Apolinarija Jakubovová, veľmi vzdelaná žena, ktorá vyštudovala matematiku a fyziku, neskôr vyučovala na večernej škole. Lenin ju dokonca požiadal o ruku, ale odmietla – kto vie, možno sme dnes nemuseli poznať Veľkú októbrovú socialistickú revolúciu...

Už vieme, aké tragické následky pre Európu a vlastne celý svet malo neprijatie istého neschopného rakúskeho maliara (aj keď dnes ho považujeme za Nemca) Adolfa Hitlera. Analogická chyba sa stala aj na východe. Ako matematik v observatóriu v Tbilisi pracoval totiž Josif Visarionovič Džugašvili (1878 – 1953). Žiaľ, cárska polícia ho podozrievala z protištátnej činnosti a tak mu prehľadali byt. Na protest proti tomuto správaniu odišiel zo zamestnania, stal sa profesionálnym revolucionárom a ďalšie Stalinove vyčíňanie v Sovietskom zväze i zhubný vplyv na satelitné krajiny už poznáme...

Náš prehľad pokračuje na ruinách Osmanskej ríše – Mustafa Kemal Atatürk (1881 – 1938), zakladateľ a prvý prezident Tureckej republiky, dostal svoje prostredné meno od učiteľa matematiky. Jeho vynikajúce vedomosti ocenil prírmením „kemal“, tj. „dokonalý“ (pre jeho veľkú vážnosť a obľúbenosť zas označenie „Atatürk“ znamená „otec Turkov“).

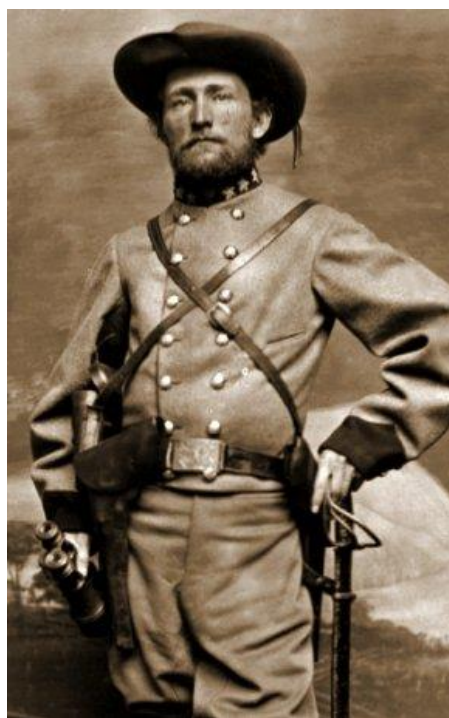
Aby sme neboli príliš tendenčný, na záver spomeňme ďalej aj ľudí – známe osobnosti svetových dejín, ktorí matematiku práve nemilovali. Ihneď sa nám ponúka byzantský cisár Justinián I. (482 – 565), ktorý v právnom kódexe v časti „O zločincoch, matematikoch a im podobných“ vyslovene zakazuje „zavrhnutie hodné umenie matematické“. Toto však zrejme súviselo so šírením kresťanstva, pretože cisár zakázal aj vyučovanie na „pohanskej“ platónskej Akadémii v Aténach.

S matematikou sa nekamarátil ani pán John Singleton Mosby (1833 – 1916), hoci vynikal v latinčine, gréčtine i literatúre, kvôli neúspechom v matematike neukončil dve vysoké školy,

na ktorých začal študovať. Napriek tomu sa v americkej občianskej vojne stal postrachom Unionistov, prezývali ho „Šedý duch“. Jeho málopočetné oddiely sa špecializovali na záškodnícke akcie v tyle nepriateľa a stali sa predchodcami dnes možno najlepších špeciálnych jednotiek na svete – Rangers (aj keď toto tvrdenie nehovorte nahlas pred členmi Specnaz).



Obrázok 12: Justinián I.



Obrázok 13: J. S. Mosby

Záver

V predošlom texte sme sa snažili ukázať, kde všade sa nám môže matematika zísť. Potrebovali ju dobyvatelia vo vojnách, generáli pri plánovaní vojenských útokov, cisári pri úsilí o rozkvet ríše, dokonca poznáme aj pápeža, ktorý ovládal toto umenie. Učiť sa a chápať matematiku je teda veľmi výhodnou investíciou do budúcnosti, hoci ani dnes nevieme študentom presne a detailne povedať, na čo presne ju budú potrebovať...

Literatúra

- [1] Struik, D. J.: Dejiny matematiky; Orbis, Praha, 1963
- [2] Juškevič, A. P.: Dejiny matematiky ve stredoveku; Academia, Praha, 1977
- [3] Znáň, Š. a kol.: Pohľad do dejín matematiky; Alfa/SNTK, Bratislava, 1986
- [4] http://forum.matematika.cz/files/prace/SOC_Nektere_netradicni_vhledy_do_geometrie.pdf
- [5] <http://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon.shtml>
- [6] <http://mathworld.wolfram.com/NapoleonsTheorem.html>
- [7] https://cs.wikipedia.org/wiki/James_A._Garfield
- [8] <http://www.wikihow.com/Do-Garfield%27s-Proof-of-the-Pythagorean-Theorem>
- [9] <http://jwilson.coe.uga.edu/emt668/emt668.student.folders/headangela/essay1/pythagorean.html>

- [10] <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras>
- [11] https://sk.wikipedia.org/wiki/Silvester_II
- [12] http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401787/DejinyMat_19-2001-1_10.pdf
- [13] http://www.scienceworld.cz/neziva-priroda/silvestr-ii-papez-ktery-byl-matematikem-1447/?switch_theme=mobile
- [14] https://cs.wikipedia.org/wiki/Jurij_Vega
- [15] <http://www2.arnes.si/~gljsentvid10/vegaan.html>
- [16] <http://encyklopedia.sme.sk/c/3101681/lee-general-robert-edward.html>
- [17] <http://zivot.cas.sk/clanok/1149/albrecht-z-valdstejna-na-kolena-ho-dostala-choroba-zoldnierov>
- [18] <http://www.vvzs.mil.sk/index.php?ID=7487>
- [19] <http://encyklopedia.sme.sk/c/4351158/hadrian-cisar.html>
- [20] <https://cs.wikipedia.org/wiki/Hadrianus>
- [21] <http://www.instory.cz/1194-sokujici-odhaleni-po-sto-letech-rozlousknuto-nejvetsi-tajemstvi-v-i-lenina.html>
- [22] http://www.oskole.sk/?id_cat=1&clanok=96762246
- [23] https://sk.wikipedia.org/wiki/Josif_Vissarionovi%C4%8D_Stalin
- [24] https://sk.wikipedia.org/wiki/Mustafa_Kemal_Atat%C3%BCrk
- [25] https://cs.wikipedia.org/wiki/Justini%C3%A1n_I.
- [26] https://www.google.sk/search?q=john+singleton+mosby&ie=utf-8&oe=utf-8&gws_rd=cr&ei=lgoFVsKBLMOra-O4hlgJ
- [27] http://www.muzeumpp.eu/index.php?option=com_content&view=article&id=372%3A-1804-1821-napoleon-bonaparte-cisar-dobyvate&catid=51%3Aarchiv-lankov&Itemid=103&lang=sk
- [28] https://sk.wikipedia.org/wiki/Napoleon_Bonaparte
- [29] <http://www.pluska.sk/izdravie/relax/relax/smrt-napoleona-bonaparta-bola-vrazda-alebo-vredy.html>

Teacher trainees crossing the barrier between the concrete and the abstract - (mis)understanding of geometric concepts

Zuzana Vitézová^a – Zuzana Naštická^a

^a *Department of mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 30 September 2015; received in revised form 5 October 2015; accepted 15 October 2015

Abstract

In general, abstraction and correct understanding of fundamental concepts play an important role in teaching practice. A good teacher not only has to know the proper meaning of concepts, but also be able to use them correctly and recognize situations in which it is sensible to use particular terms. Pupils acquire notions of terms in their early childhood and then in primary educational level, therefore primary teachers' correct understanding of the concepts is essential. During their university studies some teacher trainees find out that they have incorrect or insufficient notion of geometric terms. This can be remedied in several ways. Useful remedy methods can be discussions, Socratic dialogue or use of various material teaching aids. We managed to interlink these three methods in a 90-minute lesson of an optional course covered in study plan of the Teacher Training Master Programme for Primary Education at Constantine the Philosopher University in Nitra, Slovakia. The students who participated in the lesson were in their first or second year of the master degree study. The submitted contribution comprises a brief description of the lesson and a summary of findings we obtained by means of worksheets filled in by the teacher trainees.

Keywords: polyhedron, base of a solid figure, skeleton models of solid figures, Socratic dialogue

Classification: D60, D70

Introduction

All their lives people learn mainly from their experience. For children it is natural to touch and try everything. After having started their school attendance, they are forced to learn more and more through reading and writing. For many children this change might be very hard. Teachers can soften the blow of this transition by means of suitable aids (Gabajová & Vankúš, 2011). Also, it is very important for children to learn to express themselves correctly from the very beginning of their schooling. Correct expressing includes use of appropriate register and terms for particular concepts. In this sense the teacher is a key character from whom learners adopt language devices and register. That is why we considered it a good idea to make the primary teacher trainees construct skeleton models of solid figures from easily available drinking straws.

Objectives and research tools

The research was conducted in a lesson from an optional mathematics course with 50 students at the age of 22 and over who were in their first or second year of Teacher Training

*Corresponding author: zuzana.vitezova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2015.1.2.60-67

Master Programme for Primary Education. The lesson contents were focused on both educational and research goals. The educational goals included revision or acquisition of students' knowledge of regular polyhedrons, planar figures which form the faces of given solids, number of edges, faces and vertices, and last but not least, correct labelling of the solid and planar figures. An additional objective was to introduce a simple way of preparing a teaching aid which the teacher trainees might find useful in their teaching practice later on. The research goals included investigating the teacher trainees' deficiencies in understanding selected geometric concepts, and verifying applicability of Socratic dialogue within mathematics education of pre-service teachers. The research tool for data collection was a two-page worksheet, with a task to define selected geometric concepts on one page, and a task to fill in a table related to selected solid figures on the other page. The worksheets filled in by the teacher trainees were subjected to content analysis.

Polyhedrons in mathematics education

According to the National Educational Programme ISCED 1 pupils first encounter solid figures in the fourth year of primary school, when the primary focus is put on cubes, cube constructions and drawing their plans and elevations (ISCED 1). However, pupils encounter many other solid figures in their natural environment. Thus, they can also encounter regular polyhedrons. It is crucial that the teacher can correctly label the fundamental parts of the solids, so that their pupils are exposed to correct register properly describing the concepts. What children acquire at this stage, they (mis)use later on in their lives.

Material teaching aids

One of the basic principles in mathematics instruction, and in education in general, is the principle of clearness and illustration. This principle highlights the importance of concept formation by means of illustrations and demonstrations, and the importance of knowledge and skills acquisition and habit formation through sensual perception of phenomena and objects, such as drawings, photographs, objects, and also inner experience and images elicited by narration. This can be efficiently provided by material teaching aids (Šedivý, 2006). A teaching aid is a material object that directly embodies particular information which pupils are expected to learn. Teaching aids can convey the informative contents via certain technical device or directly (Driensky & Hrmo, 2004). According to Gábor (1989) there are three main types of teaching aids, namely (i) demonstrative and frontal, (ii) audio-visual, (iii) and material aids.

In the analysed lesson tactile teaching aids were used. Despite they might be marked by technical imperfections and properties of the material, they play an important role in the first stages of abstraction which leads to formation of concepts about elementary geometric terms (Vallo, Rumanová, Vidermanová, Barčíková, 2013). In the lesson teacher trainees were provided with material for construction of the skeleton models of solids which allowed them to work with the models immediately. Teacher trainees could also find that helpful when filling in the table in the worksheet (Fig. 3).

Lesson structure

Two groups of teacher trainees attended two 90-minute long lessons (1 lesson per group) with the same contents and structure, and the total number of the teacher trainees was 50. Each of the lessons consisted of two main parts. The first part of the lesson was focused on

the teacher trainees understanding of selected geometric concepts. Students were asked to define the following seven geometric terms in their own words – planar figure, solid figure, vertex, side, edge, face, and base (basal face). The results obtained from analysis of that lesson phase are discussed in (Vitézová, Naštická, 2015).

During the activity students had difficulties to express their thoughts and grasp their notions of the geometric concepts. We believe that in order to eliminate this problem it would be beneficial to discuss the topic with students more often, talk with them about what particular terms mean, and when it makes sense to use some terms (see *Socratic dialogue* below). For instance, such geometric terms and concepts are base (face), base (side) and the like. During the lesson several students defined the base of a solid as *that face on which the solid is standing*. Such understanding of the term, however, is wrong, since the solid figure, e. g. a pyramid, can “be standing” also on one of the side faces. Moreover, in the abstract geometric theory an expression like “be standing on something” seems ridiculous, pointless, irrelevant, and out of the context. Therefore it is necessary to emphasize the discussion and its importance in acquisition of correct geometric concepts.

The next part of the lesson was focused on construction of skeleton models of solid figures and acquisition of knowledge about solids, especially regular prisms, pyramids and polyhedrons. Students were asked to construct skeleton models of selected solids with the use of a string and drinking straws. The selected solids were namely the five Platonic solids (regular tetrahedron, octahedron, dodecahedron, icosahedron, cube), right-regular hexagonal prism and pyramid, right-regular pentagonal prism and pyramid, right-regular four-sided pyramid and right-regular three-sided prism. The model of icosahedron had already been constructed by the teachers before the lesson as this solid might seem too demanding and time-consuming for the teacher trainees. Students, working in threes or fours, managed to construct all the remaining ten solids (Fig. 1), despite minor difficulties which they successfully and independently resolved.



Figure 1

As a follow-up activity, students were asked to fill in a table related to the solids models of which they had just constructed. They were asked to state the names of the solids, number of faces, edges and vertices in the solids, names of the planar figures which form the faces of the solids, and determine if the solids have bases, and how many.

In this contribution the analysis focuses primarily on results related to Platonic solids (Fig. 2), i. e. convex regular polyhedrons whose faces are mutually congruent regular polygons, and whose vertices are incident with constant number of edges or faces. Any Platonic solid can be circumscribed with a sphere.

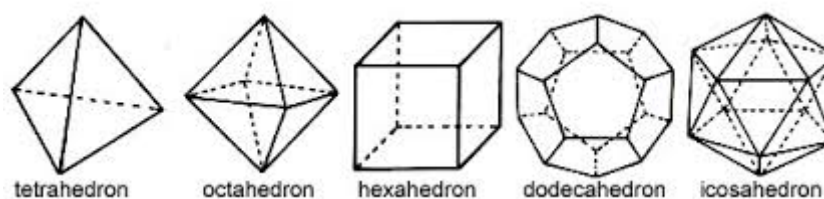


Figure 2

Figure 3 shows a correctly filled-in table. In this contribution the analysis is primarily focused on solids No. 1, 2, 3, 4 and 11.

	Name of solid figure	Number of			What planar shapes are the faces of this solid?	Does this solid have any bases? If yes, how many?
		faces	edges	vertices		
1.	Cube	6	12	8	Square	No
2.	Regular tetrahedron	4	6	4	Equilateral triangle	No
3.	Regular octahedron	8	12	6	Equilateral triangle	No
4.	Regular dodecahedron	12	30	20	Regular pentagon	No
5.	Right-regular hexagonal prism	8	18	12	Regular hexagon, rectangle/square	Yes, 2
6.	Right-regular hexagonal pyramid	7	12	7	Regular hexagon, isosceles triangle	Yes, 1
7.	Right-regular pentagonal prism	7	15	10	Regular pentagon, rectangle/square	Yes, 2
8.	Right-regular pentagonal pyramid	6	10	6	Regular pentagon, isosceles triangle	Yes, 1
9.	Right-regular four-sided pyramid	5	8	5	Square, isosceles triangle	Yes, 1
10.	Right-regular triangular prism	5	9	6	Equilateral triangle, rectangle/square	Yes, 2
11.	Regular icosahedron	20	30	12	Equilateral triangle	No

Figure 3

Results obtained from the tables filled-in by students

As mentioned above, the subject of analysis of student worksheets which is presented in this contribution is the part about regular polyhedrons. Our objective was to determine if teacher trainees can properly distinguish between planar and solid figures and their constituents, if they can name the geometric figures, state the numbers of edges, faces and vertices, and also what difficulties arise within this issue. We decided not to proceed with the students to investigate relations between the numbers of the constituents of the solids

and develop the task to a higher level with focus on mathematical reasoning, proofs and induction, as it would very much exceed standard requirements on the primary level teachers' mathematical education.

As far as naming the polyhedrons, students had difficulties mostly with the tetrahedron. Out of all 50 students 38 managed to name it correctly. Some of the rest incorrectly referred to tetrahedron as a four-sided pyramid, or even equilateral triangle, which is a planar figure, not a solid. The rest of the polyhedrons were named correctly, except for one case when a student labelled the icosahedron as a dodecahedron, which was probably just a lapse due to lack of concentration. Similarly, one student labelled the cube as a tetrahedron.

1.	With the use of drinking straws and string, make a skeleton of a solid figure the surface area of which consists of six congruent square faces.
2.	With the use of drinking straws and string, make a skeleton of a solid figure the surface area of which consists of four congruent equilateral triangles.
3.	With the use of drinking straws and string, make a skeleton of a solid figure the surface area of which consists of eight congruent equilateral triangles. Four edges meet at each vertex of this solid.
4.	With the use of drinking straws and string, make a skeleton of a solid figure the surface area of which consists of twelve congruent regular pentagons. Three edges meet at each vertex.
5.	With the use of drinking straws and string, make a skeleton of a right-regular hexagonal prism.
6.	With the use of drinking straws and string, make a skeleton of a right-regular hexagonal pyramid.
7.	With the use of drinking straws and string, make a skeleton of a right-regular pentagonal prism.
8.	With the use of drinking straws and string, make a skeleton of a right-regular pentagonal pyramid.
9.	With the use of drinking straws and string, make a skeleton of a right-regular four-sided pyramid.
10.	With the use of drinking straws and string, make a skeleton of a right-regular triangular prism.
11.	With the use of drinking straws and string, make a skeleton of a solid figure the surface area of which consists of twenty congruent equilateral triangles. Five edges meet at each vertex.

Figure 4

Determining the number of faces of the polyhedrons caused no severe difficulties to the students. They could simply derive it from the name of the solids, and in some cases it was clear from the initial instruction according to which students constructed the skeleton models. In addition, students had the models at their disposal while filling in the table.

The situation was similar with the number of edges. An exception was the icosahedron. Only around quarter of the total number of students managed to determine correctly the number of edges in icosahedron, though, most of the students who stated incorrect number made just minor mistakes (by one or two edges more or less than the correct number was).

Next, students were asked to state the number of vertices of the solids. Students made most mistakes in case of the dodecahedron. Only half of the students stated the correct number of its vertices. One student made a minor mistake (by one vertex more than the correct number was), the rest of the students stated that the dodecahedron has 15 vertices, and it was most likely due to mistake of one of the students and the other just copied the incorrect number as they were allowed to work in groups.

The next piece of information which was asked from students in the worksheet was to name the planar figures which form the faces of the solids. Correct answers were considered also those in which students did not specify precisely the type of certain polygons, e. g. if they stated correctly that faces of icosahedron are triangles, omitting the adjective *equilateral*, the answer was assessed as correct unless they stated wrong type, e. g. scalene. In this sense none of the solids were correctly described by all students, but the maximum number of students who gave incorrect answers for one of the solids (namely the dodecahedron) was only six. In case of other polyhedrons the number of incorrectly stated answers was less than six.

What we find alarming is the difficulty some students had when labelling the pentagon, as some of them labelled it incorrectly as a “solid with five faces” (NB: in the Slovak language, which was the language of instruction in the analysed lesson, “pentagon” and “solid with five faces” are single words with the same initial syllable), and also vice versa. Similarly, some students incorrectly labelled tetrahedron as equilateral triangle, which could imply serious errors in distinguishing between planar figures and solids.

Socratic dialogue

At first glance determining the number of bases in the regular polyhedrons seemed to be very easy for the students. However, in the lesson this issue was the most discussed. In fact, without applying the Socratic dialogue, as explained below, the final answers of students would be different. After successful use of the Socratic dialogue all students realized that in case of regular polyhedrons it is not wise and useful to talk about bases.

The method of the Socratic dialogue, which we applied in the lesson, is based on the premise that learners learn more when they are engaged deeply in investigating certain issue, when they put themselves questions and gradually seek for the answers. The Socratic dialogue positively contributes to development of critical thinking and it is also useful as a diagnostic tool for determination of the level of critical thinking. It has its origin in ancient Greece where Socrates used dialogue and questions in order to discomfit people who were overly self-confident in their opinions and beliefs. We used this method in order to assist the students in their considerations and steer them to correct ideas. In the following paragraph we state a short retrospective transcription of our dialogue with the students.

T – teacher, **S** - students

T: *How many bases are there in a cube?*

S: *One. / Two. / None. / Six.*

T: *What do we mean by the base of a solid?*

S: *The face the solid stands on.*

T: *So, if we turn the cube around and put it on the desk with some other face down, do we change its base?*

S: -----

(Students remained silent as they did not know the answer or did not understand the question.)

T: *When does it make sense to consider the concept of base?*

Although students sat up, none of them attempted to reply to the last question. Therefore we asked them to recall that pupils at primary and also secondary schools label the faces of cube as left, right, front and rear face, and upper and lower base, but the purpose of it is just to facilitate the communication between the teacher and pupils. However, when talking about cube as an abstract geometric figure with certain properties the concept of base plays

no role, as well as in case of the other Platonic solids, since all its faces are congruent and there is no need to use the concept of base when computing the volume of cube. On the other hand, it is useful to consider base in case of pyramids and prisms, as their base often has different shape than the other faces, and also the surface area of the base is used in computation of their volumes. This is what we wanted to draw the students' attention on.

In the first question in the dialogue we could have used any of the five Platonic solids. Cube seemed to be the most reasonable as people in general are mostly familiar with cube and its properties.

Conclusion

When students start their university studies it is assumed that they are able to independently learn various terms, concepts and theories. They should be able to manage that on various levels of abstraction and complexity. It is also assumed that they already possess high critical and logic thinking competences. For this they must have had developed cognitive competences corresponding to the stage of formal operations in terms of Piaget theory of cognitive development (Piaget, 1970). At this stage people in general are able to use their abstract thinking and formal mental processes. If these competences are not developed enough, various complications occur, since at university level geometric concepts are introduced in their abstract sense, not the concrete one. Furthermore, such concepts are then introduced as tools for further education. For instance, the concept of base is important for computation of volume of pyramids and prisms, and there are plenty of such links. This was also the case of our students – teacher trainees for primary education. Unfortunately, many of them still do not have sufficiently acquired terms and concepts and developed abstract thinking. Our multiple experiences with the analysed student group support our belief that without the presence of the concrete models of solids they would not be able to actively participate in the activities and discussions in the lesson. The above mentioned deficiencies might be eliminated by means of properly led discussion about the main issue of the lesson.

References

- Driensky, D., & Hrmo, R. (2004). Materiálne didaktické prostriedky. Experimentálny učebný text grantového projektu KEGA. Doplňujúce pedagogické štúdium učiteľov technických odborných predmetov. Bratislava: STU, 2004. Citované dňa 14.5.2015. Dostupné na <http://web.tuke.sk/kip/download/materialnedidaktickeprostriedky.pdf>
- Fischer, R., Malle, G., & Bürger, H. (1992). Človek a matematika. Úvod do didaktického myslenia a konania. Bratislava: SPN, 1992. ISBN 80-08-01309-5
- Gabajová, M., & Vankúš, P. (2011). Učebné pomôcky vo vyučovaní stereometrie. In: Nové trendy výučby stereometrie v príprave budúcných učiteľov matematiky. Nitra: UKF, 2011. S. 14 - 18, ISBN 978-80-558-0047-9
- Gábor, O., Kopanev, O., & Križalkovič, K. (1989). Teória vyučovania matematiky 1. Bratislava: SPN, 1989. 328 s. ISBN 80-08-00285-9
- Hejný, et al. (1989). Teória vyučovania matematiky 2. Bratislava: SPN, 1989. 560 s. ISBN 80-08-00014-7

Pavlič, G. (2001). *Školská encyklopédia matematiky*. Bratislava: Príroda, 2001. 128 s. ISBN 80-07-01147-1

Piaget, J. (1970). *Psychologie inteligence*. Praha : SPN, 1970. 148 s.

Šedivý, O. (2006). *Názornosť najmä pri vyučovaní geometrie priestoru*. In: *Názornosť vo vyučovaní matematiky*. Nitra: UKF, 2006. S. 3 - 14, ISBN 80-8094-024-X

Štátny pedagogický ústav. (2009). *Štátny vzdelávací program Matematika. Príloha ISCED 1*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2009. Citované dňa 11.5.2015. Dostupné na http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/1stzs/isced1/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced1.pdf

Štátny pedagogický ústav. (2010). *Štátny vzdelávací program Matematika. Príloha ISCED 2*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2009. Citované dňa 11.5.2015. Dostupné na http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced2.pdf

Svitek, V. (1969). *Logické základy geometrie*. Bratislava: SPN, 1969. 320 s.

Vallo, D., Rumanová, L., Vidermanová, K., Barčíková, E. (2013). *Aktivity a manipulácie vo vyučovaní geometrie telies*. Nitra: FPV UKF v Nitre, 2013. 80 + 34 s. ISBN 978-80-558-0389-0

Vallo, D., et al. (2012). *Geometria telies ...všeobecne a pútavo*. Nitra: FPV UKF v Nitre, Edícia Prírodovedec č. 505. ISBN 978-80-558-0106-3

Veselský, M. (2009). *Úroveň myšlení studentů vysokých škol a jeho měření pomocí IPDT*. In: *Pedagogika*. - Vol. 59, Nr. 1 (2009), s. 71-79.

Vítězová, Z., & Naštická, Z. (2015). *Deficiencies in Geometric Language Register and Knowledge of Pre-service Teachers for Primary Education*. In: *Acta Mathematica Nitriensia*. -, Roč. 1, č. 1 (2015), s. 168-175. ISSN 2453-6091

Voráčková, Š., et al. (2013). *Atlas geometrie: Geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia, 2013. 256 s. ISBN 978-80-200-1575-4

Význam geometrie v technickom vzdelávaní žiakov 2. stupňa základnej školy

The Importance of Geometry in Technical Education of Pupils at Lower Secondary Level

Viera Tomková 1^a Jarmila Honzíková 2^b

^{a*}*Katedra techniky a informačných technológií, Pedagogická fakulta, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

^{b†}*Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Pedagogická fakulta, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní ul. 8, ČR-306 14 Plzeň*

Received 30 September 2015; received in revised form 14 October 2015; accepted 18 October 2015

Abstract

The paper deals with the importance of Geometry in the development of technical thinking of students. Based on the results of the research carried out on a sample of lower secondary school pupils we point out that quality acquisition of knowledge in the field of geometry is important in acquiring knowledge and skills in technical education. On the basis of the students' outcomes analysis we identified objective reasons affecting the score the pupils obtained in the tests. The results also suggest a correlation between the pupils' knowledge of Geometry and Technology.

Keywords: technical education, spatial imagination, geometry, the results of the research

Classification: D39

Úvod

Jednou z priorít Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky je podpora technického vzdelávania na základných školách s cieľom zvýšiť záujem žiakov o štúdium na technicky orientovaných stredných odborných školách. Uvedená iniciatíva sa v praxi realizuje prostredníctvom Štátneho inštitútu odborného vzdelávania, ktorý získal národný projekt financovaný ESF z názvom Podpora profesijnej orientácie žiakov základnej školy na odborné vzdelávanie a prípravu prostredníctvom rozvoja polytechnickej výchovy zameranej na rozvoj pracovných zručností a práca s talentami. Projekt je známy aj pod pracovným názvom „Dielne“ alebo „Základná škola odborne“. Cieľom projektu je podporiť záujem žiakov o odborné vzdelávanie zariadením odborných učební pre vyučovacie predmety fyzika, chémia, biológia a technika tak, „aby si prakticky a názorne mohli žiaci rozvíjať pracovné zručnosti prostredníctvom „polytechnickej výchovy“ s využitím moderných, inovatívnych metód výučby a foriem vzdelávania“ [1]. Myslíme si, že nie je možné zvýšiť

*Corresponding author: vtomkova@ukf.sk,

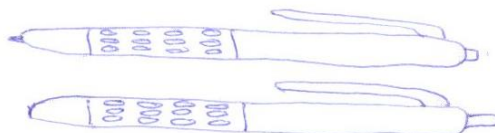
†Corresponding author: jhonziko@kmt.zcu.cz

DOI: 10.17846/AMN.2015.1.2.68-73

záujem žiakov o odborné vzdelávanie bez rozvoja ich technického myslenia, ktoré úzko súvisí s rozvojom priestorovej predstavivosti žiakov.

Význam geometrie v rozvoji technického myslenia žiakov

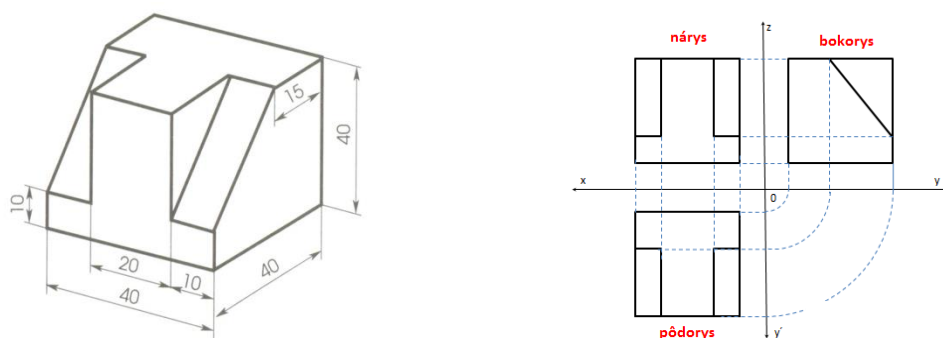
Výnimočné postavenie vyučovacieho predmetu technika v sústave vyučovacích predmetov je v aplikácii teoretických vedomostí v praktických úlohách. Pri riešení praktických úloh má žiak možnosť pochopiť rozdiel vo vlastnostiach jednotlivých materiálov a tiež vnímať postupnosť jednotlivých krokov realizácie daného projektu. E. Franus pri snahe presne vymedziť charakteristiku pojmu *technické myslenie* vychádzal z charakteristiky dvojitej povahy technického myslenia, ako myšlienkových procesov v oblasti vedy a v oblasti techniky [2, s. 48]. To znamená, že technicky myslíaci jedinec nepostupuje pri riešení úloh len v naučených schémach, ale svoje teoretické vedomosti dokáže flexibilne aplikovať v nových neočakávaných súvislostiach. Dosiahnutý stupeň rozvoja technického myslenia je možné u žiakov diagnostikovať aj pomocou riešenia grafických úloh. Pri ich riešení sa môžeme stretnúť s neočakávaným výsledkom, ktorý svedčí o originalite a tvorivosti v myslení jednotlivca, ktoré je inak skryté. Na obrázku č. 1 je ukážka príkladu technického myslenia žiačky 7. ročníka. Jej úlohou bolo graficky znázorniť pružinu v pokoji a pri zaťažení silou. Pravdepodobne sa jej úloha zdala veľmi jednoduchá a myslela si, že chceme zakreslenie praktického využitia pružiny v rôznych jednoduchých mechanizmoch. Žiačka pri riešení uplatnila tvorivé technické myslenie a aj keď pružinu priamo nezobrazila, jej riešenie sme ohodnotili plným počtom bodov. Jej riešenie úlohy je zaujímavé aj tým, že žiačka „nezobrazila“ pružinu pri zaťažení na ťah, ako ju znázornila väčšina respondentov, ale naznačila namáhanie na tlak.



Obrázok 1: Riešenie úlohy s pružinou – zobrazenie zapnutého a vypnutého pera (dievča – 7. ročník)

V technickom vzdelávaní je bežným dorozumievacím jazykom medzi učiteľom a žiakom náčrtok, skica alebo technický výkres. Pri ich tvorbe sa od žiaka vyžaduje určitá úroveň grafických zručností, ale nutnou podmienkou ich tvorby je dobre rozvinutá priestorová predstavivosť žiaka a dostatočne osvojená odborná terminológia z geometrie. Kým v matematike (okrem stereometrie) je daný objekt pre názornosť zobrazovaný v jednoduchom rovinnom zobrazení (napr. trojuholník, kružnica, lichobežník) tak, aby žiak získal predstavu ako postupovať pri riešení úlohy, v technike žiak musí vedieť každé vnímané teleso zakresliť v rovinnom zobrazení tak, aby bol schopný dané teleso (produkt) vytvoriť. To znamená, že žiak má vedieť manipulovať s daným telesom v predstavách a vytvorené predstavy vedieť správne zakresliť podľa prísnych pravidiel technického zobrazovania (obrázok č. 2). V technickom vzdelávaní zobrazenie vnímaného telesa alebo zakreslenie technickej myšlienky slúži ako podklad na praktickú výrobnú činnosť. Z uvedeného vyplýva, že žiak má

vedieť kótovať rozmery a jednotlivé geometrické tvary telesa (s použitím symbolov a kót) a má byť schopný dané teleso narysovať vo vhodnej mierke a ak je to potrebné, vedieť zobraziť teleso v reze.



Obrázok 2: Ukážka úlohy na nácvik zobrazenia telesa v rovinnom zobrazovaní

Problematickou rozvíjania priestorovej predstavivosti vo vzdelávaní žiakov sa zaoberajú najmä odborníci vyučujúci matematiku, deskriptívnu geometriu, dizajn alebo techniku, ako napr. O. Šedivý, J. Molnár, Z. Juščáková, P. Beisetzer, J. Honzíková, R. Górska, B. Németh, N. M. Tuan a iní. Poukazujú na nevyhnutnosť venovať pozornosť danej problematike, nakoľko nedostatočne rozvinutá priestorová predstavivosť žiakov a študentov je často dôvodom ich neúspechu pri riešení zadaných úloh. Prejavuje sa nielen v neschopnosti žiakov manipulovať s určenými objektmi v predstavách, ale je aj bariérou pri grafickom znázorňovaní vzniknutých predstáv. Mnohí žiaci nie sú schopní vyjadriť graficky svoje myšlienky a ani zobraziť predmety, ktoré priamo pôsobia na ich receptory. Príčiny nedostatočne rozvinutej priestorovej predstavivosti nie je možné určiť jednoznačne. Medzi hlavné príčiny však môžeme zaradiť nedostatočnú vizualizáciu priestoru, nevhodné grafické zobrazenia 3D objektov a tiež formalizmus vo vzdelávaní [3].

Výsledky výskumov zameraných na vplyv školskej reformy na schopnosť žiakov tvoriť grafické zobrazenia

Vo svojich výskumoch sa zameriavame na diagnostikovanie vedomostí a zručností žiakov nižšieho sekundárneho vzdelávania vo vyučovacom predmete technika. Naším hlavným cieľom je skúmanie schopnosti žiakov zakresliť technickú myšlienku (či už vo forme náčrtku, skice alebo technického výkresu) a schopnosti získavať potrebné informácie z podnetných úloh, t.j. statických grafických zobrazení. Obe schopnosti sú nevyhnutné pri osvojovaní si vedomostí v technickom vzdelávaní. Vo výskumoch sme sa tiež zamerali na sledovanie, či žiaci majú správne osvojenú odbornú terminológiu a či sú schopní správne priradiť k odbornému termínu jeho grafické zobrazenie (schematickú značku, piktogram, 2D alebo 3D znázornenie a pod.).

Na základe výskumu, ktorý sme realizovali v roku 2011 môžeme konštatovať, že v súčasnom období je možné absolventa základnej školy označiť pojmom *technický analfabet*, čo v našom chápaní predstavuje jedinca neovládajúceho základné technologické postupy spracovania materiálov, nemajúceho osvojené základné manuálne zručnosti a konštrukčné

zručnosti nevyhnutné pri tvorbe jednoduchej technickej dokumentácie a taktiež s nedostatočnou schopnosťou si na základe narysovaných podkladov predstaviť výsledný produkt.

Prieskumnú vzorku tvorilo spolu 496 žiakov piateho až deviateho ročníka vo veku od 10 do 15 rokov. Testovania sa zúčastnilo 250 chlapcov a 246 dievčat. Výskumná vzorka bola tvorená 270 respondentmi zo Slovenskej republiky a 226 respondentmi z Českej republiky [4].

V testoch pre jednotlivé ročníky boli zaradené aj jednoduché konštrukčné úlohy z geometrie, overujúce, či žiaci majú dostatočne osvojenú odbornú terminológiu a či sú schopní ju správne aplikovať v grafických úlohách. Pre názornosť uvádzame ukážky konštrukčných úloh, ktoré mali žiaci vyriešiť:

Úloha č. 1: Narysujte dve ľubovoľné navzájom kolmé priamky (úloha pre žiakov 5. ročníka).

Celková úspešnosť riešenia úlohy bola 65 %. Žiaci, ktorí boli neúspešní, narysovali rovnobežky alebo rôznobežky.

Úloha č. 2: Pomocou kružidla zostrojte rovnostranný trojuholník ABC, pričom je daná dĺžka strany $|AB| = 4\text{ cm}$ (úloha pre žiakov 7. ročníka).

Úspešnosť riešenia bola 77 %. U žiakov bola zistená nedostatočne osvojená práca s kružidlom.

Úloha č. 3: Narysujte tupouhlý trojuholník a opíšte mu kružnicu (úloha pre žiakov 8. ročníka).

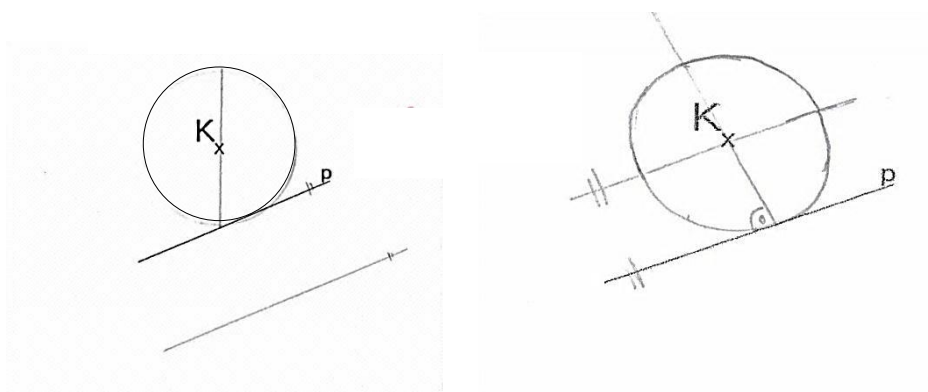
Úspešnosť riešenia úlohy bola 28 %. Pri vyhodnotení úlohy sme zistili, že 69 % z neúspešných žiakov nenarysovalo tupouhlý trojuholník.

Úloha č. 4: Zostrojte kružnicu k so stredom v bode S tak, aby prechádzala daným bodom M . Do kružnice k vpíšte pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A tak, aby body S a M ležali jednej strane trojuholníka (úloha pre žiakov 8. ročníka).

Úspešnosť riešenia úlohy bola 57 %. Je prekvapivé, že táto úloha bola pre žiakov náročná. Žiaci nemali dostatočne osvojený postup zostrojenia trojuholníku opísanej kružnice.

Úloha č. 5: K danej priamke p narysujte rovnobežku a kolmicu prechádzajúcu cez daný bod K . Potom narysujte kružnicu k so stredom v bode K , ktorá sa bude dotýkať priamky p (úloha pre žiakov 9. ročníka).

Domnievali sme sa, že úloha je veľmi jednoduchá, nakoľko narysovaná kolmica prechádzajúca bodom K sa pretne s priamkou p a vzniknutý priesečník je dotykový bod (obrázok č. 3). Žiaci 9. ročníka mali s riešením úlohy problémy. Úlohu správne vypracovalo len 47 %. Pri riešení úlohy žiaci nevedeli uplatniť analytické myslenie a vnímať priesečník kolmice a priamky p ako dotykový bod kružnice. Tí žiaci, ktorí úlohu správne vyriešili, mali v obrázku označený priesečník P oboch priamok a potom už len zostrojili kružnicu k so stredom v bode K a polomerom $r = |KP|$.



a) nesprávne riešenie úlohy b) správne riešenie úlohy

Obrázok 3: Riešenie úlohy žiakmi 9. ročníka (chlapci – 14 rokov)

Všetky konštrukčné úlohy v testoch boli zamerané na identifikáciu tých nedostatkov vo vzdelávaní, ktoré majú priamy súvis s riešením úloh v predmete technika na základnej škole. Vyhodnotením úloh z geometrie sme zistili, že výskumu podrobení žiaci 2. stupňa ZŠ majú nedostatočne osvojenú odbornú terminológiu z geometrie, nemajú dostatočne osvojené zručnosti pri práci s rysovacími pomôckami a nie sú schopní na základe osvojených vedomostí samostatne riešiť úlohy z geometrie, s čím súvisí zistená nízka úroveň priestorovej predstavivosti žiakov. Na základe vyhodnotenia záznamov v pozorovacom hárku sme zistili, že žiaci majú nedostatočne osvojenú nasledovnú odbornú terminológiu: tupouhlý trojuholník, pravouhlý trojuholník, rovnostranný trojuholník, rovnobežné priamky, kolmé priamky.

Záver

V rámci realizovaného výskumu sme sa rozhodli pre samostatné vyhodnotenie výsledkov žiakov 9. ročníka, s cieľom poukázať na pripravenosť absolventov základnej školy pokračovať v štúdiu na stredných odborných školách technického zamerania. Vyhodnotením výsledkov výskumu bola preukázaná veľmi nízka úroveň schopnosti žiakov graficky zobrazovať vnímané objekty [4], [5]. Žiaci 9. ročníka ZŠ nie sú schopní správne vyhodnotiť informácie vo forme statických obrazov a taktiež nemajú osvojené potrebné zručnosti na vytvorenie vlastných statických obrazov (tabuliek, grafov, schém, výkresov), ktoré by presne, jednoznačne a výstižne vyjadrovali požadované informácie. Pri vyhodnotení úloh sme zistili, že príčiny ich neúspechu v nami realizovanom testovaní sú:

- nedostatočne osvojené zručnosti pri práci s rysovacími pomôckami,
- nedostatočne osvojená potrebná odborná terminológia,
- neschopnosť zobrazovať „videné“ vo forme vlastného zobrazenia skutočnosti s prihliadnutím na základné tvarové prvky a rozmery zobrazovaného telesa,
- nízka úroveň priestorovej predstavivosti žiakov,
- neschopnosť vyhľadať potrebné informácie v zdrojovom dokumente obsahujúcom statické obrazy,
- neschopnosť žiakov pracovať s predstavami,
- nedostatočne osvojené zručnosti potrebné pri grafickej komunikácii vo forme podnetných úloh (pri čítaní informácií a aj znázorňovaní informácií vo forme statických obrazov).

Všetky uvedené faktory ovplyvňujúce schopnosť žiakov tvoriť grafické zobrazenia v technickom vzdelávaní sú rozvíjané vo všetkých prírodovedných predmetoch na základnej škole, ale najmä vo vyučovanom predmete matematika, konkrétne v geometrii. Na základe realizovaných výskumov si myslíme, že vo vzdelávaní žiakov na základnej škole je potrebné viac uplatňovať medzipredmetové vzťahy medzi prírodovednými predmetmi a tým dosiahnuť kvalitnejšie osvojenie si vedomostí a zručností potrebných pri riešení úloh v geometrii, technike a fyzike.

Použitá literatúra

- [1] Národný projekt „Podpora profesijnej orientácie žiakov základnej školy na odborné vzdelávanie a prípravu prostredníctvom rozvoja polytechnickej výchovy zameranej na rozvoj pracovných zručností a práca s talentami.“ [online]:
http://media.radavladyp.sk/2014_marec_desiate_rokovanie/NP_Podpora_profesijnej_orientacie.pdf (10.9.2015, 14:50)
- [2] FRANUS, E. *Wielkie funkcje technicznego intelektu. Struktura uzdolnień technicznych*. Kraków: Uniwersytet Jagielloński, 2000, 293 s. ISBN 83-233-1397-0.
- [3] VALLO, D. – RUMANOVÁ, L. – ĎURIŠ, V. Some Spatial Competences and Formalism in Solutions of Stereometrical Tasks. In: *Procedia – Social and Behavioral Sciences Journal*, 197, 2015. s. 2320-2324.
- [4] Tomková, V. *Technická neverbálna komunikácia*. 1. vyd. Nitra: UKF, 2013. 204 s. ISBN 978-80-558-0367-8.
- [5] Tomková, V. a kol. *Priestorová predstavivosť v školskej praxi*. 1. vyd. Nitra: UKF, 2014. 158 s. ISBN 978-80-558-0711-9.

Hra NIM jako nástroj pro výuku specifických oblastí matematiky a programování

NIM Game as a Tool for the Teaching of Specific Areas of Mathematics and Programming

Vlastimil Chytrý^{a 1} - Roman Kroufek^a - Jan Janovec^a

^{a *} Katedra preprimárního a primárního vzdělávání, Pedagogická fakulta, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem

Received 28 September 2015; received in revised form 11 October 2015; accepted 19 October 2015

Abstract

The paper describes a possibility of NIM game usage in math education and programming at Elementary and High School. The NIM game has a positive influence on development of logical and abstract thinking and reasoning. The paper focuses on usage of this game at specific fields of math and programming i.e. converting of numbers into binary system, working with some of the Excell functions and usage of Visual basic for application as Excell supplement.

Keywords: Teaching mathematics, teaching programming, game, NIM

Classification: - D40, U50, N60, N80, U70

Úvod

Hlavní myšlenka popsaná v tomto článku vychází z předpokladu, že nejvíce motivující aktivitou je pro žáka hra², která bývá často do vyučování zapojována pouze z motivačních důvodů bez jejího hlubšího využití [8]. V tomto článku se budeme primárně věnovat matematické³ hře NIM, možnostem jejího zapojení do výuky a využití této hry při programování ve Visual basic for applications (dále jen VBA) jako součástí tabulkového editoru Excel. Výhodou této hry je, že vychází z manipulace, která je jedním z nejvýznamnějších aspektů při motivaci žáků [6]. Již dříve jsme popsali, jaký dopad má hraní této hry na rozvoj logického myšlení a abstrakce žáka za předpokladu, že bude hra hrána s žákem hodinu každý týden po dobu tří měsíců [4]. Podobnému problému se věnovali například také Michael Maida a Paul Maida [7]. Autoři svůj experiment založili na hře BLOKUS. Zařadili ji do učební hodiny a vybídli žáky, aby sami sepsali matematické problémy,

^{a *} Corresponding author: vlastimilchytry@centrum.cz

² Hra je svobodné jednání či zaměstnání, které v rámci určitého jasně vymezeného času a prostoru, které se koná podle svobodně přijatých, ale přitom bezpodmínečně závazných pravidel, má svůj cíl samo v sobě a nese sebou pocit napětí a radosti a zároveň vědomí odlišnosti od všedního života [3].

³ Martin Gardner definoval matematickou hru v Scientific American následovně: A mathematical game is a multiplayer game whose rules, strategies, and outcomes can be studied and explained by mathematics [2].

kteří hra představuje. Došli k závěru, že hra dovoluje analyzovat atributy dvojrozměrného prostoru a nutí žáky používat logiku a složené výroky. Žáci tak byli přímo nuceni k tomu, aby sami kritizovali jednotlivé vlastní kroky. Ve svých úvahách tak vycházeli zejména z kritického⁴ myšlení.

Nadále prezentovaný příspěvek je od zmíněných výzkumů odlišný v tom slova smyslu, že se nesnažíme popsat dopad hraní hry na abstrakci nebo jiné procesy poznání žáka, ale budeme prezentovat možné způsoby využití hry ve vyučování na základní nebo střední škole primárně v hodinách matematiky, kde vyučující pracuje s binární soustavou nebo v hodinách informatiky potažmo programování, kde žáci pracují s Excelem případně VBA.

Teoretická východiska řešení problematiky

Pro hru NIM existuje velké množství variant s odlišnými pravidly. Všechny varianty však mají společný princip: jedná se o hru dvou hráčů, kteří se pravidelně střídají v odebrání předmětů z několika hromádek. Hra končí, když hráč, který je na tahu, již nemá k dispozici žádný pravidly povolený tah, pak prohrál. Jednotlivé varianty se liší počtem hromádek, počtem předmětů na těchto hromádkách na začátku hry a různými možnostmi odebrání předmětů. Základní pravidla hry je možné obecně vymezit následovně:

Pravidla hry NIM

Na k hromádkách leží předem daný počet předmětů (tento počet může být odlišný na různých hromádkách). Hráč, který je na tahu, může odebrat předměty jen z jediné hromádky, kterou si libovolně zvolí, má-li tato hromádka n předmětů, může odebrat jeden, dva až n předmětů (může tedy odebrat i celou hromádku).

Největší devízou hry NIM je skutečnost, že v ní existuje vyhrávající strategie, která je založená na pojmech vyhrávající a prohrávající postavení. Postavením obecně myslíme stav, kdy je na hromádkách určitý počet předmětů, postavení můžeme reprezentovat uspořádanou k -ticí přirozených čísel. Definice vyhrávajícího a prohrávající postavení jsou následující:

Definice vyhrávajícího postavení

Ve vyhrávajícím postavení existuje alespoň jeden pravidly povolený tah, který soupeře dostane do prohrávajícího postavení.

Definice prohrávajícího postavení

Finální postavení (k -tice nul), v kterém neexistuje žádný pravidly povolený tah, je prohrávající postavení. Všechny tahy v nefinálním prohrávajícím postavení soupeře dostanou do vyhrávajícího postavení.

Poznámka: V definicích jsou tučně vyznačené obecný a existenční kvantifikátor, jelikož se ukazuje, že hraní hry NIM má pozitivní dopad na pochopení těchto pojmů žáky.

Odhalení vyhrávající strategie ve hře NIM

Vyhrávající strategii ve hře NIM je primárně možné odhalit třemi:

⁴ Pětibodová definice a) Kritické myšlení je nezávislé myšlení. b) Získání informace je východiskem, a nikoli cílem kritického myšlení. c) Kritické myšlení začíná otázkami a problémy, které se mají řešit. d) Kritické myšlení se pídí po rozumných argumentech. e) Kritické myšlení je myšlením ve společnosti [5].

- Pomocí Conwayovy teorie her a čísel,
- Pomocí teorie grafů,
- Pomocí induktivních úvah.

V tomto článku se blíže zaměříme na první z možností. Vycházet budeme zejména z myšlenky, kterou popisují Cihlář, Vopravil [1] založené na práci s hrami a číslý jako matematickými objekty. Rozšíříme-li tuto myšlenku o Conwayovu teorii her a čísel, je možné získat strategii, na základě které lze jednoduchým způsobem naprogramovat Excel pomocí VBA tak, aby byl program sám schopný hrát hru NIM a stal se „neporazitelným“. Před vlastním využitím Excelu potažmo VBA je však nutné demonstrovat několik definic, na základě kterých je možné vyhrávající strategii, vhodnou pro „předání počítači“ odvodit.

Definice hry: Jestliže L, R jsou dvě libovolné množiny her, potom můžeme zkonstruovat hru $x \equiv \{L; R\}$, tj. uspořádanou dvojici množin her L, R . Všechny hry jsou tvořeny tímto způsobem.

Hry je možné nadále dělit na nestranné⁵ hry a absolutně nestranné hry. Vzhledem ke skutečnosti, že hra NIM je označována za absolutně nestrannou hru, zmíníme si zde definici této hry:

Definice absolutně nestranné hry: Jsou-li x^S libovolné absolutně nestranné hry, pak můžeme zkonstruovat absolutně nestrannou hru $x \equiv \{x^S \mid x^S\}$, kterou budeme zkráceně zapisovat $x \equiv \{x^S\}$.

Hrajeme-li hru NIM na více hromádkách, je hodnota této hry rovna součtu⁶ jednotlivých NIM her. V případě absolutně nestranných her můžeme definici zapsat takto: $x + y \equiv \{x^S + y, x + y^S\}$, je patrné, že pro absolutně nestranné hry platí $-x \equiv x$. Z výše uvedených faktů získáme například: $*1 + *2 \equiv \{*0\} + \{*1, *0\} \equiv \{*0 + *2, *1 + *1, *1 + *0\} = \{*2, *1, *0\} \equiv *3$. Další definicí nutnou pro dovození vyhrávající strategie je definice součinu her.

Definice součinu her: Pro čísla $x \equiv \{x^L \mid x^R\}$, $y \equiv \{y^L \mid y^R\}$ definujeme jejich součin takto:
 $x \cdot y \equiv \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$

Podrobnější studii této problematiky dojdeme k závěru, že množina NIM her obsahující prvky $*0, *1, *2, *3$ spolu s operací sčítání tvoří komutativní grupu. Přidáním operace součinu her získáme komutativní těleso [1]. Podrobným výpočtem bychom například zjistili, že platí $*1 + *3 + *5 + *7 = 0$, což znamená, že v této hře existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče⁷, jak bude nadále vysvětleno.

Kombinací Boutonovy věty a definice NIM – součtu her je možné následně získat operativní nalezené vhodné tahu v každé části hry.

Definice (NIM-součet) Nim-součtem čísel $x = (x_m \dots x_0)_2$ a $y = (y_m \dots y_0)_2$ je číslo $x \oplus y = z = (z_m \dots z_0)_2$, kde $z_k = (x_k + y_k)_{\text{mod } 2}$, pro $k = 0, \dots, m$.

⁵ Hru $x \equiv \{x^L \mid x^R\}$ budeme nazývat nestrannou hrou právě tehdy, když její levá množina subher⁵ je rovna pravé množině subher, tedy když platí (zapsáno zkráceně) $x^L \equiv x^R$.

⁶ Pro libovolné hry $x \equiv \{x^L \mid x^R\}$, $y \equiv \{y^L \mid y^R\}$ definujeme jejich součet jako: $x + y \equiv \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$.

⁷ Poznámka: tato hra je označována jako Marienbad, která je speciální verzí obecnější hry NIM kdy na stole leží čtyři hromádky po 1, 3, 5 a sedmi kamenech. Hru hrají dva hráči, kteří se střídají v tazích. Tahem je sebrání libovolného nenulového počtu předmětů, ale vždy pouze z jedné hromádky. Hráč, který táhnul naposledy, vyhrál!

Boutonova věta: Pozice $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve hře NIM je prohrávajícím postavením právě tehdy, když platí $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$.

Jako ukázkou uvádíme aplikace Boutonovy věty na speciálním případě hry NIM nazvaném Marienbad, kdy původní postavení je $(7, 5, 3, 1)$.

$7 \oplus 5 \oplus 3 \oplus 1 = (111)_2 \oplus (101)_2 \oplus (011)_2 \oplus (001)_2 = (000)_2 = 0$. Je tak patrné, že se jedná o prohrávající postavení bez ohledu na to, jaký bude následující tah hráče. Z výše zmíněného je patrné, jak lze odvodit vyhrávající strategii pro n -předmětů na k -hromádkách.

Z Boutonovi věty vychází dobře známá strategie, kdy převádíme počty předmětů na jednotlivých hromádkách do binární soustavy a v následně se snažíme udělat takový krok, který zaručí, že v každém sloupci bude sudý součet čísel⁸, jelikož NIM-součet pak bude nulový. Demonstrujme tuto strategii pro případ hry $(5, 4, 3)$.

Převod do binární soustavy



	Počet předmětů	Převod do binární soustavy		
Hromádka 1	5	1	0	1
Hromádka 2	4	1	0	0
Hromádka 3	3	0	1	1
	Součet her	0	1	0



NIM - součet her

Obrázek 1: Ukázka převodu postavení do binární soustavy a NIM-součet

Z tabulky je zřejmé, že se jedná o vyhrávající postavení, jelikož Boutonova věta říká, že prohrávající postavení je to, kde součet čísel ve sloupci modulo dvě je roven nule. Provedeme tedy takovou úpravu, aby tento součet byl roven nule. Touto úpravou je odebráním dvou předmětů z třetí hromádky.

Převod do binární soustavy



	Počet předmětů	Převod do binární soustavy		
Hromádka 1	5	1	0	1
Hromádka 2	4	1	0	0
Hromádka 3	1	0	0	1
	Součet her	0	0	0



NIM - součet her

Obrázek 2: Ukázka ideálního tahu, kterým je odebrání dvou předmětů z třetí hromádky

V získaném postavení nemá již druhý hráč šanci vyhrát za předpokladu, že první hráč zná princip hry.

Je zřejmé, že tímto způsobem je možné získat vyhrávající strategii pro libovolnou NIM hru a není pro nás limitující počet hromádek ani počet předmětů na těchto hromádkách. Pro vizualizaci této konkrétní strategie je možné využít tabulkového editoru Excel. Pokud však chceme tuto myšlenku předat žákům, je nezbytné, aby již nepatřili mezi uživatele začátečníky, ale téměř dokonale ovládali práci s funkcemi.

Díky Excelu a jeho základním funkcím je možné tabulky připravit tak, aby byl automatický

⁸ Nulu považujeme za sudé číslo.

převod do binární soustavy. K tomuto je nezbytné využít zejména následující funkce:

- **DEC2BIN** – převede hodnotu z dekadické soustavy do binární,
- **ČÁST** – vrátí znaky z textového řetězce, je-li zadán počátek a počet znaků,
- **HODNOTA** – převede textový řetězec představující číslo na číslo.

Studentům středních škol případně nadaným žákům základních škol je vhodné nejdříve demonstrovat každou z funkcí zvlášť. Budeme-li však chtít, aby převod vypadal tak, že v každé buňce bude jedna část čísla v binární soustavě (toto je potřebné pro pozdější práci se sumami na základě odvození vyhrávající strategie z Boutonovy věty) je potřebné tyto funkce zkombinovat. Obrázek 3 popisuje, jak tato funkce vypadá pro buňku C₁ a jak je možné rychle získat veškeré součty.

Při takto vytvořeném souboru je možné, aby se hráči u PC střídali a odebírali zápalky z hromádek (žluté pole). Mohou tak sami odvodit vyhrávající strategii na základě převodu do binární soustavy, aniž by jim byla předložena. Nejdříve je však nutné, aby žáci měli o binární soustavě povědomí. Za vhodnější považujeme prvotní odhalení vyhrávající strategie na základě manipulace s předměty a až následné přistoupení k hraní na počítači. Domníváme se, že pokud nebudou žáci předem obeznámeni s vyhrávající strategií například při hře na jedné nebo dvou hromádkách, nebo nebudou dobře pracovat s převodem čísla do binární soustavy, nebude jim jasná parita získaných sum po převodu do binární soustavy (z počátku je vhodné řešit pouze součet ve sloupcích a nikoliv NIM-součet, který je pro sudá čísla nulový).

Zadaná funkce

	A	B	C	D	E	F
1	1		0	0	0	
2	3		0	1	1	
3	5		1	0	1	
4	7		1	1	1	
5	sumy		2	2	4	

Hledané sumy

Obrázek 3: Ukázka využití funkcí v tabulkovém editoru Excel pro možnost převodu z desítkové soustavy do binární.

„Naprogramování“ hry NIM pomocí VBA

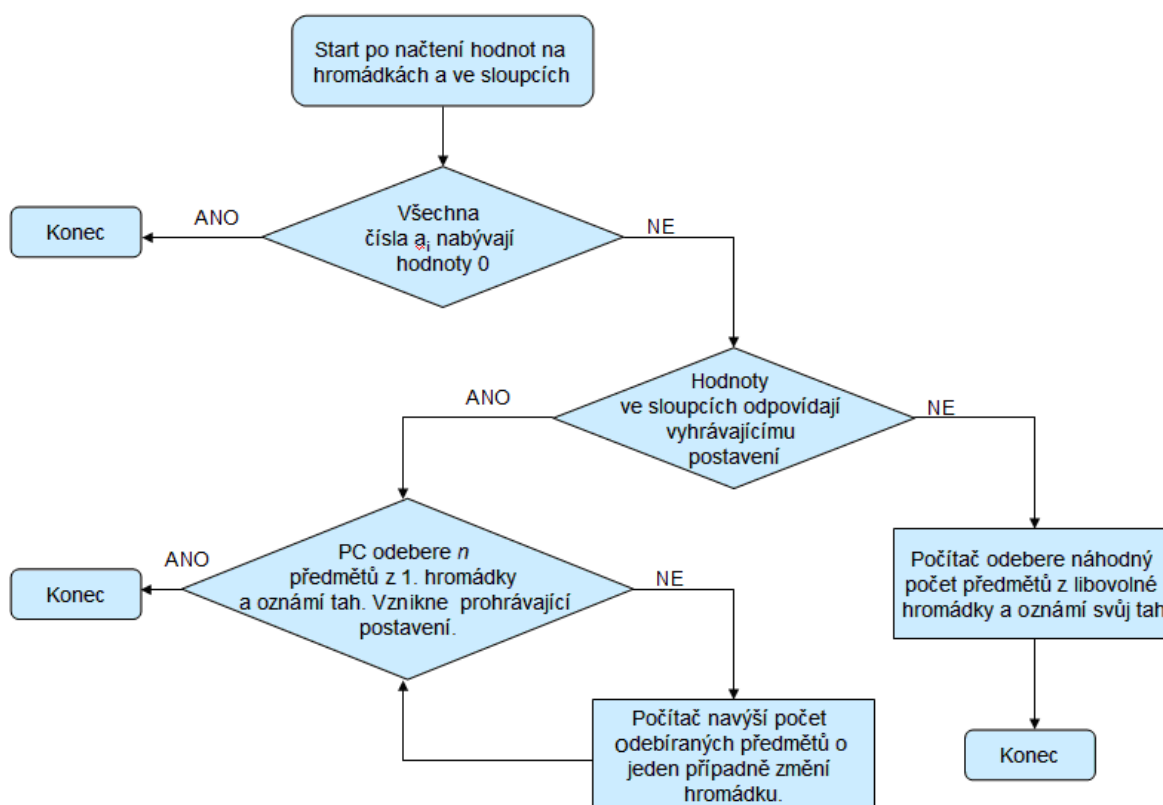
Efektivnější způsob, jak odvodit vyhrávající strategii je připravit program tak, aby druhý tah vždy hrál počítač (zde bude zaručeno využití vyhrávající strategie). Toto nelze v Excelu vytvořit za využití běžných funkcí, ale je možné použít jeho doplněk VBA. Pomocí tlačítek a maker je pak možné vytvořit program, díky kterému počítač „naučíte“ vyhrávající strategii. Námi naprogramovaná verze je zobrazena na následujícím obrázku.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Nová hra							Binary 1	Binary 2	Binary 3	
2		Hromádka 1	0		Odebrat			0	0	0	
3		Hromádka 2	2		Odebrat			0	1	0	
4		Hromádka 3	5		Odebrat			1	0	1	
5		Hromádka 4	7		Odebrat			1	1	1	
6							Position	2	2	2	
7					Hraje PC						
8											
9											

Obrázek 4: Ukázka jedné z možností, jak vytvořit hru NIM v tabulkovém editoru Excel

Popis jednotlivých fází programu

Nadále zmíněný algoritmus (obr. 5) nekopíruje doslova výše popsanou strategii, ale systematicky prochází jednotlivé sloupce dvojkových číslic. Tento algoritmus je centrální procedurou celého programu a je přiřazen k tlačítku „hraje PC“ zmiňovaném na obrázku 4.



Obrázek 5: Algoritmus popisující centrální proceduru celého programu

Při tomto postupu mění jedničku na nulu a ověřuje, zda se touto změnou získá prohrávající postavení. Pokud ano, svůj tah ukončí, pokud ne, pokračuje v procházení sloupců. Centrální procedura celého programu vychází z důsledku Boutonovy věty s tím rozdílem, že počítač nevyhledává sumy, které budou nulové modulo dvě, ale stejný význam pro něj má i sudá hodnota. Pro lepší přehlednost jsme nejdůležitější část algoritmu (příloha 1) doplnil o poznámky popisující, k čemu daný krok slouží. Naprogramování jednotlivých tlačítek je pak uvedeno v následující příloze (příloha 2). Pro komplexní naprogramování hry uvádíme také makro napojené na tlačítko „hraje PC“ (Příloha 3) odvolávající se na centrální proceduru. Vzhledem ke skutečnosti, že kód je delší než řádek v aplikaci Word budeme symbolem / naznačovat zalomení na druhý řádek, které se ve VBA nepoužívá. Z kapacitních důvodů

nebudou také příkazy **enif if**, **exit for** případně **next** psány pod sebe, jak je při programování nutné, ale vedle sebe.

Závěr

Ukazuje se, že hru NIM je možné využít nejen k rozvoji abstraktního a logického myšlení, ale že je také velice účinným nástrojem za předpokladu, že se chceme zabývat specifickými oblastmi matematiky nebo programování.

Z výzkumu popsaného v [4] je zřejmé, že již žáci sedmých tříd jsou schopni najít vyhrávající strategii hry NIM na základě manipulace za předpokladu, že je hra hrána na jedné nebo dvou hromádkách. Nejsou však schopni pracovat s obecným a existenčním kvantifikátorem a popsat tak vyhrávající či prohrávající postavení nebo své tahy zapsat pomocí symbolů. Pro tyto žáky je příliš náročné pracovat s odhalováním strategií na základě práce s binární soustavou, která již nepředstavuje problém pro nadanější žáky na přelomu osmých a devátých tříd.

Je zřejmé, že hra může být, kromě hodin matematiky, využita také v hodinách informační technologie potažmo programování a to zejména v následujících oblastech:

- Skládání více funkcí v tabulkovém editoru Excel
- Grafické znázornění vývojového diagramu
- Programování ve VBA

Je zřejmé, že celý proces je možné naprogramovat také například v C, C+, C++ apod. Při tvorbě článku jsme vycházeli z předpokladu, že chceme pracovat s jedním nejjednodušším programovacím jazykům, který má být navíc volně přístupný.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory studentského grantového projektu SGS – CHYTRÝ - Analýza úrovně logického myšlení. No: 43213 - 15 0001 01

Seznam literatury

- [1] CIHLÁŘ, J. & VOPRAVIL, V. *Hry a čísla*. Ústí nad Labem: Pedagogická fakulta, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 1995
- [2] GARDNER, M. *Mathematical Games*. *Scientific American*. 241 (3), 1979. p. 22 – 32.
- [3] HUIZINGA, J. *Homo ludens: o původu kultury ve hře*. Praha: Dauphin, 2000.
- [4] CHYTRÝ, V. *Logika, hry a myšlení*. Ústí nad Labem: Pedagogická fakulta, Univerzita J. E. Purkyně, 2015
- [5] KLOOSTER, D. *Co je kritické myšlení?* In: Kritické listy, 2000, č. 1-2. Dostupné z http://www.kritickemysleni.cz/klisty.php?co=klisty2_cojeKM . Dostupné z (2010-11-10)
- [6] MALINOVÁ, D. & CHYTRÝ, V. Manipulace jako významný aspekt při motivaci žáků v matematice. In *Motivace nadaných žáků a studentů v matematice a přírodních vědách*. (179-186). Masarykova univerzita, Brno, 2012
- [7] MAIDA, M. & MAIDA, P. Problem solving around the Corner. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 16(8), 466 – 472, 2011

[8] VIDERMANOVÁ, K. & UHRINOVÁ, E. Počítač a didaktické hry. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2011

Příloha 1

```
Public Function PrincipHry(strAdresaHromadky As String, lngHodnotaOdebrani As Long, booVyhra As Long, booPC As Long) As Long()
Dim lngHromCount As Long, lngMyTestVal As Long, lngTempRange As Long, booVitezstvi As Long, lngCount As Long
Dim intMyValue As Long
ActiveSheet.Unprotect "jilove"
Select Case True
Case booPC = True
If booVyhra Then
NactiSumy
For lngHromCount = 2 To 5
projed všechny hromádky c2 - c5
If Range("C" & lngHromCount).Value > 0 Then
booVitezstvi = True
lngMyTestVal = 0
lngTempRange = Range("C" & lngHromCount).Value
Do
lngMyTestVal = lngMyTestVal + 1
ActiveSheet.Unprotect "jilove"
Range("C" & lngHromCount).Value = lngTempRange - lngMyTestVal
ActiveSheet.Protect "jilove"
NactiSumy
For lngCount = 1 To 3
If Kontrola(lngCount) / 2 = 2 Or Kontrola(lngCount) / 2 = 1 Or Kontrola(lngCount) = 0 Then
booVitezstvi = True
Else
booVitezstvi = False
Exit For, End If, Next
If booVitezstvi Then
MsgBox "Odebral jsem v Hromádce " & lngHromCount - 1 & " hodnotu " & lngMyTestVal, vbInformation, "Informace o tahu PC"
Exit Do, End If
Loop Until Range("C" & lngHromCount).Value = 0
If Not booVitezstvi Then
ActiveSheet.Unprotect "jilove"
Range("C" & lngHromCount).Value = lngTempRange
ActiveSheet.Protect "jilove"
Else, Exit For, End If, End If, Next, Else
For lngHromCount = 2 To 5
If Range("C" & lngHromCount).Value > 0 Then
intMyValue = Int((Range("C" & lngHromCount).Value * Rnd) + 1)
Range("C" & lngHromCount).Value = Range("C" & lngHromCount).Value - intMyValue
MsgBox "Odebral jsem v Hromádce " & lngHromCount - 1 & " hodnotu " & intMyValue, vbInformation, "Informace o tahu PC"
ActiveSheet.Protect "jilove"
Exit For, End If, Next, End If
Case booPC = False
ActiveSheet.Unprotect "jilove"
Range(strAdresaHromadky).Value = Range(strAdresaHromadky).Value - lngHodnotaOdebrani
ActiveSheet.Protect "jilove"
End Select, End Function, Public Function NactiSumy()
Kontrola(1) = Range("H6").Value
```

Stěžejní funkce, vše ostatní jsou proměnné a jejich typy. Zaheslování pod stejným heslem jako níže.

Toto se provede, pokud hraje PC. Zde pokud může vyhrát.

Jestliže daná hromádka má hodnotu větší než nula, pak. Výchozí hodnota se předpokládá pro vítězství PC. Vybudování testovací hodnoty tj. odebíraná hodnota. Načtení aktuální hodnoty aktuální hromádky.

Navýšení testovací hodnoty o 1, tj. bere o jednu více.

Testování aktuální hromádky, zda odebraná hodnota vede k vítězství.

Počítač kontroluje, zda může zvítězit.

Pokud ne, nastaví si hodnotu, že nemůže.

Pokud PC zjistí, že může vyhrát, vypíše, kolik odebral a kde.

Testuje, dokud hodnota buňky mínus zkušební odebíraná hodnota není rovna nule.

Jestliže je hodnota hromádky větší než nula. Náhodně určí rozpětí odebíraných kamenů vždy od 1 do počtu v hromádce. Zde je fyzicky odebere.

Oznámí, kolik odebral a kde.

Toto se provede, pokud hraje uživatel.

Díky tomuto se do pole kontrola načtou jednotlivé sumy.

```
Kontrola(2) = Range("I6").Value
Kontrola(3) = Range("J6").Value
End Function
```

Příloha 2 - Vytváření makra pro tlačítko „odebrat“

```
Sub Tlacitko1 ()
Dim lngl As Long, lngRetVal As Long      Toto je kontrola, zda se v hromádce něco nachází.
If Range("C2") <= 0 Then MsgBox "nelze odebírat z hromádky, kde nic není!", vbCritical, /
/ "Mě neošálíš ☺"
End, End If
Err.Clear                                Odmazání případných neplánovaných chyb.
On Error Resume Next                     V případě následující chyby pokračuj.
lngl = InputBox("Zadejte odebíranou hodnotu", "Odebírání")
                                           Pokud uživatel nevyplní hodnotu lngl a dodá odebíranou hodnotu, nastane
                                           chyba. Jakmile zmáčkne cancel bude chyba.
                                           V tom případě se běh programu ukončí.
If Err.Number > 0 Then End               Jestliže zadaná hodnota je větší jak hodnota hromádky.....pak:
If lngl > Range("C2") Then               Tady může uživatel hodnotu opravit.
    lngRetVal = MsgBox("Odebral(a) jste více než jste mohl(a), opravíte tah?", vbExclamation + vbYesNo, "Pokus o
    švindl?!")                           Zde uživatel neopravil, hra se ukončí.
    If lngRetVal = vbNo Then
        MsgBox "Hra byla zrušena", vbCritical, "Konec hry"
    End, Else
    Call Tlacitko1                       Zde uživatel hodnotu opravil veškeré kontroly, tlačítka jdou od začátku.
End If, End If
PrincipHry "C2", lngl, False, False '    Centrální procedura s parametrem buňky C4, hodnotou, která má být odebrána,
                                           parametrem tak, aby poslední parametr byl, že hraje uživatel.

End Sub
```

Příloha 3 - Makro napojeno na tlačítko „hraje PC“ odvolávající se na centrální proceduru zmíněnou v příloze 1.

```
Sub HrajePC() 'procedura napojena na tlačítko hraje pc
Dim lngCount As Long, lngHromCount As Long, intMyValue As Long '    deklarace proměnných.
Dim booVitezstvi As Boolean
ActiveSheet.Unprotect "jilove"          „Zaheslování“ buněk heslem jilove.
NactiSumy                               Díky tomuto se do pole kontrola načtou jednotlivé sumy.
booVitezstvi = True                     Počítač chce vždy zvítězit.
For lngCount = 1 To 3                   Počítač kontroluje zda může zvítězit.
    If Kontrola(lngCount) / 2 = 2 Or Kontrola(lngCount) / 2 = 1 Or Kontrola(lngCount) = 0 Then
        booVitezstvi = True
    Else                                Pokud PC nemůže vyhrát, nastaví si hodnotu, že nemůže.
        booVitezstvi = False
    Exit For, End If, Next
If Not booVitezstvi Then                Jestliže počítač může zvítězit, pak zavolá centrální proceduru
                                           princip hry s různými parametry 1-4.

    PrincipHry "", 0, True, True
Else                                    Když nemůže zvítězit, nalezne první nenulovou hromádku a
                                           odebere z ní náhodný počet kamenů.

    For lngHromCount = 2 To 5
        If Range("C" & lngHromCount).Value > 0 Then    Jestliže je hodnota hromádky větší než nula.
            intMyValue = Int((Range("C" & lngHromCount).Value * Rnd) + 1)
                                                    Náhodně určí rozpětí odebíraných kamenů vždy od 1 do počtu
                                                    v hromádce.
            Range("C" & lngHromCount).Value = Range("C" & lngHromCount).Value - intMyValue
                                                    Zde je fyzicky odebráno.
            MsgBox "Odebral jsem v Hromádce " & lngHromCount - 1 & " hodnotu " & intMyValue, vbInformation, "Informace o
            tahu PC"                               Počítač oznámí, kolik odebral předmětů a kde.
            ActiveSheet.Protect "jilove"
        Exit For, End If, Next, End If, End Sub
```